ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2006

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = -e^2$, l'area che è compresa fra i grafici di f e g (con $x > 0$) nella striscia di piano determinata dalle rette di equazioni $y = -1$ e $y = -2$.

3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

1 Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2 I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3 In un piano sono dati una retta r e due punti A e B a essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.

4 Si dimostri che l'equazione $\operatorname{sen} x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.

5 Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6 L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7 *Bruno de Finetti* (1906-1985), tra i più illustri matematici italiani del secolo scorso, del quale ricorre quest'anno il centenario della nascita, alla domanda: «*che cos'è la probabilità?*» era solito rispondere: «*la probabilità non esiste!*». Quale significato puoi attribuire a tale risposta? È possibile collegarla a una delle diverse definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte?

8 Un tiratore spara ripetutamente a un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità $\geq 0{,}99$ di colpirlo almeno una volta?

9 Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10 Tenuto conto che:

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

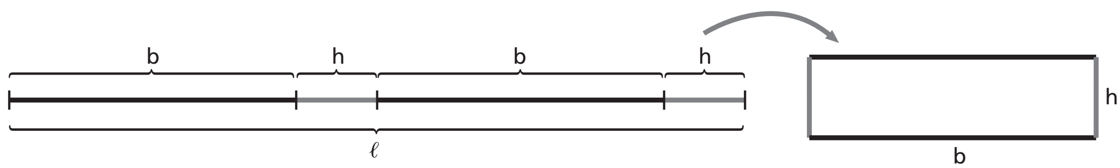
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Poiché la lunghezza del filo rappresenta il perimetro del rettangolo che delimita l'aiuola, detti b, h rispettivamente la base e l'altezza di tale rettangolo (figura 1), vale:

$$b+h=\frac{l}{2}.$$

▼ **Figura 1.**



Scelta b come incognita, si ha $h=\frac{l}{2}-b$, quindi la funzione area da massimizzare risulta la seguente:

$$\mathcal{A}(b)=b\cdot\left(\frac{l}{2}-b\right)=-b^2+\frac{l}{2}b,\qquad b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[.$$

Il grafico di $\mathcal{A}(b)$ è una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice di ascissa $\frac{l}{4}$. Quindi il massimo della funzione è l'ordinata del vertice, cioè:

$$\max_{b\in\left]0;\frac{l}{2}\right[}\mathcal{A}(b)=\mathcal{A}\left(\frac{l}{4}\right)=\frac{l^2}{16}.$$

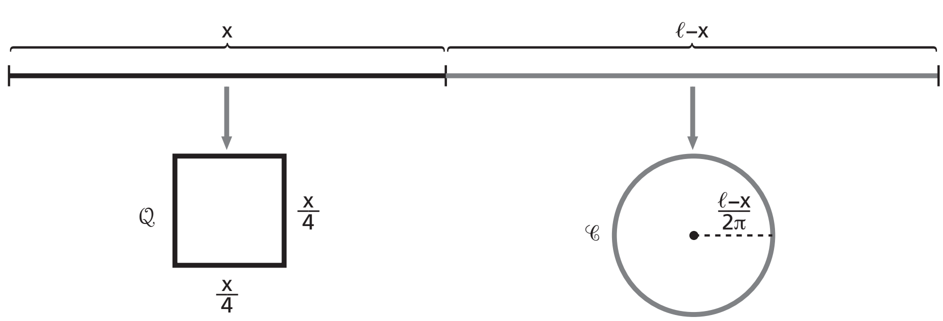
Si tratta del caso in cui l'aiuola ha la forma di un quadrato di lato $\frac{l}{4}$.

b) Si indica con x la parte del filo che si usa per delimitare l'aiuola di forma quadrata. La lunghezza del lato del quadrato $\mathcal{Q}$ è dunque $\frac{x}{4}$.

Di conseguenza, la lunghezza della circonferenza che delimita l'aiuola $\mathcal{C}$ di forma circolare è $l-x$; si ricava quindi il raggio r:

$$2\pi r=l-x\quad\Rightarrow\quad r=\frac{l-x}{2\pi}.$$

▼ **Figura 2.**



Si è ora in grado di calcolare le due aree:

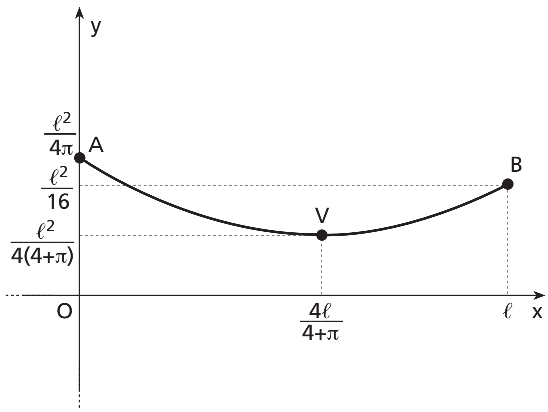
$$\text{area}(\mathcal{Q}) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16};$$

$$\text{area}(\mathcal{C}) = \pi\left(\frac{l-x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(l-x)^2}{4\pi}.$$

Sommando si ottiene la seguente funzione:

$$g(x) = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4\pi}\right)x^2 - \frac{l}{2\pi}x + \frac{l^2}{4\pi}, \qquad x \in [0; l].$$

Il grafico di g è un ramo di parabola compreso tra i punti $A(0;\, g(0))$ e $B(l;\, g(l))$, con la concavità rivolta verso l'alto (figura 3). Si osserva che i casi $x = 0$ e $x = l$ corrispondono entrambi all'utilizzo del filo intero (senza effettuare alcun taglio) per delimitare una sola aiuola di forma circolare ($x = 0$) o una sola aiuola di forma quadrata ($x = l$).



▶ **Figura 3.**

La funzione $g(x)$ è continua in un intervallo limitato e chiuso, quindi, per il teorema di Weierstrass, ammette massimo e minimo assoluti. Precisamente, detto V il vertice della parabola, il minimo di g è l'ordinata di V. Poiché $x_V = \frac{4l}{4+\pi}$, allora:

$$\min_{x \in [0;l]} g(x) = g\left(\frac{4l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}.$$

c) Il massimo di g viene assunto in uno degli estremi dell'intervallo di definizione. Osservando che:

$$\frac{l^2}{4\pi} = g(0) > g(l) = \frac{l^2}{16},$$

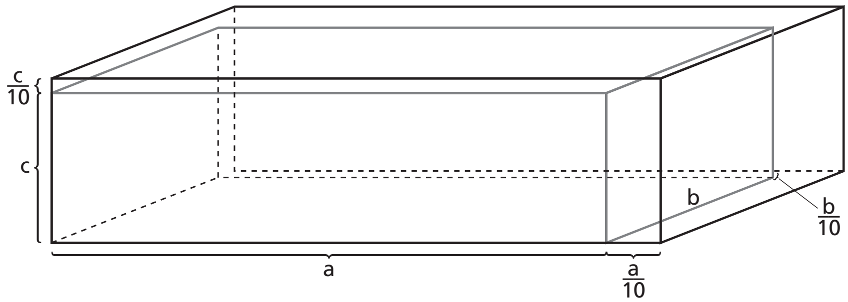
si conclude che $\max g(x) = \frac{l^2}{4\pi}$, cioè l'area massima si ottiene quando il filo non viene tagliato bensì utilizzato tutto per delimitare un'unica aiuola di forma circolare.

Si consideri ora un parallelepipedo a base rettangolare di dimensioni a, b, c. Il suo volume è:

$$V_1 = abc.$$

Incrementando del 10% ciascuna dimensione (figura 4), si ottiene un nuovo parallelepipedo di volume:

$$V_2 = \left(1 + \frac{10}{100}\right)a \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)b \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)c = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^3 abc = \left(\frac{11}{10}\right)^3 abc.$$



◀ **Figura 4.**

La differenza tra i due volumi risulta essere:

$$V_2 - V_1 = \left[\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1\right] abc.$$

In termini percentuali, pertanto, si ottiene:

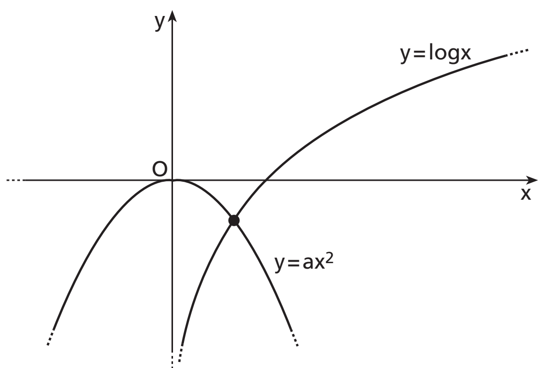
$$\left(\frac{11}{10}\right)^3 - 1 = \frac{1331}{1000} - 1 = \frac{331}{1000} = 33{,}1\%.$$

PROBLEMA 2

1. Primo metodo

Si discute l'equazione $\log x = ax^2$ con metodo grafico ponendo $y = \log x$ e $y = ax^2$ e determinando gli eventuali punti di intersezione tra i grafici delle due funzioni, al variare di a.

- $\boldsymbol{a < 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso il basso (figura 5).



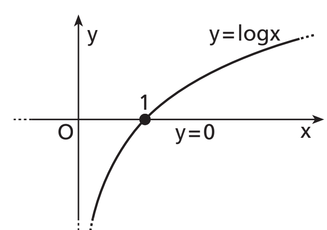
◀ **Figura 5.**

Si ha sempre un solo punto di intersezione.

- $\boldsymbol{a = 0}$. La funzione $y = ax^2$ diventa $y = 0$.

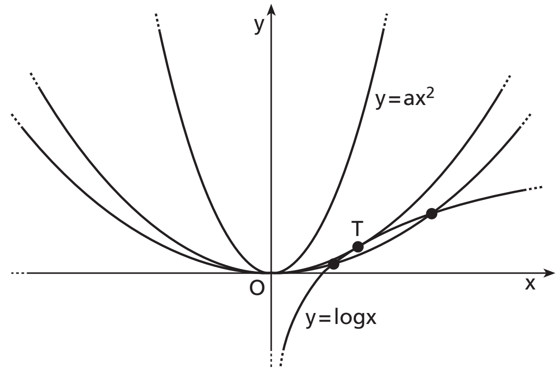
  In questo caso (figura 6) il punto di intersezione ha coordinate $(1; 0)$ e la soluzione dell'equazione è quindi $x = 1$.

▼ **Figura 6.**



- $\boldsymbol{a > 0}$. La funzione $y = ax^2$ è rappresentata da una parabola con il vertice nell'origine e con la concavità rivolta verso l'alto.

Ci sono tre possibilità al variare di a (figura 7):
- abbiamo parabole che intersecano il grafico di $y = \log x$ in due punti distinti;
- esiste una parabola tangente;
- ci sono parabole che non intersecano mai il grafico di $y = \log x$.



▶ **Figura 7.**

Determiniamo la parabola tangente. Risulta:

$$\begin{cases} ax^2 = \log x & \text{le due curve devono intersecarsi} \\ \mathrm{D}(ax^2) = \mathrm{D}(\log x) & \text{le due curve devono avere la stessa tangente nel punto comune} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} ax^2 = \log x \\ 2ax = \dfrac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax^2 = \log x \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log x = \dfrac{1}{2} \\ ax^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{e} \\ a = \dfrac{1}{2e} \end{cases}.$$

La parabola tangente ha quindi equazione $y = \dfrac{1}{2e}x^2$ e il punto di tangenza T ha coordinate $\left(\sqrt{e}; \dfrac{1}{2}\right)$.

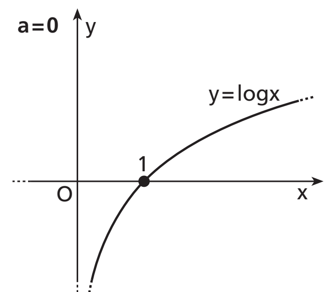
Riassumendo la discussione dell'equazione $\log x = ax^2$, risulta:

- per $a \leq 0$, 1 soluzione;
- per $0 < a < \sqrt{e}$, 2 soluzioni distinte;
- per $a = \sqrt{e}$, 2 soluzioni coincidenti;
- per $a > \sqrt{e}$, nessuna soluzione.

Secondo metodo

Le eventuali soluzioni dell'equazione $\log x = ax^2$ sono gli zeri della funzione $h(x) = \log x - ax^2$ al variare di $a \in \mathbb{R}$, che risulta continua nel suo campo di esistenza $D =]0; +\infty[$.

Osserviamo che per $a = 0$ si ottiene la nota funzione logaritmica che ha un unico zero in $x = 1$ (figura 8).



▲ **Figura 8.**

Sia ora $a \neq 0$ e studiamo l'andamento della funzione agli estremi del campo di esistenza.

Vale:

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \quad \text{per ogni valore di } a,$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } a < 0 \\ -\infty & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

Trattiamo allora separatamente i casi $a<0$ e $a>0$.

- $\boldsymbol{a<0}$**.** Dallo studio dei limiti effettuato, deduciamo che esistono $x_1, x_2 \in D$ tali che $f(x_1)<0$ e $f(x_2)>0$. Per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto nell'intervallo $]x_1; x_2[$ in cui la funzione si annulla. D'altra parte, risulta:

$$h'(x)=\frac{1}{x}-2ax>0 \qquad \text{per } x\in D,$$

quindi la funzione è strettamente crescente. Pertanto anche nel caso $a<0$ l'equazione $\log x = ax^2$ ha un'unica soluzione.

- $\boldsymbol{a>0}$**.** In questo caso i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi. Studiamo il segno della derivata prima $h'(x)=\dfrac{1-2ax^2}{x}$ in D. Risulta:

$$h'(x)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}1-2ax^2\geq 0\\ x>0\end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad 0<x\leq\sqrt{\frac{1}{2a}}\,.$$

Poiché il massimo della funzione è assunto in $x=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$, l'esistenza degli zeri di h dipende dal segno di tale massimo. Calcoliamo l'immagine:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=\log\sqrt{\frac{1}{2a}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(\log 2a+1).$$

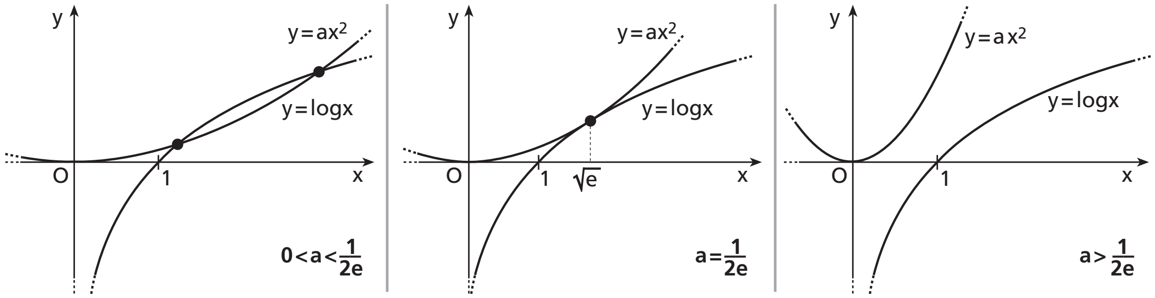
Studiamo la disequazione:

$$h\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log 2a+1\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\leq\frac{1}{2e}.$$

In conclusione:

- $0<a<\dfrac{1}{2e}$: il massimo di h è positivo, i limiti agli estremi del campo di esistenza sono entrambi negativi, ed esiste un solo punto critico; quindi la funzione $h(x)$ ammette due zeri;
- $a=\dfrac{1}{2e}$: il massimo di h è zero ed esiste un solo punto critico, pertanto l'ascissa di tale massimo è l'unica soluzione dell'equazione assegnata dal problema;
- $a>\dfrac{1}{2e}$: poiché $\max h<0$, non esistono soluzioni di $h(x)=0$.

Gli zeri dell'equazione $\log x = ax^2$ possono essere interpretati graficamente come le ascisse dei punti di intersezione tra i grafici di $f(x)$ e $g(x)$, come mostra la figura 9.



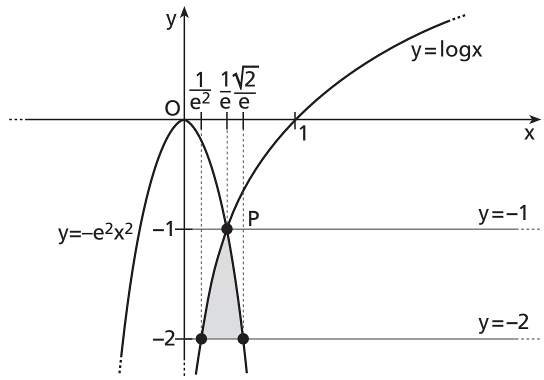
▲ **Figura 9.**

I grafici di f e g sono tangenti solo per $a=\dfrac{1}{2e}$. Infatti le due curve sono tangenti se e solo se si intersecano e hanno la stessa retta tangente nel punto di intersezione. Algebricamente, questo equivale a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} g(x)=f(x) \\ g'(x)=f'(x) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} ax^2=\log x \\ ax^2=\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log x=\dfrac{1}{2} \\ ax^2=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Questo sistema è soddisfatto se e solo se $x=\sqrt{e}$ e $a=\dfrac{1}{2e}$.

2. La funzione g assume in questo caso la forma $g(x)=-e^2x^2$. Per quanto visto nel punto precedente, sappiamo che i grafici di f e g hanno un punto in comune, che in tal caso è proprio il punto $P(e^{-1};-1)$.
Considerando le intersezioni tra la retta $y=-2$ e i grafici delle funzioni g e f, si ottengono rispettivamente i punti di ascissa e^{-2} e $\sqrt{2}e^{-1}$. Per determinare l'area $\mathscr{A}$ evidenziata in figura 10, occorre dunque suddividere il dominio di integrazione nei due intervalli $[e^{-2}; e^{-1}]$ e $[e^{-1}; \sqrt{2}e^{-1}]$.



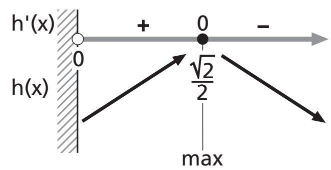
▲ Figura 10.

$$\mathscr{A}=\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}(\log x+2)\,dx+\int_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}}(-e^2x^2+2)\,dx=$$

$$=[x\log x]_{e^{-2}}^{e^{-1}}+\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}x\cdot\frac{1}{x}\,dx+[2x]_{e^{-2}}^{e^{-1}}+\left[-e^2\frac{x^3}{3}+2x\right]_{e^{-1}}^{\sqrt{2}e^{-1}}=$$

$$=e^{-2}+\frac{4\sqrt{2}-5}{3}e^{-1}.$$

3. Scegliamo $a=1$ e studiamo la funzione $h(x)=\log x-x^2$. Per quanto visto nei punti precedenti:
- il campo di esistenza è $D=]0;+\infty[$;
- non esistono intersezioni con gli assi cartesiani e la funzione è sempre negativa perché il massimo è negativo;
- i limiti agli estremi di D sono entrambi $-\infty$;
- $f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{x}$, la funzione è crescente in $\left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$, decrescente in $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2};+\infty\right[$ e $\max\limits_{x\in D} h(x)=h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$, come riassunto nella figura 11.



▲ Figura 11.

Osserviamo che non vi sono asintoti obliqui perché $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=-\infty$.

Rimane ora da studiare la derivata seconda:

$$h''(x)=\frac{-4x\cdot x-(1-2x^2)}{x^2}=\frac{-2x^2-1}{x^2}.$$

Risulta quindi:

$$h''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -(2x^2+1) \geq 0$$

e questa disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto la derivata seconda è sempre negativa e la funzione ha la concavità rivolta verso il basso in tutto il campo di esistenza. Il grafico della funzione è riportato nella figura 12.

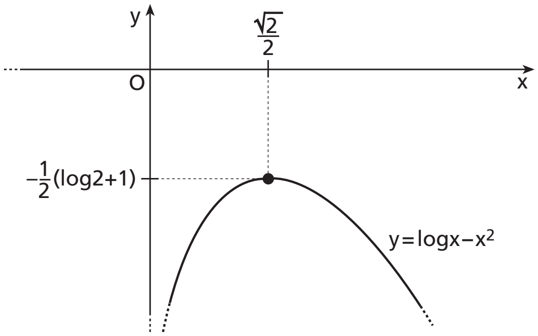


Figura 12.

QUESTIONARIO

1 Si tratta di calcolare la somma dei primi 64 termini della progressione geometrica $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$, con ragione $q = 2$. Poiché la somma vale:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q},$$

risulta:

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 \simeq 1{,}84 \cdot 10^{19},$$

dove s_{64} rappresenta il numero dei chicchi.
Si calcola il peso m, tenendo conto che 1000 chicchi pesano circa 38 g.

$$m \simeq 1{,}84 \cdot 10^{16} \cdot 38\,\text{g} = 69{,}92 \cdot 10^{16}\,\text{g} = 69{,}92 \cdot 10^{10}\,\text{t}.$$

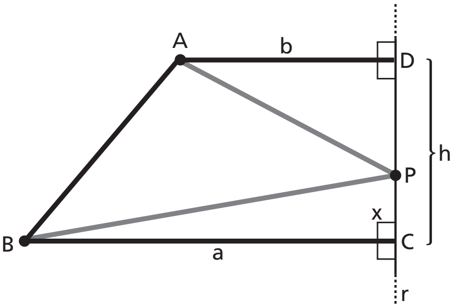
2 Un poliedro si dice regolare quando le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi angoloidi sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo angoloide devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Inoltre, per un noto teorema di geometria solida, in ogni angoloide la somma degli angoli delle facce è minore strettamente di 360°. Se le facce del poliedro sono triangoli equilateri, l'angolo di ogni faccia è di 60°, quindi si possono avere angoloidi di tre facce (si ottiene il tetraedo), di quattro facce (si ottiene l'ottaedro), di cinque facce (si ottiene l'icosaedro) ma non di più, perché la loro somma sarebbe maggiore o uguale a 360° e ciò è impossibile per il suddetto teorema. Se le facce del poliedro regolare sono quadrati, l'angolo di ogni faccia è di 90°, quindi si può avere solo l'angoloide di tre facce (si ottiene il cubo). Se le facce del poliedro regolare sono pentagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 108°, quindi si può avere l'angoloide di tre facce (si ottiene il dodecaedro) ma non di più. Se le facce del poligono regolare sono esagoni regolari, l'angolo di ogni faccia è di 120° quindi non si possono avere poliedri relativi perché la somma degli angoli di tre facce è 360° il che è impossibile. Analogamente non è possibile costruire poliedri regolari aventi per facce poligoni regolari con più di sei lati.

3 Siano a e b le distanze di A e B dalla retta r e h la distanza tra le loro proiezioni D e C su r (figura 13).
Si considera il caso in cui il punto P sia interno al segmento $\overline{CD}$.
Posto $x = \overline{PC}$, con $0 \leq x \leq h$, risulta:

$$\overline{BP} = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$\overline{PD} = h - x,$$

$$\overline{AP} = \sqrt{b^2 + (h - x)^2} = \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}.$$



▲ **Figura 13.**

È necessario minimizzare la funzione $f(x) = \overline{BP} + \overline{AP}$, ovvero:

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}, \qquad 0 \leq x \leq h.$$

Si studia il segno della derivata prima f':

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - h}{\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}}.$$

Posto $f'(x) > 0$:

$$\frac{x\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2} + (x - h)\sqrt{x^2 + a^2}}{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot \sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2}} > 0,$$

segue che:

$$x\sqrt{x^2 - 2hx + b^2 + h^2} > (h - x)\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Si eleva al quadrato tenendo conto che $0 \leq x < h$:

$$x^2(x^2 - 2hx + b^2 + h^2) > (h^2 + x^2 - 2hx)(a^2 + x^2)$$

$$x^4 - 2hx^3 + b^2x^2 + h^2x^2 > a^2h^2 + h^2x^2 + a^2x^2 + x^4 - 2a^2hx - 2hx^3$$

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2hx + a^2h^2 < 0 \rightarrow$$

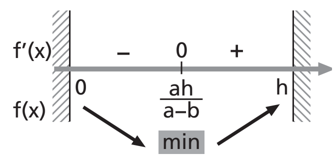
$$\rightarrow \frac{ah}{a + b} < x < \frac{ah}{a - b}.$$

Poiché $0 \leq x \leq h$ e $\frac{ah}{a - b}$ è maggiore di h, si ottiene la seguente tabella del segno di $f'(x)$ (figura 14).
Si conclude che la funzione f ha un minimo per $x = \frac{ah}{a + b}$.

Qualora si prenda il punto P esterno al segmento CD, posto $x = \overline{PC}$, si trova che la funzione $g(x)$ da minimizzare è maggiore o uguale a $f(x)$, cioè $g(x) \geq f(x)$.

Pertanto il minimo m del cammino rimane per $x = \frac{ah}{a + b}$ e sostituendo nella funzione f si trova:

$$m = f\left(\frac{ah}{a + b}\right) = \sqrt{(a + b)^2 + h^2}.$$



▲ **Figura 14.**

4 Definita la funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - x + 1$, questa è derivabile e quindi continua su $\mathbb{R}$; la sua derivata prima vale:

$$f'(x) = \cos x - 1.$$

Scelto l'intervallo $I = [1;\, 2]$, risulta che:

$f(1) \simeq 0{,}841 > 0$ e $f(2) \simeq -0{,}090 < 0$.

Pertanto, per il teorema degli zeri, esiste almeno un punto α tale che $f(\alpha) = 0$. Inoltre, poiché:

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in]1;\, 2[,$$

il punto α è unico. Per stimare il valore di α si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione e si ottiene la seguente tabella.

a	$f(a)$	b	$f(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$
1	0,841	2	− 0,090	1,5	0,497
1,5	0,497	2	− 0,090	1,75	0,234
1,75	0,234	2	− 0,090	1,875	0,079
1,875	0,079	2	− 0,090	1,938	− 0,005

Si può proseguire così fino alla precisione voluta (la soluzione alla quarta cifra decimale è $\alpha \simeq 1{,}9346$).

5 Lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio si può ottenere con la formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

La somma dei coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del binomio si ottiene ponendo $a = 1$ e $b = 1$:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}.$$

Si ha quindi:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

6 Per $k = 0$ l'equazione diventa $2 = 0$ che è impossibile; si può quindi dividere per $k \neq 0$ e diventa:

$$\cos 2x = \frac{5k-2}{k},$$

che (con le limitazioni espresse in radianti) equivale al sistema:

$$\begin{cases} y = \cos 2x \\ y = \dfrac{5k-2}{k} \\ \dfrac{\pi}{12} < x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

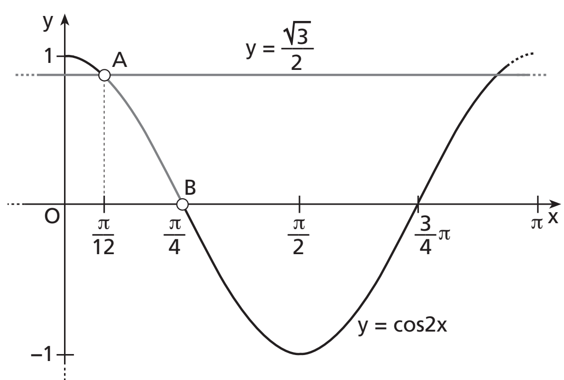


Figura 15.

Risolviamo il sistema graficamente (figura 15).
Si trova:

$$y_A = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5k-2}{k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4(\sqrt{3}+10)}{97};$$

$$y_B = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{5}.$$

Pertanto l'equazione ammette una sola soluzione per:

$$\frac{2}{5} < k < \frac{4(\sqrt{3}+10)}{97}.$$

7 Tra le varie definizioni di probabilità che sono state storicamente proposte vi è quella soggettiva che si usa per gli eventi per i quali non è possibile calcolare teoricamente il numero dei casi favorevoli e possibili e non si può sottoporre l'evento a prove sperimentali ripetute nelle stesse condizioni. Essa viene applicata in vari casi reali, ad esempio se si vuole stimare la probabilità di vittoria di una squadra di calcio a un torneo. La valutazione soggettiva porta a considerare il calcolo della probabilità come a una scommessa; essa è definita come la misura del grado di fiducia che una persona attribuisce al verificarsi di un evento E secondo la sua opinione. Il valore si ottiene effettuando il rapporto tra la somma P che si è disposti a pagare in una scommessa e la somma V che si riceverà nel caso in cui l'evento si verifichi: $p(E) = \frac{P}{V}$.

Bruno De Finetti è il matematico italiano che ha fissato i fondamenti della concezione soggettiva della probabilità; affermando che la probabilità non esiste intendeva forse dire che non esiste in modo oggettivo, cioè uguale per tutti, poiché, come già detto, in varie situazioni è possibile esprimere solo valutazioni soggettive e quindi personali sul verificarsi di un evento.

8 La probabilità di colpire il bersaglio è $p = 0,3$ e di mancarlo è $q = 1 - p = 0,7$. La probabilità di non colpirlo mai in n tiri è $q^n = (0,7)^n$, perciò quella di colpire almeno una volta in n tiri è la probabilità contraria $1-(0,7)^n$. Si tratta ora di determinare il minimo intero n tale che:

$$1-(0,7)^n \geq 0,99 \quad \Leftrightarrow \quad (0,7)^n \leq 0,01.$$

Passando ai logaritmi si trova:

$$\log(0,7)^n \leq \log(0,01) \quad \Leftrightarrow \quad n\log(0,7) \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{2}{\log(0,7)} \simeq 12,9.$$

Quindi il tiratore deve compiere 13 tiri per colpire il bersaglio almeno una volta.

9 Una funzione reale f, diversa da zero in ogni punto del suo campo di esistenza, che soddisfa la condizione $f'(x) = f(x)$ è la funzione esponenziale $f(x) = ke^x$, con k reale. Imponendo la condizione $f(0) = 1$, risulta: $k = 1$ e $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
Qualora si abbiano competenze sulle equazioni differenziali, si può risolvere il problema considerando l'equazione $\frac{dy}{dx} = y$.
Separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{y} = dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln|y| = x + c \quad \Leftrightarrow \quad y = ke^x \text{ con } k \text{ reale.}$$

Imponendo la condizione $y(0) = 1$, risulta $y = e^x$.

10 Per il calcolo approssimato di π si può utilizzare il metodo dei rettangoli.
Dividendo l'intervallo [0; 1] in $n = 5$ parti uguali, si ottiene:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq 4 \cdot \frac{1-0}{5}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)\right] =$$

$$= \frac{4}{5}\left[1 + \frac{25}{26} + \frac{25}{29} + \frac{25}{34} + \frac{25}{41}\right]$$

ovvero $\pi \simeq 3,35$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.