ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \quad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.

c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y e area massima.

e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno e un solo flesso.

b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

d) Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A e avente il centro sull'asse y.

e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.

QUESTIONARIO

1 Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

2 Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0; 2\pi]$ è:

A 0. B 2. C 3. D 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3 Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$, per $x \to 0$:

A non esiste. B è 0. C è un valore finito diverso da 0. D è $+\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4 Trovare, con il procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

5 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al «primo».

6 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7 Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$.
È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8 È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende a ∞.

9 Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10 Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno a un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia «1», posta a capotavola, è riservata al ragazzo «1», che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione suppletiva

PROBLEMA 1

a) La parabola p' ha il vertice V' nell'origine e l'asse y come asse di simmetria. La parabola p'' ha l'asse di simmetria parallelo all'asse delle ascisse, ha vertice di ordinata $y_{V''} = -\dfrac{b}{2a} = 1$ e ascissa $x_{V''} = -1$, interseca l'asse y nei punti (0; 0) e (0; 2).
Determiniamo ora i punti comuni alle due parabole risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 - 2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - 2x^2 - x = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x(x+1)(x^2 - x - 1) = 0 \end{cases}$$

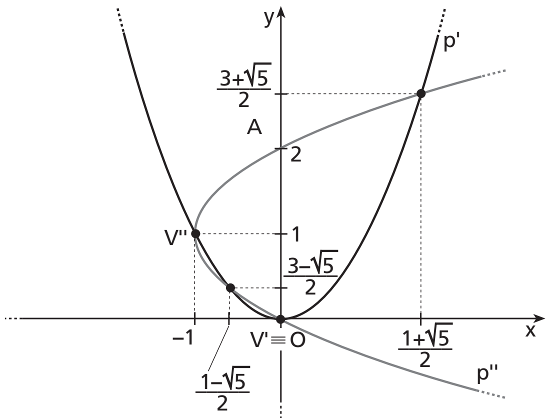
Le soluzioni dell'ultima equazione sono:

$$x = 0 \vee x = -1 \vee x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

In corrispondenza di tali ascisse troviamo i punti di intersezione di coordinate:

$$(0; 0),\ (-1; 1),\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).$$



▲ **Figura 1.**

I grafici delle due parabole sono rappresentati in figura 1.

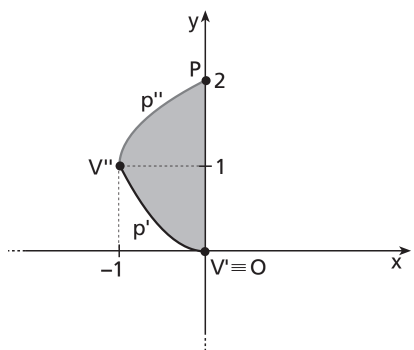
b) Considerati i punti $V'(0; 0)$, $V''(-1; 1)$, $P(0; 2)$, l'area richiesta è quella evidenziata nella figura 2.
Per calcolare tale superficie determiniamo la funzione che descrive il ramo $V''P$ esplicitando y in funzione di x.

$$y^2 - 2y = x \quad \rightarrow \quad (y-1)^2 - 1 = x \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad (y-1)^2 = x + 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 \pm \sqrt{x+1}.$$

La funzione che descrive il ramo $V''P$ è:

$$y = 1 + \sqrt{x+1}, \quad \text{con } -1 \le x \le 0.$$



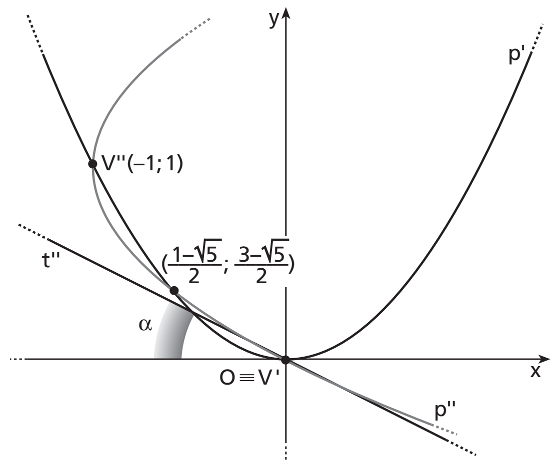
▲ **Figura 2.**

Ne segue che l'area cercata vale:

$$A = \int_{-1}^{0} (\sqrt{x+1} + 1 - x^2)\, dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} = \frac{2}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

c) L'angolo richiesto è quello formato dalle tangenti nell'origine alle due parabole. La tangente t' alla parabola p' è l'asse delle ascisse, quindi l'angolo cercato coincide con l'angolo formato dalla tangente t'' nell'origine della parabola p'' con l'asse x (figura 3).
L'equazione della funzione che descrive p'' nel tratto $V'V''$ dell'origine è $f'(x) = 1 - \sqrt{x+1}$, come si può dedurre dal punto precedente. Poiché $f(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$, il coefficiente angolare di t'' è $m'' = f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. L'angolo α cercato è quindi tale che $\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\dfrac{1}{2}$ da cui $\mathrm{tg}\,\alpha = +\dfrac{1}{2}$. Possiamo ora determinare, con l'utilizzo di una calcolatrice scientifica impostata in gradi sessagesimali, un'approssimazione di tale angolo tramite la seguente relazione:

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 26{,}565° = 26°\,33'\,54''.$$

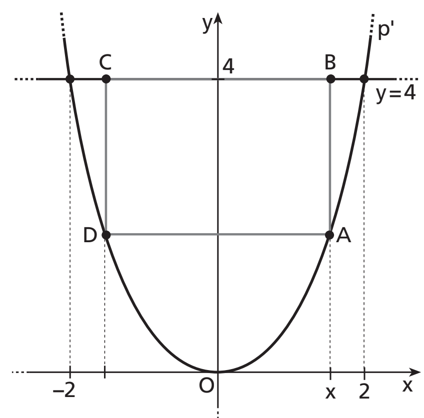


▲ **Figura 3.**

d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscriviamo un rettangolo $ABCD$. Sia x l'ascissa del vertice A, con $0 \leq x \leq 2$ (figura 4).
I vertici del rettangolo hanno coordinate $A(x;\ x^2)$, $B(x;\ 4)$, $C(-x;\ 4)$, $D(-x;\ x^2)$. Perciò le sue dimensioni misurano: $\overline{AD} = 2x$, $\overline{AB} = 4 - x^2$.
L'area del rettangolo è quindi espressa dalla funzione $y = 2x(4 - x^2)$, ovvero $y = 8x - 2x^3$, con $0 \leq x \leq 2$. Determiniamo il massimo di tale funzione studiando la derivata prima:

$$y' = 8 - 6x^2.$$

Lo schema in figura 5 ne riassume il segno.
La funzione ha un massimo per $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, dove l'area vale $\dfrac{32}{9}\sqrt{3}$.

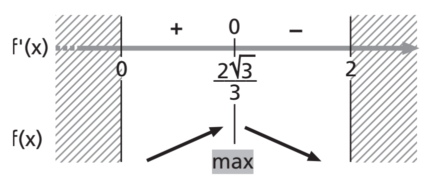


▲ **Figura 4.**

e) Il perimetro del rettangolo $ABCD$ è:

$$2p = 2\overline{AB} + 2\overline{AD} = 2(4 - x^2) + 4x = -2x^2 + 4x + 8.$$

Il grafico della funzione $y = -2x^2 + 4x + 8$ nel dominio $[0;\ 2]$ è un arco di parabola di vertice $(1;\ 10)$ con la concavità rivolta verso il basso. Il valore massimo è quindi l'ordinata del vertice, cioè 10, che si ottiene in corrispondenza di $x = 1$. In conclusione il rettangolo di area massima non coincide con quello di perimetro massimo.



▲ **Figura 5.**

PROBLEMA 2

a) Consideriamo due curve di equazioni $y = \dfrac{x+k}{x^2}$ e $y = \dfrac{x+k'}{x^2}$ con $k \neq k'$ e $x \neq 0$. Esse hanno un punto in comune se esiste una soluzione del seguente sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x+k}{x^2} \\ y = \dfrac{x+k'}{x^2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{x+k}{x^2} = \frac{x+k'}{x^2} \quad \rightarrow \quad x + k = x + k' \quad \rightarrow \quad k = k'.$$

Poiché $k \neq k'$, il sistema è impossibile. Tali curve non hanno quindi punti in comune.

Per determinare i flessi della curva di equazione $y = \dfrac{x+k}{x^2}$, studiamo il segno della derivata seconda:

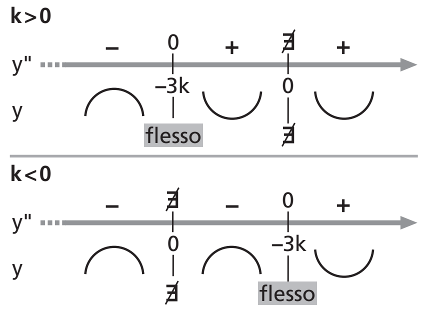
$$y' = \frac{x^2 - 2x(x+k)}{x^4} = -\frac{x^2 + 2kx}{x^4} = -\frac{x+2k}{x^3},$$

$$y'' = -\frac{x^3 - 3x^2(x+2k)}{x^6} = -\frac{x - 3(x+2k)}{x^4} = \frac{2(x+3k)}{x^4}.$$

Nel campo di esistenza $\mathbb{R} - \{0\}$ della funzione, vale:

$$y'' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3k \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3k$$

Rappresentiamo quanto trovato negli schemi di figura 6.
Possiamo quindi concludere che per ogni k non nullo la curva di equazione $y = \dfrac{x+k}{x^2}$ ha un unico flesso, precisamente nel punto di coordinate $\left(-3k; -\dfrac{2}{9k}\right)$.



▲ **Figura 6.**

b) Il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $\left(-3k; -\dfrac{2}{9k}\right)$ è $y'(-3k) = -\dfrac{1}{27k^2}$.

La tangente inflessionale è perciò la retta di equazione:

$$y + \frac{2}{9k} = -\frac{1}{27k^2}(x+3k) \quad \rightarrow \quad x + 27k^2 y + 9k = 0.$$

Tale retta coincide con quella di equazione $x + 27y - 9 = 0$ solo per $k = -1$. La curva γ è perciò quella di equazione $y = \dfrac{x-1}{x^2}$.

c) Il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ è $\mathbb{R} - \{0\}$. Il grafico di tale funzione non interseca l'asse y, mentre interseca l'asse x nel punto $A(1; 0)$. La funzione è positiva solo per $x > 1$ e negativa negli altri punti del dominio. Inoltre vale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty,$$

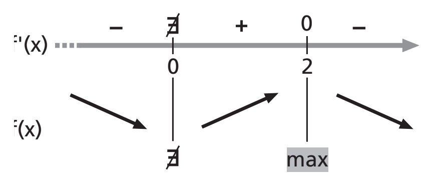
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{x} = 0.$$

Dunque l'asse y è asintoto verticale, mentre l'asse x è asintoto orizzontale.
Studiamo ora la derivata prima, sostituendo $k = -1$ nell'espressione già calcolata nel punto a).

$$f'(x) = -\frac{x-2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}.$$

Essa si annulla per $x = 2$, è positiva se $0 < x < 2$ e negativa negli altri punti del campo di esistenza. Nella figura 7 è mostrato il quadro del segno della derivata prima.

La funzione ha un massimo assoluto in $M\left(2; \dfrac{1}{4}\right)$, è crescente se $0 < x < 2$ e decrescente se $x < 0 \vee x > 2$.

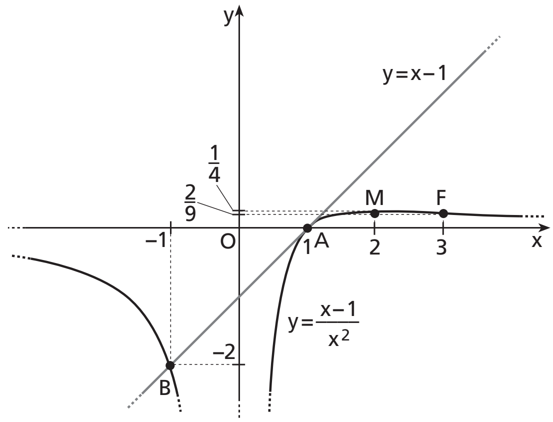


▲ **Figura 7.**

Inoltre la retta t, tangente a γ in $A(1; 0)$, ha coefficiente angolare $f'(1) = 1$. La sua equazione è perciò $y = x - 1$. Determiniamo poi, come richiesto, l'ulteriore punto di intersezione tra t e γ, considerando il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{x^2} \\ y = x-1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{x-1}{x^2} = x-1.$$

Quindi, escludendo il punto A (supponendo cioè $x \neq 1$), si ottiene $\dfrac{1}{x^2} = 1 \quad \rightarrow \quad x = -1$.
L'ulteriore punto di intersezione è perciò $B(-1; -2)$.
Passiamo ora allo studio della derivata seconda. Per quanto trovato nel punto a) sappiamo che la funzione ha un unico flesso nel punto $F\left(3; \dfrac{2}{9}\right)$, ha la concavità rivolta verso il basso per $x < 3 \wedge x \neq 0$, rivolta verso l'alto per $x > 3$. L'andamento di γ è rappresentato nella figura 8.



▲ **Figura 8.**

d) Poiché la circonferenza c ha come tangente in $A(1; 0)$ la retta $t: y = x-1$, il suo centro appartiene alla retta perpendicolare a t e passante per A. Il coefficiente angolare di questa retta è perciò $m = -1$ e quindi la sua equazione è $t': y = -x+1$.

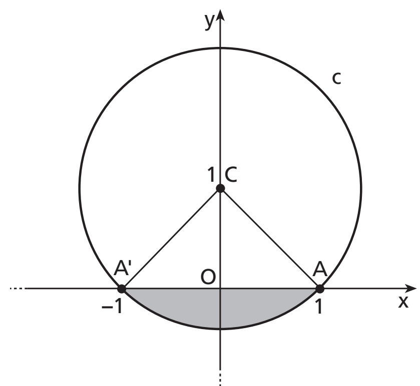
Le coordinate del centro C soddisfano dunque il seguente sistema: $\begin{cases} x = 0 \\ y = -x+1 \end{cases}$, pertanto C ha coordinate $(0; 1)$, mentre il raggio r vale $\overline{CA} = \sqrt{2}$.
Ricaviamo infine l'equazione della circonferenza c utilizzando la formula:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2.$$

Risulta:

$$c: x^2 + (y-1)^2 = 2 \quad \rightarrow \quad c: x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0.$$

▼ **Figura 9.**



e) Rappresentiamo la circonferenza c ed evidenziamo la regione di cui dobbiamo determinare l'area (figura 9).
Per calcolare tale superficie occorre esplicitare y in funzione di x dall'equazione della circonferenza.

$$x^2 + (y-1)^2 = 2 \;\rightarrow\; (y-1)^2 = 2 - x^2 \;\rightarrow\; y - 1 = \pm\sqrt{2-x^2} \;\rightarrow\; y = 1 \pm \sqrt{2-x^2}, \; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$

Si ottengono le funzioni delle due semicirconferenze di estremi $(-\sqrt{2}; 1)$ e $(\sqrt{2}; 1)$. L'equazione della semicirconferenza che ci occorre (cioè quella inferiore) è dunque $y = 1 - \sqrt{2-x^2}$. L'area cercata si trova calcolando il seguente integrale:

$$Area = -\int_{-1}^{1} (1 - \sqrt{2-x^2})\, dx = -[x]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} \sqrt{2-x^2}\, dx = -2 + \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx =$$

ponendo, per sostituzione, $\operatorname{sen} t = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, cioè $x = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$, risulta:

$$= -2 + \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cdot \sqrt{2}\cos t\, dt = -2 + 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\, dt = -2 + 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dt =$$

$$= -2 + \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} + t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = -2 + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

Notiamo che si poteva calcolare tale area anche osservando che $A'C$ e AC sono perpendicolari. Quindi, il settore circolare $A'AC$ è un quarto del cerchio. L'area di tale settore circolare vale $\frac{1}{4}[\pi(\sqrt{2})^2] = \frac{\pi}{2}$. Mentre l'area del triangolo $A'AC$ risulta uguale a $\frac{1}{2} \cdot \overline{A'A} \cdot \overline{CO} = 1$. L'area cercata si calcola quindi per differenza:

$$Area = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi - 2}{2}.$$

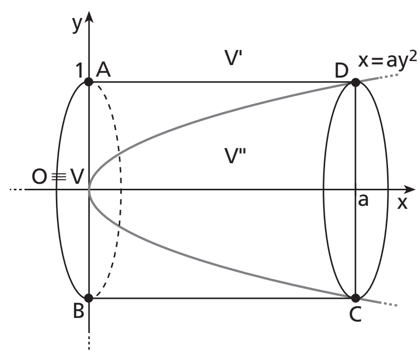
QUESTIONARIO

1 Scelto un sistema di riferimento Oxy, rappresentiamo il rettangolo $ABCD$, la parabola e la loro rotazione di mezzo giro intorno all'asse x (figura 10).

Rispetto a questo sistema di riferimento i vertici del rettangolo hanno coordinate:

$$A(0; 1),\ B(0; -1),\ C(a; -1),\ D(a; 1) \text{ con } a > 0.$$

▼ **Figura 10.**



La parabola, con vertice $V(0; 0)$ e passante per C e D, ha equazione $y = ax^2$.

Il solido generato dalla rotazione del rettangolo è un cilindro di altezza a e raggio di base uguale a 1. Quindi, $V' = \pi a$. Mentre, essendo $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$ l'equazione del ramo della parabola formato dai punti di ordinata positiva, il volume di rotazione del ramo risulta:

$$V'' = \pi \int_0^a \left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2 dx = \frac{\pi}{a} \int_0^a x\, dx = \frac{\pi}{a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{\pi a}{2}.$$

Calcoliamo il rapporto dei due volumi:

$$\frac{V'}{V''} = \pi a \cdot \frac{2}{\pi a} = 2.$$

2 L'equazione considerata non ha soluzioni poiché il prodotto di due numeri minori o uguali a 1 ($\text{sen}\, 2x \leq 1$, $\cos x \leq 1$) è ancora un numero minore o uguale a 1 e quindi non può essere uguale a 2. L'alternativa esatta è A.

3 Risulta $\lim_{x \to 0^+} x \,\text{sen} \frac{1}{x} = 0$.

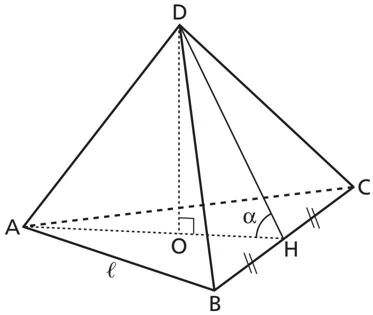
Infatti, poiché $-1 \leq \text{sen} \frac{1}{x} \leq 1$ e $x > 0$, vale $-x \leq x\,\text{sen}\frac{1}{x} \leq x$. Per il teorema del confronto, essendo $\lim_{x \to 0^+} x = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$, risulta anche $\lim_{x \to 0^+} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = 0$. Analogamente si dimostra che $\lim_{x \to 0^-} x\,\text{sen}\frac{1}{x} = 0$. La risposta esatta è B.

4 Sappiamo che $D[\cos x] = -\text{sen}\, x$ e che $D[\text{sen}\, x] = \cos x$. Applicando la formula della derivata di un quoziente otteniamo:

$$D[\text{tg}\, x] = D\left[\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right] = \frac{D[\text{sen}\, x] \cdot \cos x - \text{sen}\, x \cdot D[\cos x]}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

5 Nella figura 11 è rappresentato un tetraedro regolare *ABCD* di lato *l*.

Si prendano le due facce consecutive *BCD* e *ABC* e si sezioni perpendicolarmente il diedro, da esse formato, con un piano passante per il vertice *D*. Tale piano intercetta il triangolo rettangolo *DOH*, dove *O* è il piede della perpendicolare da *D* al piano *ABC* e *H* è il punto medio dello spigolo *BC* del diedro. Indicato con α l'angolo $D\hat{H}O$, esso rappresenta l'angolo del quale è richiesta l'ampiezza.



▲ **Figura 11.**

Per il teorema dei triangoli rettangoli vale $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{DH}}$. Poiché il segmento *DH* è altezza del triangolo equilatero *BCD*, risulta $\overline{DH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}l$, mentre, essendo *O* il baricentro del triangolo *ABC*, vale $\overline{OH} = \dfrac{1}{3}\overline{AH} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}l = \dfrac{\sqrt{3}}{6}l$.

Risulta, allora, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OH}}{\overline{DH}} = \dfrac{1}{3}$, da cui ricaviamo: $\alpha = \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) \simeq 70{,}529° \simeq 70°\,32'$.

6 Poiché la radice cubica è sempre definita (se è definito il radicando) allora il campo di esistenza della funzione è $\mathbb{R}$.

Tale funzione è derivabile per ogni $x \neq 0$ e la sua derivata vale:

$$D[\sqrt[3]{x^2}] = D\left[x^{\frac{2}{3}}\right] = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

La funzione non è invece derivabile in $x = 0$ poiché non esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to0} h^{-\frac{1}{3}} = \lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty.$$

7 Per definizione affermare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale *M positivo*, esiste un numero reale *N positivo* tale che, per ogni *x*, se $x > N$ allora $f(x) > M$.

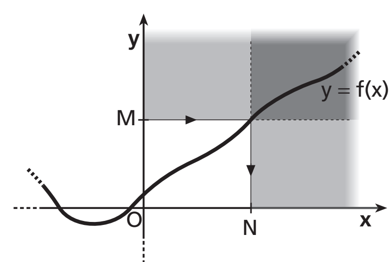
Dobbiamo, dunque, confrontare le due seguenti definizioni:

a) per ogni numero reale *M positivo*, esiste un numero reale *N positivo* tale che, per ogni *x*, se $x > N$ allora $f(x) > M$;

b) per ogni numero reale *M*, esiste un numero reale *N* tale che, per ogni *x*, se $x > N$ allora $f(x) > M$.

Ovviamente b) implica a). Mostriamo che vale anche il viceversa. Dobbiamo, per questo, mostrare che vale la condizione anche per $M \leq 0$.

Sia infatti $M \leq 0$, allora $-M \geq 0$ e, quindi, $-M + 1 > 0$. Per ipotesi, esiste un numero reale *N* tale che $f(x) > -M + 1$, per ogni $x > N$. Ma $-M + 1 > M$ essendo $-M + 1$ positivo ed *M* negativo. Quindi vale anche $f(x) > M$ per ogni $x > N$.



▲ **Figura 12.**

Essendo perciò a) e b) equivalenti, l'affermazione del quesito è vera. La figura 12 ne offre un'interpretazione grafica: $f(x) > M$ per ogni $x > N$.

8 I triangoli equilateri che si costruiscono via via hanno i lati di lunghezza $L, \dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{4}, \dfrac{L}{8}, \ldots$. In generale, il lato dell'*n*-esimo triangolo vale $\dfrac{L}{2^{n-1}}$. L'altezza di tale triangolo è perciò $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{L}{2^{n-1}} = \dfrac{\sqrt{3}L}{2^n}$. Pertanto l'area dell'*n*-esimo triangolo è:

$$A_n = \frac{L}{2^{n-1}}\cdot\frac{\sqrt{3}L}{2^n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}L^2}{2^{2n}} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4^n}.$$

Calcoliamo la somma delle aree degli n triangoli:

$$\frac{\sqrt{3}L^2}{4}+\frac{\sqrt{3}L^2}{4^2}+\ldots+\frac{\sqrt{3}L^2}{4^n}=\sqrt{3}L^2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=$$

e applicando la formula della somma di n termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{1}{4}$ risulta:

$$=\frac{\sqrt{3}L^2}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\frac{1}{4}-1}=\frac{\sqrt{3}L^2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$

Calcoliamo il limite per $n\to+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}L^2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]=\frac{\sqrt{3}L^2}{3}.$$

9 L'espressione $\ln(2x+1)^4$ è definita per ogni $x\neq-\frac{1}{2}$, mentre $4\ln(2x+1)$ è definita solo per $x>-\frac{1}{2}$.

Quindi tale uguaglianza è vera solo se $x>-\frac{1}{2}$ a seguito della proprietà dei logaritmi $\log_a b^c=c\log_a b$, per ogni $b>0$. Pertanto l'uguaglianza non vale per ogni x reale.

10 I ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo in tanti modi quante sono le possibili quaterne ordinate di un insieme di 4 elementi distinti, cioè $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 11 pag. L 235 • Esercizio 221 pag. W 118 • Esercizio 300 pag. V 210
Problema 2	• Problema 18 pag. V 284 • Problema 247 pag. W 121 • Problema 18 pag. L 164
Quesito 1	• Quesito 270 pag. W 124 • Quesito 280 pag. W 125
Quesito 2	• Esercizio 14 pag. Q 33 • Esercizio 15 pag. Q 33
Quesito 3	• Esercizio 444 pag. U 182 • Quesito 446 pag. U 182
Quesito 4	• Quesito 1 pag. V 90
Quesito 5	• Quesito 8 pag. W 167
Quesito 6	• Esercizio 79 pag. V 50 • Esercizio 87 pag. V 50
Quesito 7	• Quesito 270 pag. U 103 • Quesito 271 pag. U 103
Quesito 8	• Problema 12 pag. U 241 • Problema 13 pag. U 241
Quesito 9	• Quesito 270 pag. N 56 • Esercizio 286 pag. N 58 • Esercizio 36 pag. U 23
Quesito 10	• Quesito 175 pag. α 37 • Quesito 179 pag. α 37 • Quesito 180 pag. α 37