# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2006
## Sessione straordinaria

**Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.**

### PROBLEMA 1

È dato il triangolo $ABC$ in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \ \overline{AC} = 5\sqrt{5}, \ \text{tg}\,\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato $AB$ e tracciare la circonferenza $k$ avente centro in $C$ e tangente al lato $AB$.

Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta $AB$:

a) scrivere l'equazione della circonferenza $k$;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto $D$ in cui la circonferenza $k$ interseca il segmento $BC$;

c) determinare l'equazione della parabola $p$, avente l'asse perpendicolare alla retta $AB$, tangente in $D$ alla circonferenza $k$ e passante per $A$;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola $p$ divide il triangolo $ABC$;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza $k$ e alla parabola $p$.

### PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile $x$, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali ($Oxy$), sono simmetrici rispetto all'origine $O$ e hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$.

a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

c) Indicare con $\gamma$ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse $x$ e disegnarne l'andamento.

d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da $\gamma$ e chiamati $u$ e $v$ ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da $O$, in cui $\gamma$ interseca l'asse $x$, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx.$$

e) Dopo aver controllato che $\gamma$ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca $\gamma$.

## QUESTIONARIO

**1** È assegnato un pentagono regolare di lato lungo $L$. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).

**2** Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

**3** Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{g(x)}{f(x)}$ quando $x \to a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

**4** Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$ è:

**A** 0. **B** un valore finito diverso da 0. **C** $+\infty$. **D** $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

**5** Il limite della funzione $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, per $x \to 0$, è uguale a 1. Si chiede di calcolarlo senza ricorrere alla regola di De L'Hôpital.

**6** Si ricorda la seguente definizione: «Considerata una funzione reale di variabile reale, definita in un intervallo $I$, ogni funzione, derivabile in $I$ e tale che $F'(x) = f(x)$, si dice primitiva di $f(x)$ in $I$». Stabilire se la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \le x \le 2 \\ 2 & \text{se } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

ammette primitiva nell'intervallo [1; 3].

**7** Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z; z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo $z$ un numero intero.

**8** Descrivere un algoritmo idoneo a calcolare un valore approssimato, a meno di $10^{-3}$, della soluzione reale della precedente equazione.

**9** Si considerino le seguenti equazioni:

$$x' = ax - (a-1)y + 1, \qquad y' = 2ax + (a-1)y + 2,$$

dove $a$ è un parametro reale.
Determinare i valori di $a$ per cui le equazioni rappresentano:
1) un'affinità,
2) un'affinità equivalente (si ricorda che un'affinità si dice *equivalente* se conserva le aree).

**10** Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine ci sono due «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quanto vale la probabilità che la delegazione comprenda «Antonio» e almeno una «Maria»?

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## PROBLEMA 1

Rappresentiamo in scala il triangolo $ABC$ tenendo conto che

$$\overline{AB} = \frac{25}{2}, \ \overline{AC} = 5\sqrt{5} \text{ e } \operatorname{tg}\hat{A} = 2 \rightarrow \hat{A} \simeq 63°.$$

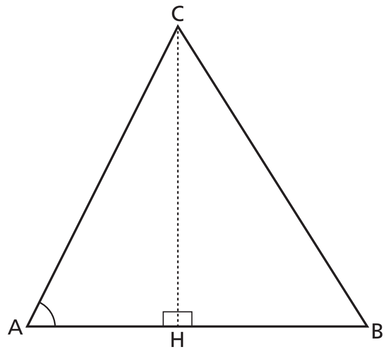
Considerato $\operatorname{tg}\hat{A}$, calcoliamo le altre funzioni goniometriche:

$$\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{\operatorname{tg}\hat{A}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}} \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos\hat{A} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\hat{A}}} \quad \rightarrow \quad \cos\hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

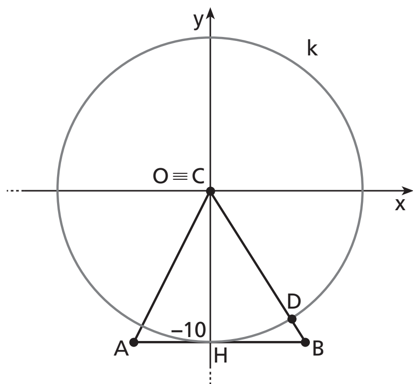
L'altezza $CH$ misura $\overline{CH} = \overline{AC} \cdot \operatorname{sen}\hat{A}$ pertanto:

$$\overline{CH} = 5\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10.$$




▲ **Figura 1.**

Disegniamo la circonferenza $k$ e scegliamo un sistema di riferimento con origine nel centro $C$ della circonferenza e assi come in figura 2.




▲ **Figura 2.**

**a)** L'equazione di una circonferenza di raggio $r$ e centro $C(0; 0)$ è del tipo $x^2 + y^2 = r^2$. Nel nostro caso $r = \overline{CH} = 10$, quindi la circonferenza $k$ ha equazione:

$$x^2 + y^2 = 100.$$

**b)** Poiché $\overline{AH} = \overline{AC} \cdot \cos\hat{A} = 5\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = 5$ e

$$\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{AH} = \frac{25}{2} - 5 = \frac{15}{2}, \text{ ne segue che:}$$

$$A(-5; -10),\ B\left(\frac{15}{2}; -10\right),\ C(0; 0).$$

Per determinare le coordinate di $D$ calcoliamo l'equazione della retta $CB$. Tale equazione è del tipo $y = mx$, dove $m = \frac{y_B}{x_B} = -\frac{4}{3}$. Quindi $CB$ ha equazione $y = -\frac{4}{3}x$. Cerchiamo ora i punti di intersezione tra $CB$ e la circonferenza $k$ (per $x > 0$) considerando il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{4}{3}x \\ \frac{25}{9}x^2 = 100 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = -8 \end{cases}$$

Ne segue che $D(6; -8)$.

**c)** La parabola $p$ ha equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a$, $b$, $c$ coefficienti reali e $a \neq 0$. La tangente a tale parabola nel punto $D$ ha come coefficiente angolare $f'(6)$, dove $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pertanto vale:

$$f'(x) = 2ax + b, \text{ quindi } f'(6) = 12a + b.$$

Poiché la retta $CB$ è perpendicolare alla tangente in $D$ e ha coefficiente angolare uguale a $-\dfrac{4}{3}$, allora il coefficiente angolare della retta tangente in $D$ è $\dfrac{3}{4}$.

Deve quindi valere la condizione $12a + b = \dfrac{3}{4}$, cioè $48a + 4b = 3$. Mettiamo tale equazione a sistema con le equazioni che si ottengono sostituendo all'equazione della parabola le coordinate dei punti $A$ e $D$:

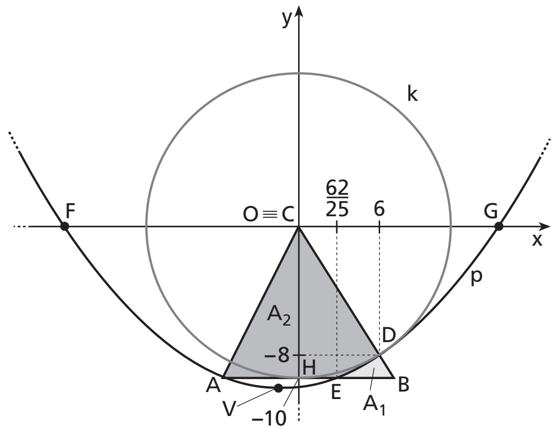
$$\begin{cases} 36a + 6b + c = -8 \\ 25a - 5b + c = -10 \\ 48a + 4b = 3 \end{cases}$$

Risolvendo tale sistema si ottiene:

$$a = \frac{25}{484},\ b = \frac{63}{484},\ c = -\frac{2575}{242}.$$

L'equazione della parabola $p$ è perciò:

$$y = \frac{25x^2 + 63x - 5150}{484}.$$




▲ **Figura 3.**

**d)** Rappresentiamo nel sistema cartesiano precedente la parabola $p$ che ha vertice $V\left(-\dfrac{63}{50}; -\dfrac{4289}{400}\right)$ e che interseca l'asse $x$ nei punti $G\left(\dfrac{-63 + 11\sqrt{4289}}{50}; 0\right)$ e $F\left(\dfrac{-63 - 11\sqrt{4289}}{50}; 0\right)$.

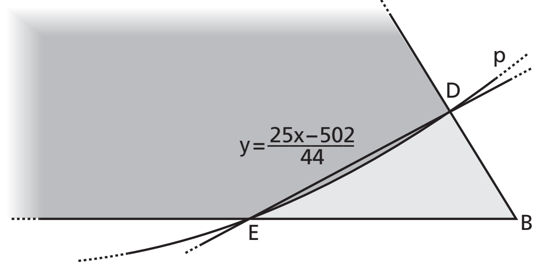
Evidenziamo le regioni in cui la parabola $p$ divide il triangolo $ABC$ (figura 3).

Determiniamo l'ascissa del punto $E$, intersezione tra il segmento $AB$ e la parabola, ponendo $y = -10$ nell'equazione di $p$:

$$\frac{25x^2 + 63x - 5150}{484} = -10 \quad \rightarrow \quad 25x^2 + 63x - 310 = 0.$$

Tale equazione ha come soluzioni $x = -5$ e $x = \dfrac{62}{25}$. Il primo valore è l'ascissa del punto $A$, mentre il secondo valore è l'ascissa di $E$, che, quindi, ha coordinate $E\left(\dfrac{62}{25}; -10\right)$.

Determiniamo ora l'area del segmento parabolico delimitato dal segmento $DE$, che ha equazione $y = \dfrac{25x - 502}{44}$, e la parabola $p$ (in figura 4 è rappresentata la regione ingrandita).




▲ **Figura 4.**

Calcoliamo il seguente integrale:

$$\int_{\frac{62}{25}}^{6}\left(\frac{25x-502}{44}-\frac{25x^2+63x-5150}{484}\right)dx=\int_{\frac{62}{25}}^{6}\frac{-25x^2+212x-372}{484}\,dx=$$

$$=\frac{1}{484}\left[-\frac{25}{3}x^3+106x^2-372x\right]_{\frac{62}{25}}^{6}=\frac{704}{1875}.$$

Il triangolo $EDB$ ha altezza rispetto alla base $EB$ che misura 2 e base lunga $\overline{EB}=\frac{251}{50}$. L'area del triangolo $EDB$ vale quindi:

$$A_{EDB}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{251}{50}=\frac{251}{50}.$$

Se a tale area sottraiamo l'area del segmento parabolico precedentemente trovata, otteniamo l'area della regione di piano delimitata dai segmenti $EB$, $DB$ e dall'arco di parabola $ED$, pertanto:

$$A_1=\frac{251}{50}-\frac{704}{1875}=\frac{17\,417}{3750}.$$

L'area del triangolo $ABC$ vale invece $\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CH}=\frac{125}{2}$. Ne segue che l'area della regione di piano delimitata dai segmenti $AE$, $CD$, $AC$ e dall'arco di parabola $ED$ vale:

$$A_2=A_{ABC}-A_1=\frac{125}{2}-\frac{17\,417}{3750}=\frac{108\,479}{1875}.$$

**e)** Le coordinate dei punti comuni alla circonferenza $k$ e alla parabola $p$ sono tutte le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{25x^2+63x-5150}{484}\\ x^2+y^2=100\end{cases}$$

Sostituendo l'espressione di $y$ nella seconda equazione si ottiene:

$$x^2+\left(\frac{25x^2+63x-5150}{484}\right)^2=100\ \rightarrow\ 25x^4+126x^3-771x^2-25\,956x+123\,876=0.$$

Sappiamo che $D$ è un punto comune alle due curve. In particolare esse hanno la stessa retta tangente in $D$. L'ascissa di tale punto è quindi una soluzione doppia di tale equazione. Scomponendo il primo membro dell'equazione otteniamo:

$$(x-6)^2(25x^2+426x+3441)=0$$

Poiché il discriminante dell'equazione $25x^2+426x+3441=0$ è negativo, si può concludere che la circonferenza $k$ e la parabola $p$ hanno in comune solo il punto $D$.

## PROBLEMA 2

**a)** Affinché il grafico di una funzione $f(x)$ sia simmetrico rispetto all'origine, la funzione deve essere dispari, cioè tale che $f(-x)=-f(x)$. Le uniche funzioni polinomiali dispari di grado 5 sono del tipo:

$f(x)=ax^5+bx^3+cx$, con $a$, $b$, $c$ coefficienti reali e $a\neq 0$.

Il grafico di tale funzione passa per il punto $\left(-2;\frac{64}{15}\right)$ se $f(-2)=\frac{64}{15}$, cioè se vale:

$$-32a-8b-2c=\frac{64}{15}\ \rightarrow\ 240a+60b+15c=-32.$$

Tale punto è anche un estremo relativo se $f'(-2)=0$. Poiché $f'(x)=5ax^4+3bx^2+c$, si ha che $f'(-2)=80a+12b+c$. Deve quindi valere $80a+12b+c=0$.
Mettendo a sistema tali condizioni, si ottiene:

$$\begin{cases} 80a+12b+c=0 \\ 240a+60b+15c=-32 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=-80a-12b \\ 120a+15b-4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{4-120a}{15} \\ c=\dfrac{80a-16}{5} \end{cases}$$

Inoltre, il punto $\left(-2; \dfrac{64}{15}\right)$ è in particolare un massimo relativo se $f''(-2)<0$. Poiché $f''(x)=20ax^3+6bx$, si ha che $f''(-2)=-160a-12b$. Sostituendo l'espressione di $b$ trovata in funzione di $a$ si ottiene $f''(-2)=-\dfrac{16}{5}(20a+1)$. Perciò $f''(-2)<0$ solo se $a>-\dfrac{1}{20}$.

L'equazione dei grafici considerati è in conclusione la seguente:

$$y=ax^5+\frac{4-120a}{15}x^3+\frac{80a-16}{5}x, \text{ con } a\in\left]-\frac{1}{20};\,0\right[\cup\,]0;+\infty[.$$

**b)** Riscriviamo l'equazione della curva mettendo in evidenza il parametro $a$:

$$a(x^5-8x^3+16x)+\frac{4}{15}x^3-\frac{16}{5}x-y=0.$$

Per determinare i punti comuni alle curve consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^5-8x^3+16x=0 \\ \dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{16}{5}x-y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x^2-4)^2=0 \\ y=\dfrac{4}{15}x^3-\dfrac{16}{5}x \end{cases}$$

Le soluzioni della prima equazione sono $x=0 \vee x=\pm 2$, in corrispondenza delle quali troviamo i tre punti $(0;\,0)$, $\left(2; -\dfrac{64}{15}\right)$, $\left(-2; \dfrac{64}{15}\right)$.

Il coefficiente angolare della tangente alla curva in un punto di ascissa $x$ è:

$$f'(x)=5ax^4+\frac{4-120a}{5}x^2+\frac{80a-16}{5}.$$

Poiché $f'(2)=f'(-2)=0$, i punti comuni alle curve di ascissa $x=2$ e $x=-2$ hanno tutti, rispettivamente, le rette $y=-\dfrac{64}{15}$ e $y=\dfrac{64}{15}$ come tangenti.

**c)** Il punto di ascissa $x=c$ è un punto di flesso con tangente inflessionale l'asse $x$ se:

- $f''(c)=0$, poiché $c$ è un punto di flesso;
- $f(c)=0$, poiché il punto di ascissa $c$ deve appartenere all'asse $x$;
- $f'(c)=0$, poiché il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa $c$ vale 0.

Osserviamo che $f''(c)=20\,ax^3+\dfrac{2}{5}(4-120\,a)\,x$. In particolare $f''(0)=f(0)=0$. Se, quindi, imponiamo $f'(0)=0$, si può concludere che in $(0;\,0)$ vi è un flesso con tangente l'asse $x$:

$$f'(0)=0 \;\rightarrow\; \frac{80a-16}{5}=0 \;\rightarrow\; a=\frac{1}{5}.$$

La curva $\gamma$ è dunque quella che si ottiene per $a = \frac{1}{5}$, cioè:

$$\gamma\colon y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3.$$

Il campo di esistenza di tale funzione è l'asse reale. La funzione è dispari, interseca gli assi cartesiani nei punti (0; 0), $\left(\pm\frac{2}{3}\sqrt{15};\, 0\right)$ e è positiva solo se $x \in \left]-\frac{2}{3}\sqrt{5};\, 0\right[ \cup \left]\frac{2}{3}\sqrt{5};\, +\infty\right[$. Inoltre vale:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3\right) = \lim_{x\to\pm\infty} x^5\left(\frac{1}{5} - \frac{4}{3x^2}\right) = \pm\infty,$$

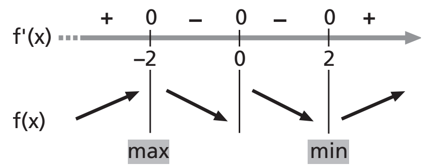
ma anche:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{3}x^2\right) = +\infty.$$

Pertanto non vi sono asintoti obliqui.
La derivata prima risulta:

$$f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4).$$

Essa si annulla in $x = 0$ e in $x = \pm 2$ e lo schema di figura 5 ne riassume il segno.



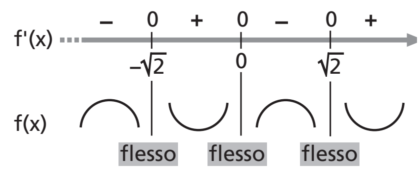

▲ **Figura 5.**

La funzione ammette quindi un minimo relativo per $x = 2$, che vale $f(2) = \frac{32}{5} - \frac{32}{3} = -\frac{64}{15}$, e un massimo relativo per $x = -2$, con $f(-2) = \frac{64}{15}$.

Studiamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2).$$

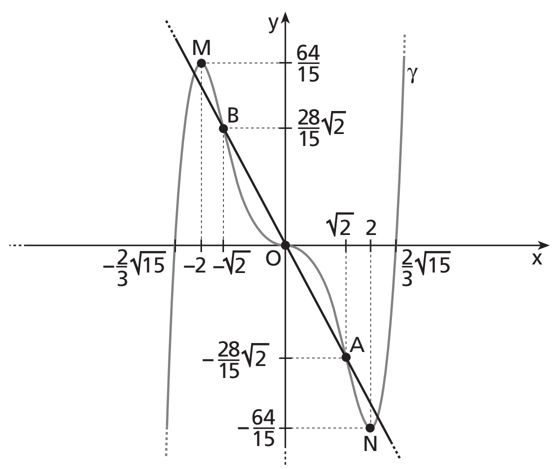
Essa si annulla in $x = 0$ e in $x = \pm\sqrt{2}$. In figura 6 è indicato lo schema del segno.




▲ **Figura 6.**

La funzione ha tre flessi nei punti di coordinate (0; 0), $\left(\sqrt{2};\, -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\, \frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$.

Nella figura 7 è rappresentato il grafico della curva $\gamma$.




▲ **Figura 7.**

**d)** Per considerazioni al punto precedente risulta $u = -\frac{2}{3}\sqrt{15}$ e $v = \frac{2}{3}\sqrt{15}$.

Essendo $P(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3$ un polinomio dispari e $u = -v$ allora possiamo concludere, senza necessità di calcoli, che $\int_u^v P(x)dx = 0$.

**e)** I tre flessi di $\gamma$ sono $O(0;\, 0)$, $A\left(\sqrt{2};\, -\frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$, $B\left(-\sqrt{2};\, \frac{28}{15}\sqrt{2}\right)$. La retta passante per $A$ e $B$ ha equazione $y = -\frac{28}{15}x$. Poiché tale retta passa per l'origine degli assi possiamo concludere che i tre punti sono allineati.

Troviamo ora le ascisse dei punti di intersezione tra tale retta e la curva $\gamma$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = -\dfrac{28}{15}x \\ y = \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{4}{3}x^3 \end{cases} \rightarrow -\frac{28}{15}x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \rightarrow 3x^5 - 20x^3 + 28x = 0 \rightarrow x(3x^4 - 20x^2 + 28) = 0.$$

Per la proprietà dell'annullamento del prodotto risulta:

$$x = 0 \vee 3x^4 - 20x^2 + 28 = 0.$$

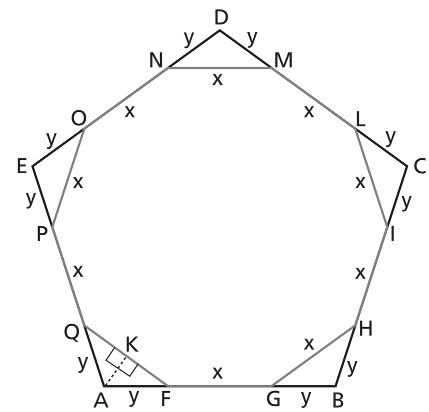
L'equazione biquadratica $3x^4 - 20x^2 + 28 = 0$ ha soluzioni $x = \pm\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ e $x = \pm\sqrt{2}$.

In conclusione, le ascisse dei punti in cui la retta passante per i flessi interseca $\gamma$ sono:

$$x = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{42}}{3} \text{ e } x = \pm\sqrt{2}.$$

## QUESTIONARIO

**1** Dato il pentagono regolare *ABCDE*, per ogni vertice si ricavino cinque triangoli isosceli congruenti, di base $x$ e lato obliquo $y$, in modo da ottenere un decagono regolare di lato $x$ (figura 8).



▲ **Figura 8.**

Si tracci l'altezza *AK* del triangolo isoscele *AFQ*. Poiché l'angolo al vertice di un poligono regolare di $n$ lati vale $\dfrac{n-2}{n}\pi$, nel caso di un pentagono ($n = 5$) risulta $\dfrac{3}{5}\pi$. Pertanto l'angolo alla base del triangolo isoscele *AFQ* vale $A\hat{F}K \dfrac{\pi - \frac{3}{5}\pi}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{5}\pi = \dfrac{\pi}{5}$.

Per la trigonometria, segue che $\dfrac{x}{2} = y\cos\dfrac{\pi}{5}$ e, quindi, $y = \dfrac{x}{2\cos\frac{\pi}{5}}$.

Inoltre risulta $L = 2y + x$. Sostituendo l'espressione di $y$, sopra trovata, si ottiene la seguente equazione in $x$ che risolviamo:

$$L = 2\frac{x}{2\cos\frac{\pi}{5}} + x \quad\rightarrow\quad x = \frac{\cos\frac{\pi}{5}}{1 + \cos\frac{\pi}{5}}L.$$

Il lato del decagono è lungo perciò $\dfrac{\cos\frac{\pi}{5}}{1 + \cos\frac{\pi}{5}}L$.

**2** È data una piramide quadrangolare di altezza doppia dello spigolo di base, nella quale è inscritto un cubo (figura 9).
Supposto di lunghezza $a$ lo spigolo di base, l'altezza è $\overline{VO} = 2a$ e il volume della piramide risulta:

$$V_1 = \frac{1}{3} A_{ABCD} \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = \frac{2}{3} a^3.$$

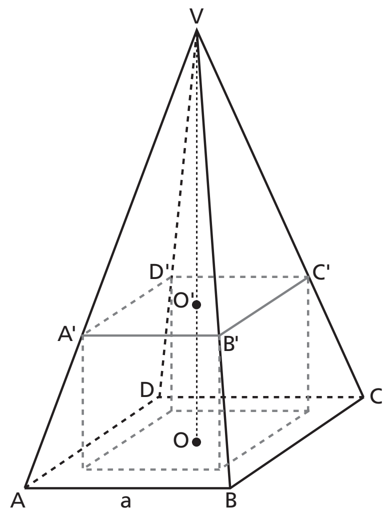
Determiniamo la lunghezza dello spigolo del cubo inscritto alla piramide. Sia $x = \overline{A'B'} = \overline{O'O}$, dove $O'$ è l'intersezione tra l'altezza $VO$ della piramide e la faccia $A'B'C'D'$ del cubo. Quindi $x \in ]0; a[$.
Poiché $A$, $B$, $O$, $V$ sono i corrispondenti di $A'$, $B'$, $O'$, $V$ in un'omotetia di centro $V$, vale:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{VO'}}{\overline{VO}}.$$

Ma $\overline{VO'} = \overline{VO} - \overline{O'O} = 2a - x$. Sostituendo, troviamo che:

$$\frac{x}{a} = \frac{2a - x}{2a} \rightarrow 2x = 2a - x \rightarrow 3x = 2a \rightarrow x = \frac{2}{3} a.$$

▼ **Figura 9.**




Quindi lo spigolo del cubo ha lunghezza $\frac{2}{3} a$. Ne segue che il volume del cubo vale:

$$V_2 = \left(\frac{2}{3} a\right)^3 = \frac{8}{27} a^3.$$

Il rapporto richiesto è perciò:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{8}{27} a^3}{\frac{2}{3} a^3} = \frac{8}{27} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4}{9}.$$

**3** Tale affermazione è falsa. Forniamo un controesempio considerando le seguenti funzioni:

$$f(x) = x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, \qquad g(x) = x.$$

Poiché $-x^2 \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leq x^2$, possiamo applicare il teorema del confronto e risulta $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.
Quindi $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe funzioni tendenti a 0 per $x \to 0$.
Esse non soddisfano le condizioni previste dal teorema di De L' Hôpital, in quanto non esiste $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Infatti:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1} = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Per $x \to 0$, il primo termine tende a 0 mentre l'addendo $-\cos \frac{1}{x}$ non ammette limite (essendo una funzione oscillante).

Questo, però, non implica che non si possa calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Infatti risulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) = 0.$$

**4** Il limite $\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)$ porta alla forma indeterminata $\infty-\infty$. Riscriviamolo raccogliendo la $x$ al numeratore:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right).$$

Ora, per il teorema di De L' Hôpital risulta $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, pertanto vale:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\ln x)=+\infty.$$

L'alternativa corretta è C.

**5** Data la funzione $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$, poniamo $y=e^x-1$, per cui $e^x=1+y$ e $x=\ln(1+y)$. Inoltre per $x\to 0$ risulta $y\to 0$. Sostituiamo nel limite $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$ la variabile $x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}.$$

Il limite $\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}$ è notevole e vale 1 poiché:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}=\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}=\ln\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right]=\ln\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]=\ln e=1.$$

Pertanto vale:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{1}=1.$$

**6** Una primitiva di $f$ nell'intervallo $[1;\,2]$ è del tipo $y=x+c$ e una primitiva di $f$ nell'intervallo $]2;\,3]$ è del tipo $y=2x+d$, con $c$ e $d$ costanti reali. Allora se esiste una primitiva di $f$ nell'intervallo $[1;\,3]$, deve essere della forma:

$$F(x)=\begin{cases}x+c & \text{se } 1\le x\le 2\\ 2x+d & \text{se } 2<x\le 3\end{cases}$$

Tale funzione è una primitiva di $f$ se è derivabile in $x=2$ e $F'(2)=f(2)=1$.
Calcoliamo il rapporto incrementale destro in $x=2$:

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{F(2+h)-F(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2(2+h)+d-(2+c)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h+2+d-c}{h}=\begin{cases}2 & \text{se } 2+d-c=0\\ \infty & \text{se } 2+d-c\ne 0\end{cases}$$

Quindi la derivata destra di $F(x)$ in $x=2$ non può valere 1. Ne segue che $f$ non ammette primitiva nell'intervallo $[1,3]$.

**7** Consideriamo la funzione di equazione $f(x)=x^5+x^3+1$.
Tale funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$ e ivi continua e derivabile, in quanto polinomiale. Inoltre $f(0)=1>0$ e $f(-1)=-1<0$. Quindi per il teorema di esistenza degli zeri di una funzione, l'equazione considerata ammette almeno una soluzione reale nell'intervallo $[-1;0]$.
Poiché $f'(x)=5x^4+3x^2$ è positiva in $\mathbb{R}-\{0\}$ e si annulla solo in $x=0$, ne segue che la funzione è strettamente crescente e quindi iniettiva. In particolare l'equazione ammette un unico zero compreso tra $-1$ e 0. Pertanto $z=-1$.

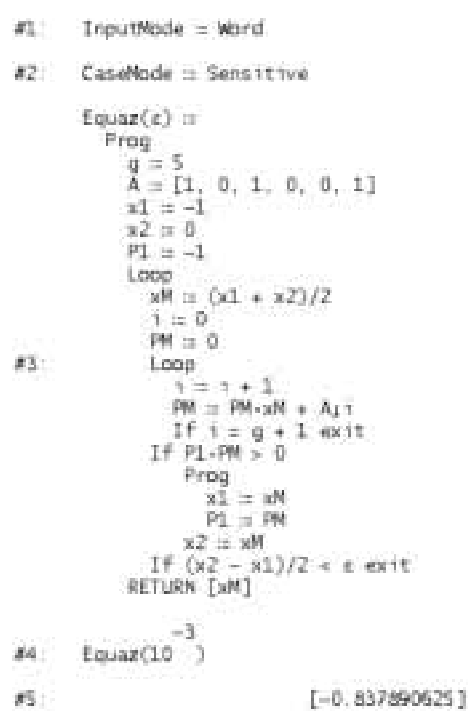
**8** Uno dei metodi per determinare tale soluzione nell'intervallo $[-1; 0]$ con un'approssimazione $\varepsilon = 10^{-3}$ è il metodo ricorsivo della bisezione che permette di restringere l'intervallo di partenza intorno alla soluzione fino all'approssimazione desiderata. Si costruisce il seguente algoritmo, il quale chiede in ingresso l'approssimazione $\varepsilon$ voluta.

| | |
|---|---|
| • Inizio Programma Equazione polinomiale | |
| • Leggi $\varepsilon$ | Si legge il valore dell'approssimazione $\varepsilon$ |
| • $g = 5$ | Si assegna alla variabile $g$ il grado dell'equazione, |
| • $A = [1, 0, 1, 0, 0, 1]$ | al vettore $A$ i coefficienti dell'equazione polinomiale, |
| • $x_1 = -1$ | alla variabile $x_1$ l'estremo sinistro dell'intervallo, |
| • $x_2 = 0$ | alla variabile $x_2$ l'estremo destro dell'intervallo, |
| • $P_1 = -1$ | alla variabile $P_1$ il valore $f(-1) = -1$ |
| • Ripeti | Si costruisce il ciclo basato sul metodo di bisezione |
|   • $x_M = (x_1 + x_2)/2$ | Si calcola il punto medio dell'intervallo $[x_1; x_2]$ |
|   • $i = 0$ | Si azzera il contatore $i$ |
|   • $P_M = 0$ | Si azzera la variabile $P_M$ |
|   • Ripeti | Si calcola il valore $f(x_M)$ contenuto in $P_M$ |
|     • $i \leftarrow i + 1$ | |
|     • $P_M \leftarrow P_M \cdot x_M + A{\downarrow}_i$ | |
|     • Finché $i = g + 1$ | |
|     • Se $P_1 \cdot P_M > 0$ | Si effettua il controllo sulla posizione della radice rispetto al punto medio |
|       • $x_1 = x_M$, $P_1 = P_M$ | |
|       • altrimenti $x_2 = x_M$ | |
|   • finché $(x_2 - x_1)/2 < \varepsilon$ | Si effettua il controllo sull'approssimazione voluta |
| • Scrivi $x_M$ | Si mostra la radice approssimata |
| • Fine | |

In linguaggio Derive il programma corrispondente da scrivere nella riga di editazione delle espressioni è il seguente:

```
Equaz(ε):= PROG (g := 5, A := [1, 0, ,1, 0, 0, 1], x1
:=−1, x2 :=0, P1 :=−1,LOOP (xM := (x1 + x2)/2, i := 0,
PM := 0, LOOP (i := i + 1, PM := PM·xM = A↓I, IF (i = g
+ 1, exit)), IF (P1·PM > 0, PROG (x1 := xM, P1 := PM),
x2 := xM), IF ((x2 − x1)/2 < ε, exit)), RETURN [xM])
```

Nella figura 10 è riportato il programma come appare nella finestra algebrica.




▲ **Figura 10.**

**9** Una trasformazione che ha equazioni del tipo

$$\begin{cases} x' = bx + cy + d \\ y' = b'x + c'y + d' \end{cases}$$

è un'affinità se $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = bc' - b'c \neq 0$.

Quindi, le equazioni $\begin{cases} x' = ax - (a-1)y + 1 \\ y' = 2ax + (a-1)y + 2 \end{cases}$ rappresentano un'affinità se vale:

$$\begin{vmatrix} a & -(a-1) \\ 2a & a-1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \to \quad a(a-1) + 2a(a-1) \neq 0 \quad \to \quad 3a(a-1) \neq 0 \quad \to \quad a \neq 0 \wedge a \neq 1.$$

Inoltre, in ogni affinità, il rapporto tra l'area di una figura piana $S$ e l'area della sua immagine $S'$ rimane costante e vale la relazione $\frac{A_S}{A_{S'}} = \left| \det \begin{bmatrix} b & c \\ b' & c' \end{bmatrix} \right|$. Un'affinità è in particolare un'equivalenza se tale rapporto vale 1. Ne segue che le equazioni considerate rappresentano un'affinità equivalente se:

$$|3a(a-1)| = 1 \quad \to \quad 3a(a-1) = 1 \vee 3a(a-1) = -1 \quad \to \quad 3a^2 - 3a - 1 = 0 \vee 3a^2 - 3a + 1 = 0.$$

La prima delle due equazioni ha come soluzioni $a = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{6}$, mentre la seconda equazione è impossibile. Quindi si ha un'equivalenza se $a = \frac{3 + \sqrt{21}}{6}$ oppure se $a = \frac{3 - \sqrt{21}}{6}$.

**10** Consideriamo i due seguenti eventi:

$E_1$ = «La delegazione comprende «Antonio» e una sola «Maria»»,
$E_2$ = «La delegazione comprende «Antonio» e due femmine di nome «Maria»».

L'evento $E$ del quale si chiede la probabilità è la somma logica dei precedenti due eventi che sono incompatibili. Quindi risulta:

$$p(E) = p(E_1) + p(E_2).$$

Calcoliamo le probabilità di $E_1$ e $E_2$ come rapporto tra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili.
Le possibili coppie formate da due maschi sono le combinazioni semplici di 12 elementi di classe 2, cioè:

$$C_{12,2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2!} = 66.$$

Analogamente, le possibili coppie formate da due femmine sono:

$$C_{16,2} = \binom{16}{2} = \frac{16 \cdot 15}{2!} = 120.$$

Tutte le possibili delegazioni sono, quindi, $66 \cdot 120$, cioè 7920.
Le coppie di maschi comprendenti «Antonio» sono 11.
Per formare coppie di femmine comprendenti una sola «Maria», è necessario abbinare una delle due persone di nome «Maria» con le rimanenti 14 femmine che non hanno tale nome, per un totale di $14 \cdot 2$, cioè 28, coppie possibili. Quindi risulta:

$$p(E_1) = \frac{11 \cdot 28}{7920} = \frac{308}{7920} = \frac{7}{180}.$$

Esiste, invece, una sola coppia formata da due femmine con entrambe il nome «Maria». Ne segue:

$$p(E_2) = \frac{11 \cdot 1}{7920} = \frac{11}{7920} = \frac{1}{720}.$$

In conclusione:

$$p(E)=p(E_1)+p(E_2)=\frac{7}{180}+\frac{1}{720}=\frac{29}{720}.$$

| Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel | Svolgi il |
|---|---|
| Problema 1 | • Problema 2 pag. W 174<br>• Esercizio 64 pag. Q 118<br>• Esercizio 252 pag. W 121 |
| Problema 2 | • Problema 1 pag. W 174 (punti a, b e c)<br>• Problema 2 pag. W 172<br>• Problema 11 pag. V 283 |
| Quesito 1 | • Quesito 6 pag. Q154 |
| Quesito 2 | • Problema 18 pag. π 98<br>• Esercizio 160 pag. π 93 |
| Quesito 3 | • Esercizio 194 pag. V 133<br>• Esercizio 195 pag. V 133 |
| Quesito 4 | • Esercizio 210 pag. V 134<br>• Esercizio 134 pag. W 128 |
| Quesito 5 | • Esercizio 276 pag. U 175<br>• Esercizio 270 pag. U 174 |
| Quesito 6 | • Esercizio 103 pag. V 51<br>• Quesito 5 pag. W 70 |
| Quesito 7 | • Esercizio 4 pag. ι 21<br>• Esercizio 9 pag. ι 21<br>• Quesito 1 pag. ι 31 |
| Quesito 8 | • Esercizio 56 pag. ι 28<br>• Esercizio 57 pag. ι 28 |
| Quesito 9 | • Problema 513 pag. $J_1$ 112<br>• Problema 28 pag. $J_1$ 124 |
| Quesito 10 | • Quesito 11 pag. α 40<br>• Quesito 12 pag. α 40 |