ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

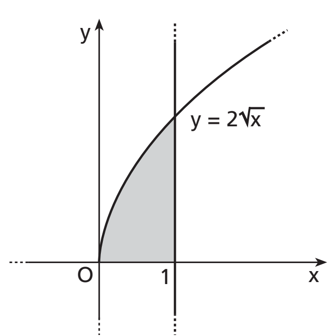
PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

QUESTIONARIO

1 La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (figura 1) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



▲ **Figura 1.**

2 Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$$

4 Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

5 Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *Teorema del valor medio* (o *Teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[-2; 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

6 Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

7 Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2; 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

8 Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

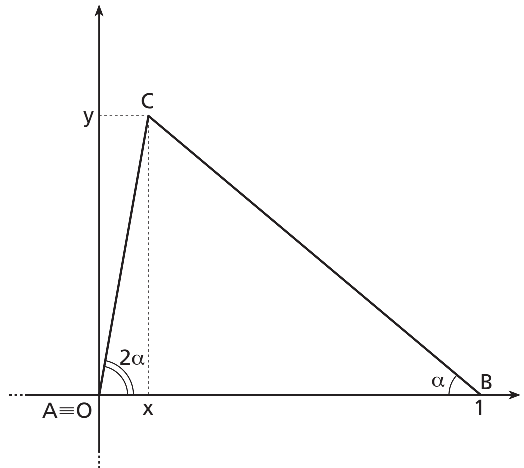
9 Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

10 Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e *paralleli*, a *latitudini* e *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

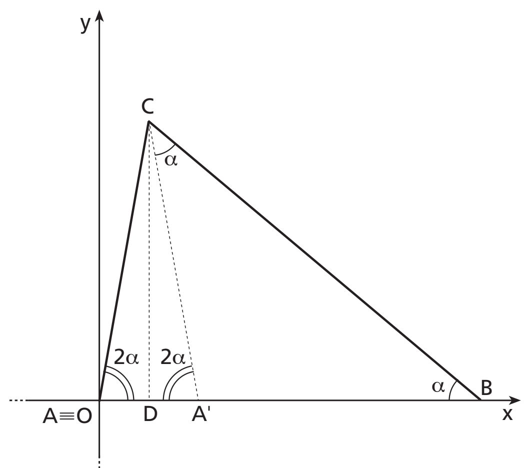
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy centrato in A e con gli assi cartesiani orientati come in figura 2.
Indichiamo con $(x\,;\,y)$ le generiche coordinate di C e con α l'angolo $A\hat{B}C$. Ne segue che $C\hat{A}B = 2\alpha$. Osserviamo che il punto C deve giacere nel semipiano $x < \frac{1}{2}$ altrimenti l'angolo $B\hat{A}C$ sarebbe minore o uguale ad $A\hat{B}C$.
Tale condizione può essere migliorata, osservando che nel primo quadrante è possibile costruire all'interno del triangolo ABC il triangolo isoscele $AA'C$ $\left(\text{poiché } x < \frac{1}{2}\right)$ di altezza CD, come in figura 3.
L'angolo $B\hat{C}A'$ è uguale ad α in quanto l'angolo supplementare di $C\hat{A}'B$ è uguale a 2α.
Quindi $\overline{CA'} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.
Inoltre, essendo CA' l'ipotenusa del triangolo rettangolo $A'CD$ con cateto $\overline{DA'} = x$, deve essere $1 - 2x \geq x$, cioè $x \leq \frac{1}{3}$.
Poiché il problema presenta una simmetria rispetto all'asse x, limitiamoci a considerare il caso $y \geq 0$. Per trovare l'equazione del luogo geometrico possiamo procedere in due modi.



▲ **Figura 2.**



▲ **Figura 3.**

Primo metodo
Considerando i triangoli rettangoli ottenuti tracciando l'altezza relativa alla base AB, risulta:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia $x \neq 0$.
Il caso $x = 0$ è, comunque, geometricamente accettabile in quanto si otterrebbe il triangolo rettangolo in A e isoscele, con C di coordinate (0; 1).
Supponiamo, allora, $x \neq 0$ (e quindi $\operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$). Dal sistema, ricordando la formula di duplicazione della tangente, otteniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2\left(\dfrac{y}{1-x}\right)}{1-\left(\dfrac{y}{1-x}\right)^2} = \frac{y}{x}$$

Svolgendo i calcoli e portando il tutto a forma normale otteniamo

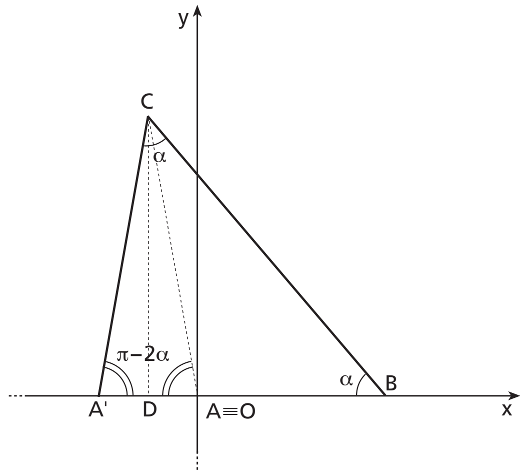
$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Questa equazione comprende anche il caso $x = 0$, poiché la curva passa per il punto $(0; 1)$, e i casi simmetrici. Questi ultimi corrispondono a valori negativi di y.
Essa rappresenta, dunque, l'equazione del luogo geometrico richiesto, considerando però la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$.

Secondo metodo
Osserviamo che la figura 3 rappresenta il caso in cui $x \geq 0$.
Il caso in cui, invece, si ha $x < 0$ è rappresentato in figura 4. In questo caso è possibile costruire un triangolo isoscele $A'AC$, esterno al triangolo ABC, di altezza CD. L'angolo $C\hat{A}A'$ è uguale a $\pi - 2\alpha$, in quanto l'angolo supplementare $C\hat{A}B$ è uguale a 2α. Ne segue che anche il triangolo $A'BC$ è isoscele, in quanto $A'\hat{C}B = A'\hat{B}C = \alpha$.
Consideriamo il triangolo rettangolo $C\hat{D}A$, in cui $\overline{CD} = y$; vale inoltre che $\overline{AD} = -x$ e $\overline{AC} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.
In entrambi i casi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CDA', otteniamo che

$$x^2 + y^2 = (1 - 2x)^2$$

che è l'equazione del luogo cercato.



▲ **Figura 4.**

2. Riscrivendo, con il metodo del completamento dei quadrati, l'equazione nella forma

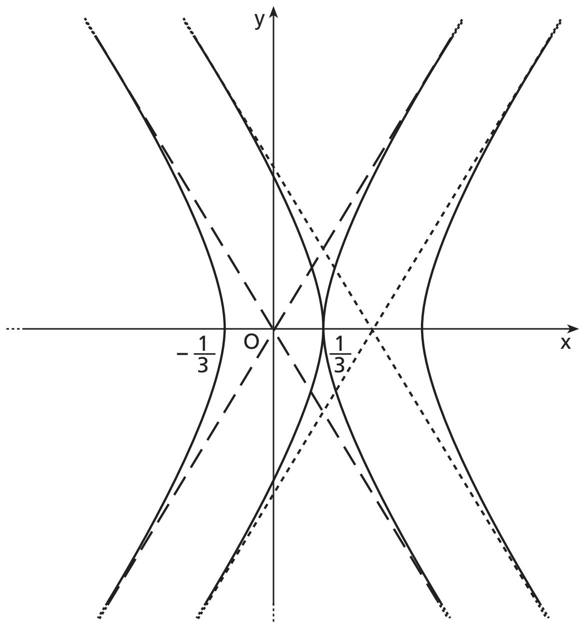
$$9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

è facile riconoscere che tale curva è l'iperbole che si ottiene dalla traslazione rispetto al vettore $\vec{v}\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

che ha vertici in $\left(\pm\frac{1}{3}; 0\right)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{3}x$ (figura 5).

Tenendo conto delle limitazioni geometriche, γ è il ramo sinistro di tale iperbole traslata.

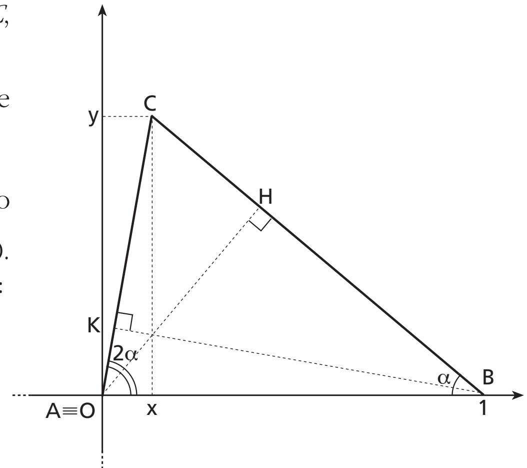


▲ **Figura 5.**

3. Siano H e K i piedi delle altezze relative ai lati CB e AC, ne segue che $\overline{AH} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{BK} = \operatorname{sen}(2\alpha)$.

Inoltre, vale $\alpha < \frac{\pi}{3}$ perché $\alpha + 2\alpha < \pi$ (in quanto due angoli interni di uno stesso triangolo).

Supponiamo, quindi, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ e cerchiamo il massimo in tale dominio della funzione $f(\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2(2\alpha)$. Per farlo calcoliamo la derivata prima della funzione $f(\alpha)$:



▲ **Figura 6.**

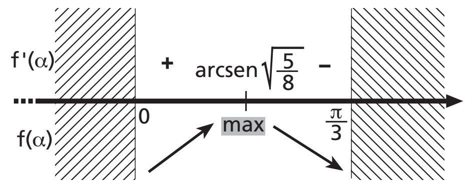
$$f'(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha) + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha)[1 + 4\cos(2\alpha)];$$

$\operatorname{sen}(2\alpha)$ è sempre positivo in $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$, quindi $f'(\alpha) \geq 0$ se $1 + 4\cos(2\alpha) \geq 0$.

$$1 + 4(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha \leq \frac{5}{8} \quad \rightarrow \quad 0 < \alpha \leq \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{8}}.$$

Riportiamo l'andamento della funzione in figura 7.

Quindi l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze AH e BK è $A\hat{B}C = \operatorname{arcsen}\sqrt{\frac{5}{8}} \simeq 52°14'$.



▲ **Figura 7.**

4. Per $\alpha = 36°$ si ottiene un triangolo isoscele ABC di angoli $C\hat{A}B = A\hat{C}B = 72°$ e lati $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Tracciando la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ che interseca il lato BC nel punto M si ottiene il triangolo ACM simile al triangolo ABC poiché equiangoli, come mostrato in figura 8.

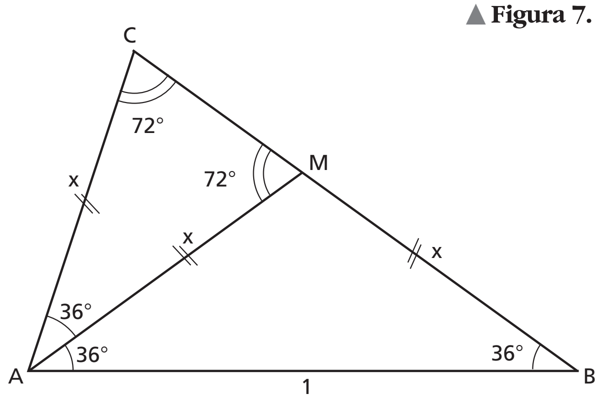
Se chiamiamo $\overline{AC} = x$ risulta $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = x$ e $\overline{CM} = 1 - x$.

Per similitudine otteniamo:

$$CM : CA = CA : 1, \text{ cioè } 1 - x : x = x : 1,$$

e quindi $x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 - 0$,

la cui la cui soluzione positiva è $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.



▲ **Figura 8.**

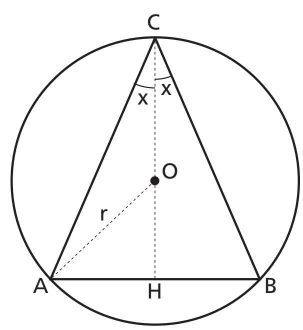
PROBLEMA 2

1. Consideriamo il triangolo isoscele ABC inscritto nella circonferenza C, con $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sia $x = A\hat{C}H$, come in figura 9.

Ne segue che $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

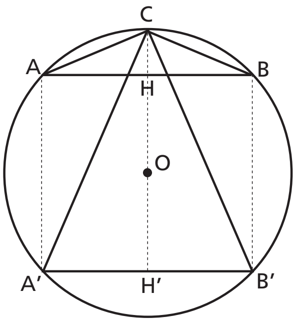
Per il teorema della corda, $\overline{AB} = 2r\operatorname{sen}(2x)$.

Possiamo supporre $\overline{CH} > \overline{CO}$. Infatti, se fosse $H \in CO$ (figura 10), esisterebbe un triangolo isoscele inscritto con base $A'B' = AB$ e altezza $CH' > CH$, quindi di area maggiore. Ne segue che i triangoli isosceli con altezza minore del raggio non sono di area massima.



▲ **Figura 9.**

Ora, poiché $\overline{OC} = \overline{OA} = r$, si ha che $A\hat{C}O = C\hat{A}O = x$, quindi $A\hat{O}H = 2x$. Ne segue che $\overline{OH} = r\cos(2x)$, perciò $\overline{CH} = r + r\cos(2x)$. La funzione che descrive l'area del triangolo ABC è, perciò,



▲ **Figura 10.**

$$f(x) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = r\text{sen}(2x) \cdot [r + r\cos(2x)] =$$

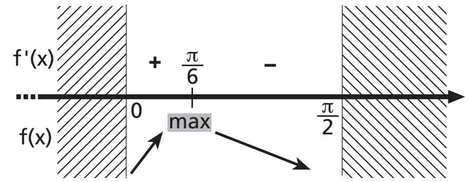
$$= r^2[\text{sen}(2x) + \cos(2x)\text{sen}(2x)].$$

Studiamone la derivata nell'intervallo $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$f'(x) = r^2[2\cos(2x) - 2\,\text{sen}^2(2x) + 2\cos^2(2x)] = 2r^2[2\cos^2(2x) + \cos(2x) - 1].$$

Essa è non negativa se $\cos(2x) \leq -1$ oppure $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$. La prima disequazione è impossibile nel dominio, mentre la seconda è verificata per $0 < 2x \leq \frac{\pi}{3}$, cioè per $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$.

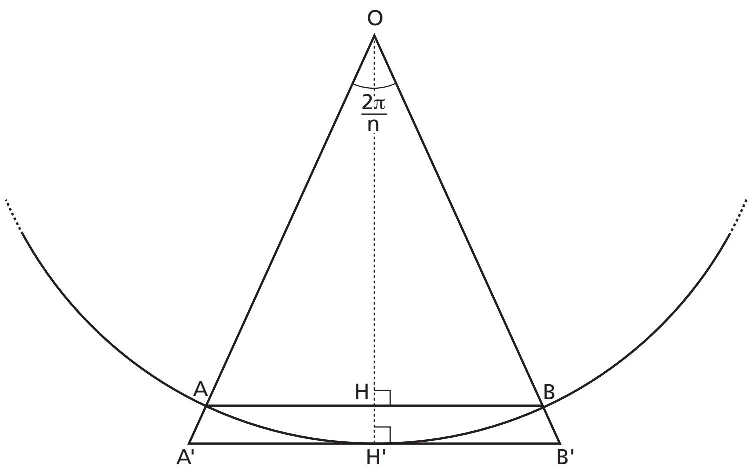
▼ **Figura 11.**



Riportiamo l'andamento nella figura 11.

L'area massima si ottiene, quindi, per $x = \frac{\pi}{6}$, che corrisponde a un triangolo equilatero.

2. Un poligono regolare di n lati inscritto si può scomporre in n triangoli isosceli congruenti con vertice in comune nel centro del cerchio. Essi hanno angolo al vertice di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ e lato r. Sia ABO un triangolo siffatto, come in figura 12.



◀ **Figura 12.**

Per il teorema della corda si ha che $AB = 2r\text{sen}\frac{\pi}{n}$. Per il teorema di Pitagora si ha:

$$OH = \sqrt{r^2 - r^2\,\text{sen}^2\frac{\pi}{n}} = r\text{sen}\frac{\pi}{n}.$$

L'area del poligono inscritto cercata è quindi:

$$S_n = n \cdot A_{AOB} = n \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{2} = nr^2\,\text{sen}\frac{\pi}{n} \cdot \cos\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2}\,r^2\,\text{sen}\frac{2\pi}{n}.$$

Analogamente, per il poligono regolare di n lati circoscritto, consideriamo il triangolo $OA'B'$ della precedente figura. Tale triangolo ha r come altezza e angolo al vertice $\frac{2\pi}{n}$. Ne segue che $\overline{H'B'} = r \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ e, quindi, l'area del poligono vale:

$$A_n = n \cdot A_{AO'B'} = n \cdot r^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

3. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \pi r^2 \frac{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$. Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambio di variabile $t = \frac{2\pi}{n}$ e si è ricordato che $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$.

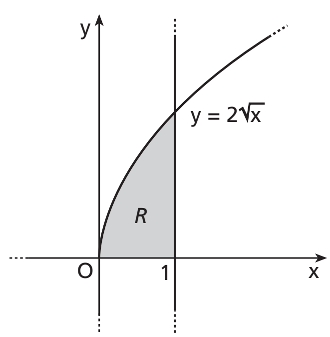
4. Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire un quadrato di area pari a quella di un cerchio di raggio assegnato con riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi r^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

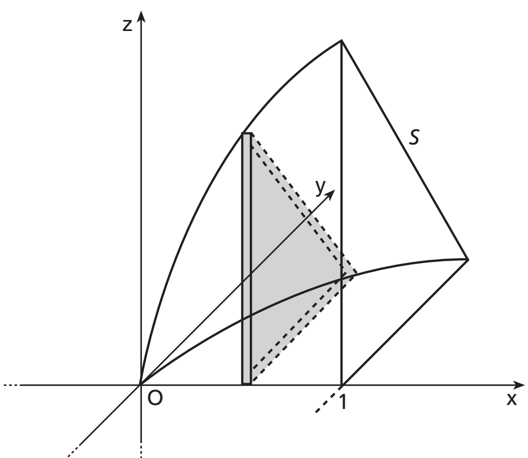
Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee equivalenti all'uso di riga e compasso.

QUESTIONARIO

1 In figura 13 è riportata la regione R del piano compresa tra il grafico della funzione $y = 2\sqrt{x}$ e l'asse x, con $0 \leq x \leq 1$.
Si costruisce il solido S con base R avente come sezioni perpendicolari all'asse x dei triangoli equilateri.



▲ **Figura 13.**

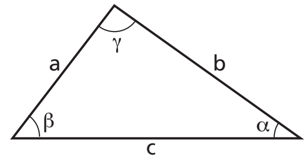


◀ **Figura 14.**

Il volume V del solido S è l'integrale, per x compreso tra 0 e 1, della funzione che rappresenta l'area di un triangolo equilatero di lato $2\sqrt{x}$, cioè $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (2\sqrt{x})^2 = \sqrt{3}x$ (somma integrale di prismi triangolari retti):

$$V = \sqrt{3} \int_0^1 x dx = \sqrt{3} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 Fissiamo l'unità di misura in centimetri.
È assegnato il triangolo di lati $a = 40$, $b = 60$, $c = 80$ e angoli α, β, γ.
Calcoliamo il coseno rispettivamente degli angoli α, β e γ utilizzando il teorema di Carnot:



▲ **Figura 15.**

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{60^2 + 80^2 - 40^2}{2 \cdot 60 \cdot 80} = \frac{10^2(36 + 64 - 16)}{10^2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8} = \frac{7}{8}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{40^2 + 80^2 - 60^2}{2 \cdot 40 \cdot 80} = \frac{10^2(16 + 64 - 36)}{10^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8} = \frac{11}{16}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac} = \frac{40^2 + 60^2 - 80^2}{2 \cdot 40 \cdot 60} = \frac{10^2(16 + 36 - 64)}{10^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} = -\frac{1}{4}$$

Le ampiezze degli angoli del triangolo, approssimate in gradi e primi sessagesimali, valgono quindi:

$$\alpha \simeq 28°57', \quad \beta \simeq 46°34', \quad \gamma \simeq 104°29'.$$

3 Per determinare al variare di k le soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0,$$

studiamo l'equazione

$$x^3 - x^2 + 1 = k$$

L'equazione considerata è equivalente all'equazione risolvente il sistema che descrive le intersezioni tra la curva fissa descritta da

$$y = x^3 - x^2 + 1$$

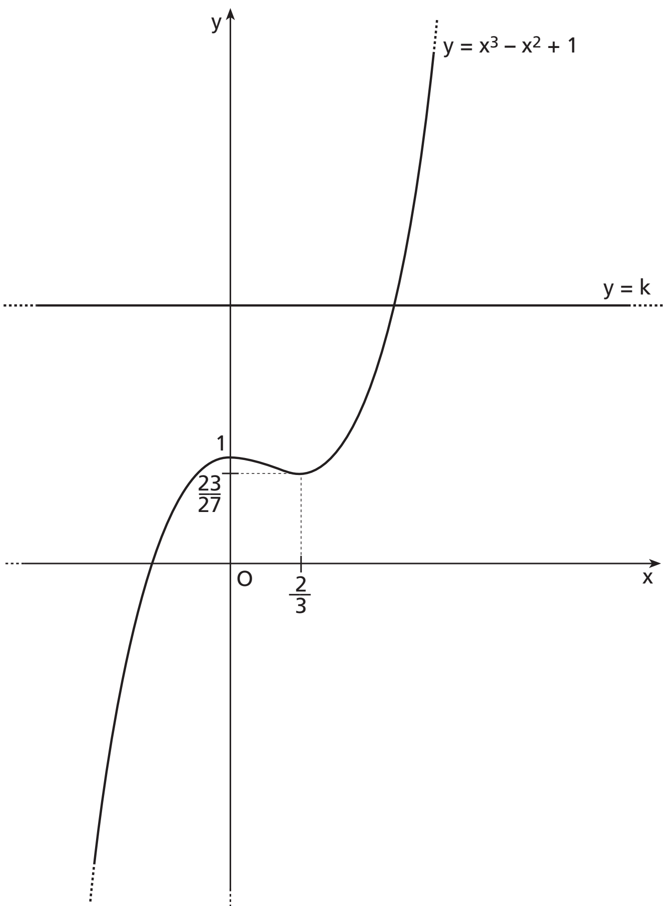
e il fascio di rette parallele all'asse delle ascisse $y = k$, k reale:

$$\begin{cases} y = x^3 - x^2 + 1 \\ y = k \end{cases}$$

Studiamo la funzione $y = x^3 - x^2 + 1$. In particolare, ne determiniamo i punti di minimo e massimo relativo.
Studiamone la derivata prima:

$$y' = 3x^2 - 2x.$$

Essa è non negativa se $x < 0$ oppure se $x > \frac{2}{3}$, quindi $(0; 1)$ è un massimo relativo e $\left(\frac{2}{3}; \frac{23}{27}\right)$ è un minimo relativo.



▲ **Figura 16.**

4 Fissiamo l'unità di misura in metri.

Si vuole determinare la capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1. Poniamo x la misura del raggio della circonferenza di base del generico cono. I limiti geometrici sono $0 < x \leq 1$. L'altezza del cono vale $\sqrt{1-x^2}$ e quindi il volume del cono è

$$V_C = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

Al fine di trovare il massimo cono circolare retto, è necessario massimizzare la funzione $f(x) = \frac{\pi}{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}$, la cui derivata prima vale:

$$f'(x) = \frac{\pi}{3}\left(2x\sqrt{1-x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{4x(1-x^2) - 2x^3}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2x - 3x^3}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Tale derivata è positiva quando $2x - 3x^3 > 0$, quindi, poiché $x > 0$, quando $2 - 3x^2 > 0$. Riportiamo l'andamento di $f(x)$ nella figura 17.

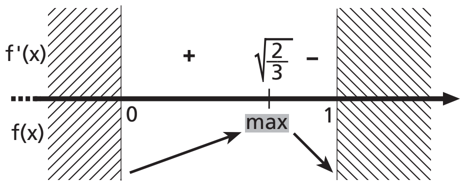


Figura 17.

Pertanto il punto di massimo è $x_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ e il corrispondente valore massimo è il volume del massimo cono circolare retto di apotema 1, ossia

$$V_c = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Ricordiamo di aver fissato l'unità di misura in metri, da cui segue che il serbatoio può contenere

$$\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\,\mathrm{m}^3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\,10^3\,\mathrm{dm}^3 = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\,10^3\,\ell \simeq 402{,}06\,\ell.$$

5 Per mostrare che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo $[-2; 2]$ occorre verificare che si tratta di una funzione continua in $[-2; 2]$ e derivabile in $]-2; 2[$. Entrambe le condizioni sono verificate in quanto si tratta di una funzione razionale intera.

Calcoliamo il valore $c \in [-2; 2]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

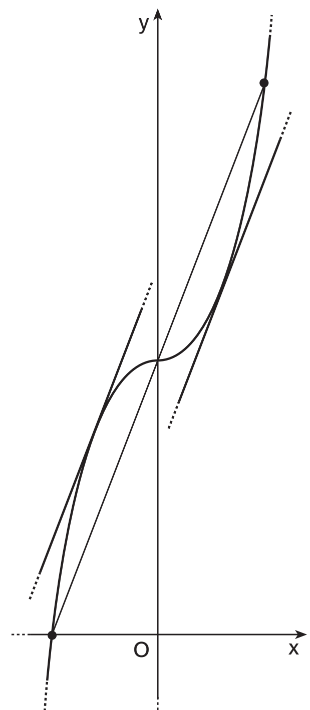
dove $a = -2$ e $b = 2$. Ricaviamo la derivata prima $f'(x) = 3x^2$ e imponiamo che

$$3c^2 = \frac{16 - 0}{2 + 2}$$

e otteniamo $c = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, entrambe accettabili.

Il significato geometrico di questo teorema ci dice che la tangente alla curva data nei punti di ascissa $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$ è parallela alla corda congiungente i punti aventi per ascissa gli estremi dell'intervallo $[-2; 2]$.

Figura 18.



6 Il prezzo finale dell'abito non dipende da quale delle due operazioni sia avvenuta prima ed è pari a:

$$p\cdot\left(1-\frac{6}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{6}{100}\right)=p\cdot 0{,}94\cdot 1{,}06=p\cdot 0{,}9964.$$

Infatti se il prezzo viene prima maggiorato del 6%, indicato con p' il prezzo dopo la maggiorazione e con p'_f il prezzo finale, si ha:

$$p'=p\left(1+\frac{6}{100}\right);$$

$$p'_f=p'\left(1-\frac{6}{100}\right)=p\left(1+\frac{6}{100}\right)\left(1-\frac{6}{100}\right).$$

Se il prezzo subisce dapprima la minorazione del 6%, indicato con p'' il prezzo diminuito del 6% e con p''_f il prezzo finale, si ha:

$$p''=p\left(1-\frac{6}{100}\right);$$

$$p''_f=p''\left(1+\frac{6}{100}\right)=p\left(1-\frac{6}{100}\right)\left(1+\frac{6}{100}\right)$$

e risulta $p'_f=p''_f$.

7 Per definizione, se la funzione $f(x)$ è dispari si ha che $f(-x)=-f(x)$ per ogni x nel dominio di $f(x)$ ed in particolare per $-2\leq x\leq 2$. Utilizzando l'additività dell'integrale, si può scrivere:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx.$$

Inoltre:

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=-\int_{0}^{-2} f(x)\,dx=\int_{0}^{-2}[-f(x)]\,dx.$$

La disparità di $f(x)$ implica:

$$\int_{0}^{-2}[-f(x)]\,dx=\int_{0}^{-2} f(-x)\,dx.$$

Se si effettua il cambio di variabile $t=-x$, l'ultimo integrale diventa

$$\int_{0}^{-2} f(-x)\,dx=-\int_{0}^{2} f(t)\,dt$$

pertanto

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=-\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=0.$$

Per la linearità dell'integrale, si ha:

$$\int_{-2}^{2}(f(x)+3)\,dx=\int_{-2}^{2} f(x)\,dx+3\int_{-2}^{2} dx=0+[3x]_{-2}^{2}=12.$$

8 Ricordiamo che il coefficiente binomiale può essere scritto come

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}, \text{ con } n \geq k.$$

Pertanto

$$4\binom{n}{4} = 4\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}, \text{ con } n \geq 4$$

e

$$15\binom{n-2}{3} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}, \text{ con } n-2 \geq 3, \text{ cioè } n \geq 5.$$

Affinché abbiano senso entrambe le espressioni precedenti, dobbiamo supporre $n \geq 5$.
Imponiamo l'uguaglianza:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} = 15\,\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3!}.$$

Semplificando i denominatori otteniamo:

$$(n-2)(n-3)[n(n-1) - 15(n-4)] = 0$$

$$(n-2)(n-3)(n^2 - 16n + 60) = 0,$$

che ammette come soluzioni $n=2$, $n=3$, $n=6$ e $n=10$, dove per la condizione $n \geq 5$, sono accettabili le soluzioni $n=6$ e $n=10$.

9 Effettuiamo il cambio di variabile $x = \operatorname{sen} t$; quindi $dx = \cos t dt$ e l'integrale può essere riscritto come

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int 1 - \operatorname{sen}^2 t \cos t dt = \int \cos^2 t dt.$$

Applicando la formula di bisezione $\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, oppure integrando per parti, otteniamo

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c,$$

dove c è la costante di integrazione. Sostituendo t con la rispettiva espressione in x, otteniamo

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$$

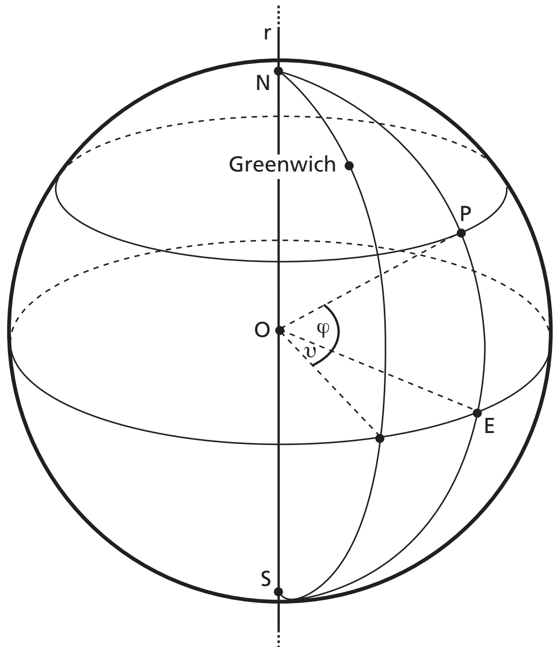
Calcoliamo ora l'integrale definito $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$. Otteniamo

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[\frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1-x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{\operatorname{arcsen} 1 + 1\sqrt{1-1}}{2} - \frac{\operatorname{arcsen} 0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Siccome $y = \sqrt{1-x^2}$ è l'equazione della semicirconferenza situata nel semipiano delle ordinate positive, relativa alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, osserviamo che calcolare $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$ equivale a calcolare l'area di un quarto di cerchio di raggio 1.

10 Si osservi la figura 19.

Per definire i meridiani, consideriamo il fascio di piani contenenti l'asse di rotazione r. Ciascuno di tali piani interseca la superficie della sfera lungo una circonferenza massima passante per i poli, cioè i punti in cui l'asse interseca la superficie della sfera. Ciascuna delle due semicirconferenze definite dai poli è un arco di meridiano. Fissato come riferimento l'arco di meridiano passante per l'osservatorio di Greenwich (Londra), si definisce longitudine del punto P la misura in gradi dell'angolo convesso compreso tra il semipiano contenente l'arco di meridiano passante per P e il semipiano contenente il meridiano di Greenwich, specificando se l'angolo sia percorso verso E o verso O rispetto a Greenwich (longitudine 0°).



▲ **Figura 19.**

Per definire la latitudine si immagini il fascio di piani perpendicolari all'asse r: ciascuno «taglia» la superficie della sfera lungo una circonferenza detta parallelo. Il parallelo definito dall'unico piano del fascio che contiene il centro O della sfera terrestre è l'equatore: si definisce latitudine (nord o sud) di un punto P la misura in gradi dell'angolo acuto $\varphi = P\hat{O}E$, dove E è il punto di intersezione tra l'equatore e l'arco di meridiano passante per P. (L'equatore è ovviamente l'insieme dei punti a latitudine zero.)

Pertanto la posizione di un punto P sulla superficie terrestre è univocamente determinata assegnando due angoli orientati, per esempio: 10° long. E, 45° lat. N.