ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia a un numero reale maggiore di zero e sia g la funzione definita, per ogni $x \in \mathbb{R}$, da: $g(x) = a^x + a^{-x}$.

1. Si dimostri che, se $a \neq 1$, g è strettamente crescente per $x > 0$ e strettamente decrescente per $x < 0$.
2. Posto $a = e$, si disegni il grafico della funzione $f(x) = x^x + e^{-x}$ e si disegni altresì il grafico della funzione $\dfrac{1}{f(x)}$.
3. Si calcoli $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{f(x)}\,dx$; successivamente, se ne trovi il limite per $t \to \infty$ e si interpreti geometricamente il risultato.
4. Verificato che il risultato del limite di cui al punto precedente è $\dfrac{\pi}{4}$, si illustri una procedura numerica che consenta di approssimare tale valore.

PROBLEMA 2

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

QUESTIONARIO

1 Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

2 La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \leq x \leq e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.

3 Si dimostri che l'insieme delle *omotetie* con centro O fissato è un *gruppo*.

4 Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di $f(x)$.

5 Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

6 Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.

7 Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1, 2).

8 A *Leonardo Eulero* (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».

9 Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.

10 Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e *paralleli*, a *latitudini* e *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Studiamo la derivata di $g(x)$:

$$g'(x) = a^x \ln a - a^{-x} \ln a = \ln a (a^x - a^{-x}) = \ln a \frac{a^{2x} - 1}{a^x}.$$

Poiché a^x è sempre positivo, $g'(x) > 0$ se vale $\ln a(a^{2x} - 1) > 0$.
Se $a > 1$, allora $\ln a > 0$ e, quindi, otteniamo:

$$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} > 1 \quad \rightarrow \quad 2x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0.$$

Se, invece, $0 < a < 1$, allora $\ln a < 0$ e, quindi, otteniamo:

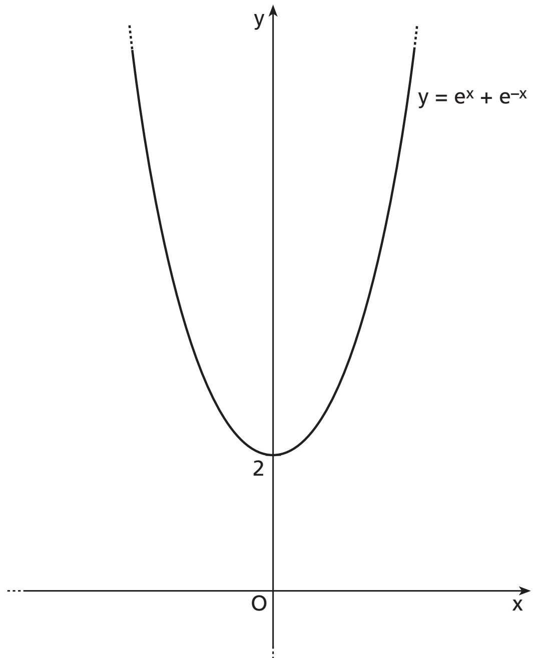
$$g'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} - 1 < 0 \quad \rightarrow \quad a^{2x} < 1 \quad \rightarrow \quad 2x > 0 \quad \rightarrow \quad x > 0.$$

Dunque, in entrambi i casi la derivata è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$.
In conclusione g è strettamente crescente per x positiva e strettamente decrescente per x negativa.

2. Il dominio della funzione $f(x) = e^x + e^{-x}$ è $\mathbb{R}$.
Essa è una funzione pari ed interseca l'asse y nel punto di ordinata 2, mentre non interseca l'asse x. Inoltre è sempre positiva.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

quindi la funzione non ammette asintoti obliqui.
Dal punto precedente sappiamo che la derivata $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x}$ è positiva per $x > 0$, nulla per $x = 0$ e negativa altrove.
Inoltre $f''(x) = e^x + e^{-x}$, ed è positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione ha, quindi, la concavità rivolta sempre verso l'alto. Il grafico di f è in figura 1.



▲ **Figura 1.**

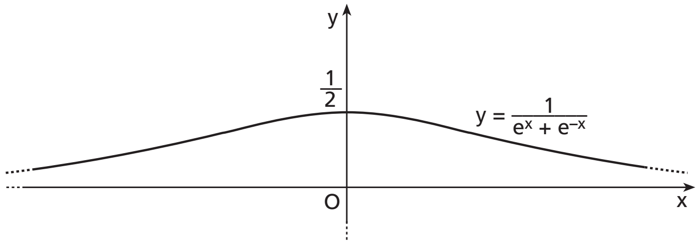
Consideriamo ora $h(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

Anch'essa è definita in tutto $\mathbb{R}$ e sempre strettamente positiva. Interseca l'asse y nel punto $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale. Inoltre, essendo $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, vale che h è decrescente dove f è crescente e viceversa.

Il grafico della funzione $\frac{1}{f(x)}$ è, dunque, il seguente (figura 2).



◀ **Figura 2.**

3. Effettuando la sostituzione $m = e^x$, si ottiene

$$\int_0^t \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx = \int_0^{e^t} \frac{1}{m^2+1}\,dm = [\operatorname{arctg} m]_1^{e^t} = \operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}.$$

Quindi,

$$\lim_{t \to +\infty}\left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Tale valore rappresenta l'area del sottografico della funzione positiva $h(x)$ per $x > 0$. Tale area risulta finita anche se tale regione è illimitata.

4. Si osservi che:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx = [\operatorname{arctg} x]_0^1 = (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Per il calcolo approssimato di $\frac{\pi}{4}$ si può, quindi, utilizzare il metodo dei rettangoli, dividendo l'intervallo $[0; 1]$ in $n = 6$ parti uguali. Considerando $k(x) = \frac{1}{1+x^2}$, e tenendo conto che questa è una funzione monotona decrescente per $x > 0$, si ottengono le seguenti approssimazioni per eccesso e per difetto.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{1-0}{6}\left[k(0) + k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61}\right] \simeq 0{,}83.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{1-0}{6}\left[k\left(\frac{1}{6}\right) + k\left(\frac{2}{6}\right) + k\left(\frac{3}{6}\right) + k\left(\frac{4}{6}\right) + k\left(\frac{5}{6}\right) + k(1)\right] =$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{36}{37} + \frac{36}{40} + \frac{36}{45} + \frac{36}{52} + \frac{36}{61} + \frac{1}{2}\right] \simeq 0{,}75.$$

L'errore commesso nell'approssimazione è $\varepsilon = 0{,}83 - 0{,}75$ che è anche uguale a $\frac{1}{6}(k(0) - k(1)) \simeq 0{,}08$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.

PROBLEMA 2

1. Consideriamo il sistema di riferimento Oxy centrato in A e con gli assi cartesiani orientati come in figura 3.

Indichiamo con $(x\,;\,y)$ le generiche coordinate di C e con α l'angolo $A\hat{B}C$. Ne segue che $C\hat{A}B = 2\alpha$. Osserviamo che il punto C deve giacere nel semipiano $x < \frac{1}{2}$ altrimenti l'angolo $B\hat{A}C$ sarebbe minore o uguale ad $A\hat{B}C$.

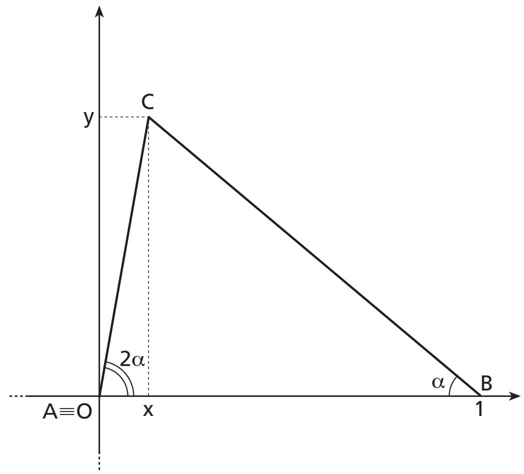
Tale condizione può essere migliorata, osservando che nel primo quadrante è possibile costruire all'interno del triangolo ABC il triangolo isoscele $AA'C$ $\left(\text{poiché } x < \frac{1}{2}\right)$ di altezza CD, come in figura 4.

L'angolo $B\hat{C}A'$ è uguale ad α in quanto l'angolo supplementare di $C\hat{A}'B$ è uguale a 2α.

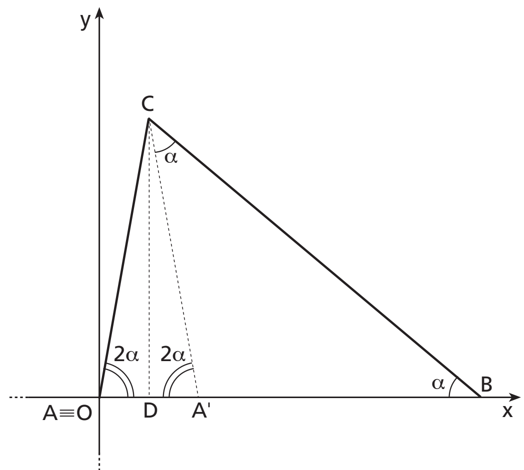
Quindi $\overline{CA'} = \overline{A'B} = 1 - 2x$.

Inoltre, essendo CA' l'ipotenusa del triangolo rettangolo $A'CD$ con cateto $\overline{DA'} = x$, deve essere $1 - 2x \geq x$, cioè $x \leq \frac{1}{3}$.

Poiché il problema presenta una simmetria rispetto all'asse x, limitiamoci a considerare il caso $y \geq 0$. Per trovare l'equazione del luogo geometrico possiamo procedere in due modi.



▲ **Figura 3.**



▲ **Figura 4.**

Primo metodo

Considerando i triangoli rettangoli ottenuti tracciando l'altezza relativa alla base AB, risulta:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

nell'ipotesi che sia $x \neq 0$.

Il caso $x = 0$ è, comunque, geometricamente accettabile in quanto si otterrebbe il triangolo rettangolo in A e isoscele, con C di coordinate $(0;\,1)$.

Supponiamo, allora, $x \neq 0$ (e quindi $\operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$). Dal sistema, ricordando la formula di duplicazione della tangente, otteniamo:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{1-x} \\ \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{y}{x} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{2\left(\dfrac{y}{1-x}\right)}{1-\left(\dfrac{y}{1-x}\right)^2} = \frac{y}{x}$$

Svolgendo i calcoli e portando il tutto a forma normale otteniamo

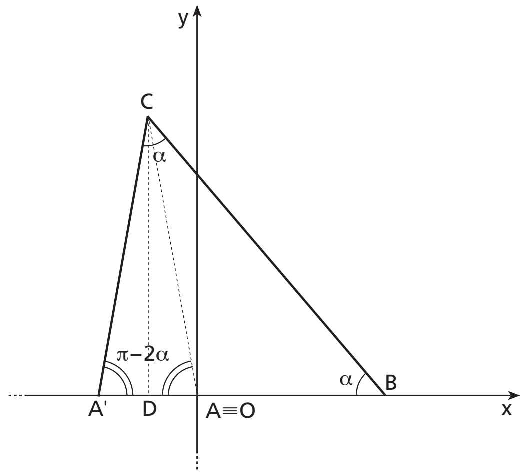
$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0.$$

Questa equazione comprende anche il caso $x=0$, poiché la curva passa per il punto (0; 1), e i casi simmetrici. Questi ultimi corrispondono a valori negativi di y.
Essa rappresenta, dunque, l'equazione del luogo geometrico richiesto, considerando però la limitazione $x \leq \frac{1}{3}$.

Secondo metodo
Osserviamo che la figura 4 rappresenta il caso in cui $x \geq 0$.
Il caso in cui, invece, si ha $x<0$ è rappresentato in figura 5. In questo caso è possibile costruire un triangolo isoscele $A'AC$, esterno al triangolo ABC, di altezza CD. L'angolo $C\hat{A}A'$ è uguale a $\pi - 2\alpha$, in quanto l'angolo supplementare $C\hat{A}B$ è uguale a 2α. Ne segue che anche il triangolo $A'BC$ è isoscele, in quanto $A'\hat{C}B = A'\hat{B}C = \alpha$.
Consideriamo il triangolo rettangolo $C\hat{D}A$, in cui $\overline{CD} = y$; vale inoltre che $\overline{AD} = -x$ e $\overline{AC} = \overline{A'B} = 1-2x$.
In entrambi i casi, applicando il teorema di Pitagora al triangolo CDA', otteniamo che

$$x^2 + y^2 = (1-2x)^2$$

che è l'equazione del luogo cercato.



▲ **Figura 5.**

2. Riscrivendo, con il metodo del completamento dei quadrati, l'equazione nella forma

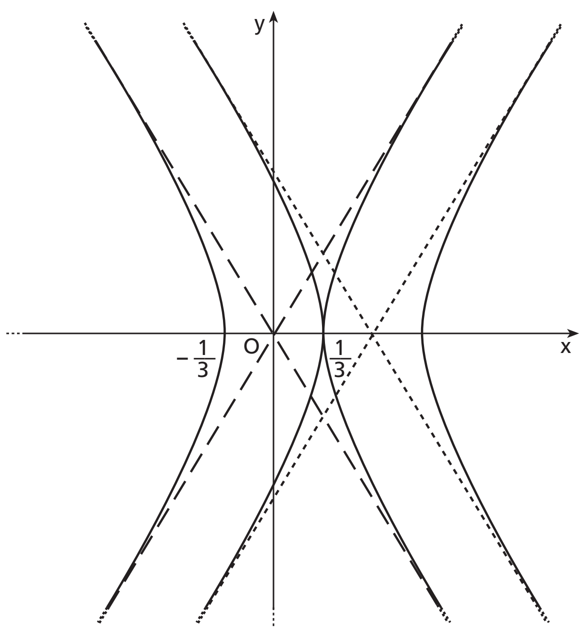
$$9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$$

è facile riconoscere che tale curva è l'iperbole che si ottiene dalla traslazione rispetto al vettore $\vec{v}\left(\frac{2}{3};0\right)$ dell'iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$$

che ha vertici in $\left(\pm\frac{1}{3};\ 0\right)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{3}x$ (figura 6).

Tenendo conto delle limitazioni geometriche, γ è il ramo sinistro di tale iperbole traslata.



▲ **Figura 6.**

3. Siano H e K i piedi delle altezze relative ai lati CB e AC, ne segue che $\overline{AH} = \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{BK} = \operatorname{sen}(2\alpha)$.

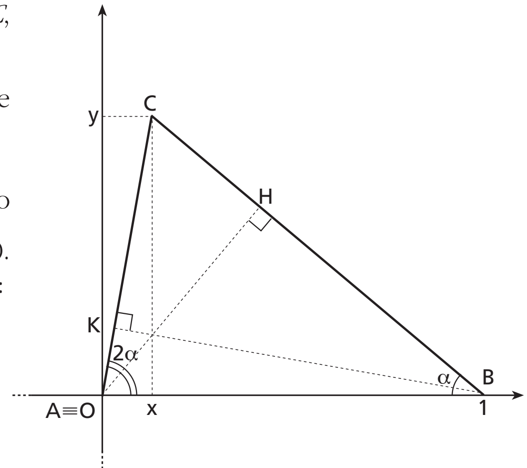
Inoltre, vale $\alpha < \frac{\pi}{3}$ perché $\alpha + 2\alpha < \pi$ (in quanto due angoli interni di uno stesso triangolo).

Supponiamo, quindi, $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ e cerchiamo il massimo in tale dominio della funzione $f(\alpha) = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2(2\alpha)$. Per farlo calcoliamo la derivata prima della funzione $f(\alpha)$:

$$f'(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha) + 4\operatorname{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$
$$= \operatorname{sen}(2\alpha)[1 + 4\cos(2\alpha)];$$

$\operatorname{sen}(2\alpha)$ è sempre positivo in $\left]0; \frac{\pi}{3}\right[$, quindi $f'(\alpha) \geq 0$ se $1 + 4\cos(2\alpha) \geq 0$.

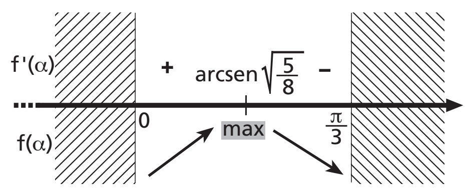
$$1 + 4(1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha) \geq 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{sen}^2\alpha \leq \frac{5}{8} \quad \rightarrow \quad 0 < \alpha \leq \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}}.$$



▲ **Figura 7.**

Riportiamo l'andamento della funzione in figura 8.

Quindi l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze AH e BK è $A\hat{B}C = \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}} \simeq 52°14'$.



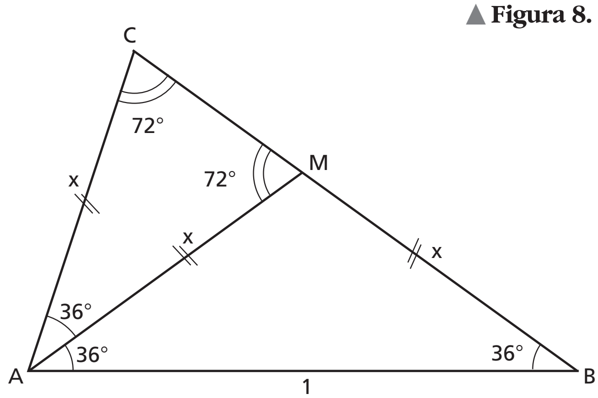
▲ **Figura 8.**

4. Per $\alpha = 36°$ si ottiene un triangolo isoscele ABC di angoli $C\hat{A}B = A\hat{C}B = 72°$ e lati $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Tracciando la bisettrice dell'angolo $C\hat{A}B$ che interseca il lato BC nel punto M si ottiene il triangolo ACM simile al triangolo ABC poiché equiangoli, come mostrato in figura 9.
Se chiamiamo $\overline{AC} = x$ risulta $\overline{AM} = x$, $\overline{BM} = x$ e $\overline{CM} = 1 - x$.
Per similitudine otteniamo:

$$CM : CA = CA : 1, \text{ cioè } 1 - x : x = x : 1,$$

e quindi $x^2 = 1 - x \rightarrow x^2 + x - 1 - 0$,

la cui la cui soluzione positiva è $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.



▲ **Figura 9.**

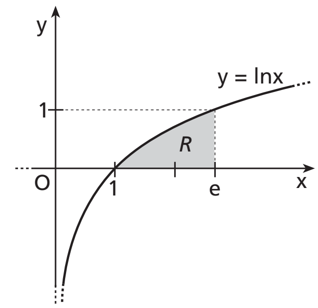
QUESTIONARIO

1 Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire un quadrato di area pari a quella di un cerchio di raggio assegnato con riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

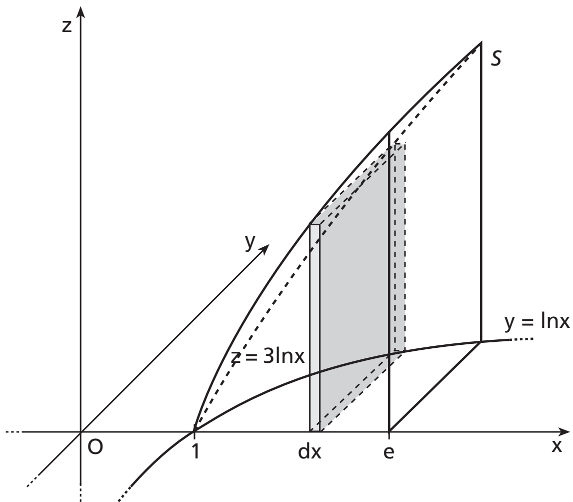
$$\pi r^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee equivalenti all'uso di riga e compasso.

2 Nella figura 10 è riportata la regione R di piano compresa tra il grafico della funzione $y = \ln x$ e l'asse x, con $1 \le x \le e$.
Si costruisce il solido S con base R avente come sezioni perpendicolari all'asse x rettangoli con altezza tripla rispetto alla base (figura 11).



▲ **Figura 10.**



◀ **Figura 11.**

Il volume V del solido S può quindi essere visto come la somma integrale di parallelepipedi la cui area di base è $\ln x\,dx$ e l'altezza è $z = 3\ln x$:

$$V = \int_1^e 3\ln^2 x\,dx.$$

Risolviamo l'integrale indefinito per parti

$$\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - \int x\ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}\,dx = x\ln^2 x - 2\int \ln^2 x\,dx =$$
$$= x\ln^2 x - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.$$

Pertanto

$$V = 3[x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_1^e = 3(e - 2e + 2e - 2) = 3(e-2) \simeq 2{,}15.$$

3 Si stabilisce di considerare il centro dell'omotetia nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Dati un numero reale $k \neq 0$ e un punto P del piano, l'omotetia di rapporto k e centro O è quella trasformazione che associa a P il punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$. Il punto P' è detto omotetico di P e il numero k è detto rapporto di omotetia. L'equazione di un'omotetia di centro O e rapporto k è:

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}.$$

Inoltre un gruppo è una struttura algebrica $(A, *)$ nella quale l'operazione $*$ gode delle seguenti proprietà:

a) è interna:

$$a * b \in A, \ \forall a, \ b \in A;$$

b) è associativa:

$$(a * b) * c = a * (b * c), \ \forall a, \ b \in A;$$

c) esiste, ed appartiene ad A, l'elemento neutro e:

$$a * e = e * a = a, \ \forall a \in A;$$

d) per ogni elemento $a \in A$ esiste in a l'elemento simmetrico a':

$$\forall a \in A, \exists a' \in A \text{ tale che } a * a' = a' * a = e.$$

L'insieme delle omotetie con l'operazione di composizione $\circ$ è un gruppo in quanto possiamo verificare le quattro proprietà suddette.

a) La composizione di omotetie di centro O è un'operazione interna perché, se

$$\omega_{O,k_1} = \begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_1 y \end{cases} \text{ e } \omega_{O,k_2} = \begin{cases} x' = k_2 x \\ y' = k_2 y \end{cases} \quad (k_1, \ k_2 \in \mathbb{R} - \{0\})$$

sono le equazioni delle due omotetie, si avrà

$$\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2} = \begin{cases} x' = (k_1 \cdot k_2)x \\ y' = (k_1 \cdot k_2)y \end{cases}$$

che è ancora un'omotetia di centro O e rapporto $k_1 \cdot k_2$.

b) Vale la proprietà associativa:

$$(\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2}) \circ \omega_{O,k_3} = \omega_{O,k_1} \circ (\omega_{O,k_2} \circ \omega_{O,k_3}).$$

Infatti, prese le trasformazioni ω_{O,k_1} e ω_{O,k_2} definite sopra, e indicando

$$\omega_{O,k_3} = \begin{cases} x' = k_3 x \\ y' = k_3 y \end{cases} \quad (k_3 \in \mathbb{R} - \{0\})$$

si ottiene

$$(\omega_{O,k_1} \circ \omega_{O,k_2}) \circ \omega_{O,k_3} = \begin{cases} x' = ((k_1 \cdot k_2) \cdot k_3)x \\ y' = ((k_1 \cdot k_2) \cdot k_3)y \end{cases}$$

e

$$\omega_{O,k_1} \circ (\omega_{O,k_2} \circ \omega_{O,k_3}) = \begin{cases} x' = (k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3))x \\ y' = (k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3))y \end{cases}$$

Poiché l'insieme dei numeri reali con l'operazione di prodotto gode della proprietà associativa, sarà $k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3) = (k_1 \cdot k_2) \cdot k_3$.

c) Esiste l'elemento neutro: infatti l'omotetia di centro O e rapporto $k = 1$ funge da elemento neutro rispetto all'operazione di composizione. Consideriamo una generica omotetia di centro O e rapporto k

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$$

e l'omotetia di centro O e rapporto 1

$$\omega_{O,1} = \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Si può verificare che

$$\omega_{O,k} \circ \omega_{O,1} = \omega_{O,1} \circ \omega_{O,k}.$$

d) Per ogni omotetia di centro O e rapporto k, $\omega_{O,k}$, siccome k è un numero reale non nullo per definizione di omotetia, esiste l'omotetia di centro O e rapporto $\frac{1}{k}$, $\omega_{O,\frac{1}{k}}$, che funge da elemento simmetrico di $\omega_{O,k}$. Indichiamo le trasformazioni con

$$\omega_{O,k} = \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \text{ e } \omega_{O,\frac{1}{k}} = \begin{cases} x' = \dfrac{1}{k}x \\ y' = \dfrac{1}{k}y \end{cases}$$

Si verifica che

$$\omega_{O,k} \circ \omega_{O,\frac{1}{k}} = \omega_{O,\frac{1}{k}} \circ \omega_{O,k} = \omega_{O,1}.$$

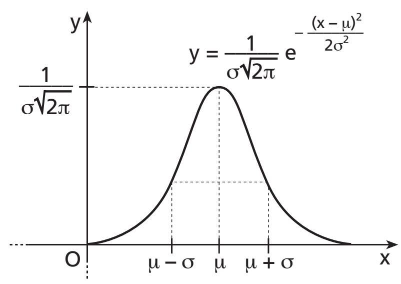
4 Si consideri una variabile casuale X ovvero una grandezza che può assumere tutti i valori reali contenuti in un intervallo I. Il modello matematico che descrive la probabilità P associata a una variabile casuale continua X si basa sulla probabilità che X assuma valori compresi fra due estremi $x_1, x_2 \in I$. Si chiama densità di probabilità e si indica con $f(x)$ quella funzione non negativa tale che il valore della probabilità vale:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

La funzione in questione,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

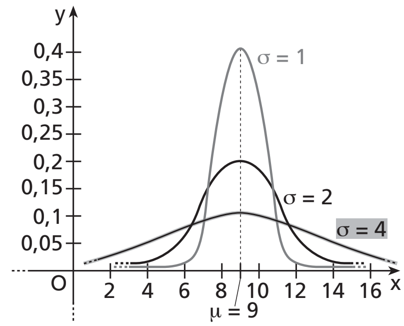
prende il nome di distribuzione normale, o di Gauss (1777-1855), e rappresenta il modo con il quale si distribuiscono le misure ripetute, che differiscono fra loro per motivi accidentali, di una grandezza X.
I parametri μ e σ sono costanti reali positive che coincidono rispettivamente con il valore medio e lo scarto quadratico medio della variabile casuale.



▲ **Figura 12.**

La curva che rappresenta la funzione gaussiana è chiamata curva degli errori accidentali ed è rappresentata in figura 12.
Il grafico è simmetrico rispetto all'asse $x = \mu$, ha asintoto orizzontale $y = 0$, ha massimo nel punto $\left(\mu; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$, ha due flessi nei punti di ascissa $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Se due variabili casuali normali hanno uguale valore medio, si osserva che la curva si appiattisce all'aumentare dello scarto quadratico medio. In figura 13 sono riportate tre distribuzioni normali aventi valore medio $\mu = 9$ e scarti quadratici medi $\sigma = 1, 2, 4$.



▲ **Figura 13.**

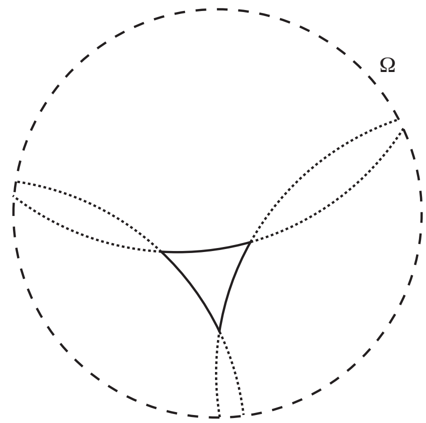
5 Ricordiamo che una geometria si dice non-euclidea se non assume come valido il V postulato di Euclide. Tale postulato afferma che per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data.

Si può dimostrare che, in una geometria in cui valgono gli assiomi e i postulati di Euclide a esclusione del V postulato, il teorema «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» è equivalente al V postulato di Euclide. Di conseguenza questo teorema non può essere valido in un contesto di geometria non-euclidea.

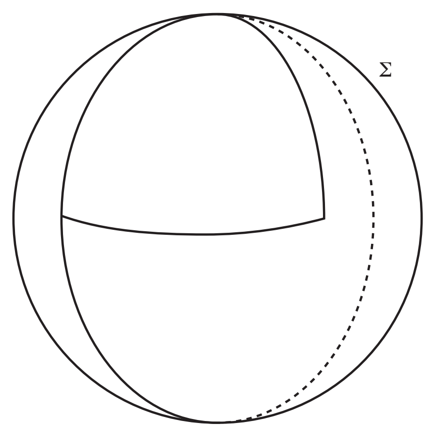
La formulazione del teorema nella geometria iperbolica è «*in un triangolo la somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto*».

Una rappresentazione di un triangolo in un modello di geometria iperbolica si può ottenere tramite il modello di Poincaré. In questo caso si considera come piano un cerchio senza bordo Ω in cui le rette sono archi di circonferenza interni a Ω e ortogonali al suo bordo o diametri di Ω (figura 14).

Nella geometria ellittica vale invece il seguente teorema: «*in un triangolo la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto*». In un modello di geometria ellittica il piano è la superficie Σ di una sfera, i punti antipodali sono identificati e le rette corrispondono alle circonferenze massime di Σ (figura 15).



▲ **Figura 14.**

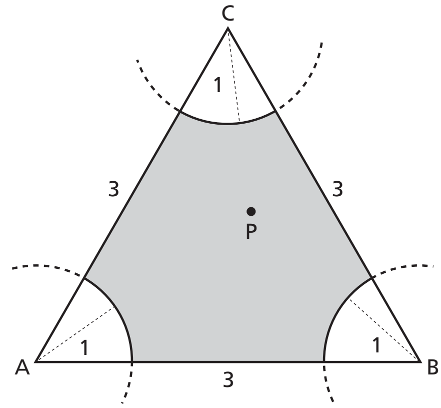


▲ **Figura 15.**

6 Per soddisfare la richiesta il punto P deve essere esterno ai cerchi unitari aventi centro nei vertici del triangolo equilatero ABC di lato di lunghezza 3 (figura 16).

Poiché ciascuno di questi cerchi condivide con il triangolo un settore circolare il cui angolo al centro è $\frac{\pi}{3}$, la somma delle tre aree equivale all'area di un semicerchio di raggio unitario, cioè $\frac{\pi}{2}$. L'area della superficie complementare è quindi pari alla differenza dell'area del triangolo diminuita di $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}.$$



▲ **Figura 16.**

Si può assumere il rapporto tra questa area e l'area del triangolo come misura della probabilità richiesta:

$$P = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} - 1 - \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} \simeq 0{,}59.$$

7 **Primo metodo**

Osserviamo preliminarmente che due curve sono tangenti in un punto se e solo se sono tangenti in quel punto a una stessa retta. Ricaviamo la retta tangente alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1; 2); a tal fine determiniamo la funzione derivata di y

$$y' = 2x$$

il cui valore per $x = 1$ ci dà il coefficiente angolare della retta tangente:

$$y'(1) = 2.$$

Pertanto l'equazione della retta è

$$y = 2(x - 1) + 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x.$$

Costruiamo il fascio di circonferenze tangenti a tale retta nel punto (1; 2). Combiniamo linearmente l'equazione della circonferenza di raggio nullo di centro (1; 2) e l'equazione della retta stessa (elementi «*degeneri*» del fascio):

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + k(y-2x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2(k+1)\,x + (k-4)\,y + 5 = 0.$$

Il centro di tale circonferenza è il punto C di coordinate $(x; y)$:

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = \dfrac{4-k}{2} \end{cases}$$

Ricavando il parametro k dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ricava il luogo geometrico cercato:

$$\begin{cases} k = x - 1 \\ y = \dfrac{4 - x + 1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

Secondo metodo

La famiglia delle circonferenze tangenti in un punto a una data retta costituisce un fascio di circonferenze il cui asse radicale è la retta stessa. Poiché il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale, allora il luogo cercato è la perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza.

8 Se indichiamo con x, y e z le somme di denaro che possiedono i tre gentiluomini quando si siedono per giocare, otteniamo la seguente tabella:

Somme possedute dai gentiluomini			
all'inizio	x	y	z
dopo la prima partita	$x-y-z$	$2y$	$2z$
dopo la seconda partita	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z+2z)=3y-x-z$	$4z$
dopo la terza partita	$4(x-y-z)$	$2(3y-x-z)$	$4z-(2x-2y-2z+3y-x-z)=7z-x-y$

Perciò, siccome dopo la terza partita ciascuno ha la stessa somma di 24 luigi, otteniamo il sistema di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} 4(x-y-z)=24 \\ 2(3y-x-z)=24 \\ 7z-x-y=24 \end{cases}$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione $\begin{cases} x=39 \\ y=21 \\ z=12 \end{cases}$

Osserviamo che la prima fase lascia spazio a un'interpretazione meno rigida: non è così chiaro che il secondo e il terzo giocatore raddoppino la propria somma di denaro. Da una lettura critica si dedurrebbe semplicemente che il secondo e il terzo giocatore raddoppino complessivamente le proprie somme. Se indichiamo con x', y' e z' le somme possedute dai tre giocatori al termine della prima partita si ottiene la seguente tabella:

Somme possedute dai gentiluomini			
all'inizio	x	y	z
dopo la prima partita	x'	y'	z'
dopo la seconda partita	$2x'$	$y'-x'-z'$	$2z'$
dopo la terza partita	$4x'$	$2(y'-x'-z')$	$2z'-(2x'+y'-x'-z')=-x'-y'+3z'$

Sapendo inoltre che $x'=x-y-z$ e $y'+z'=2(y+z)$, si otterrebbe il sistema in x', y' e z'

$$\begin{cases} 4x'=24 \\ 2(y'-x'-z')=24 \\ -x'-y'+3z'=24 \end{cases}$$

che può essere ridotto in forma canonica

$$\begin{cases} x' = 6 \\ y' - x' - z' = 12 \\ -x' - y' + 3z' = 24 \end{cases}$$

Questo sistema ammette l'unica soluzione:

$$\begin{cases} x' = 6 \\ y' = 42 \\ z' = 24 \end{cases}$$

Ma le ulteriori condizioni derivanti dalla precedente soluzione

$$\begin{cases} x - y - z = 6 \\ y + z = 33 \end{cases}$$

non sono sufficienti a determinare univocamente una soluzione: si potrebbe solamente dedurre $x = 39$, ma non sarebbe possibile calcolare i singoli valori di y e z.

9 Consideriamo la funzione:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6.$$

Cercare le soluzioni reali dell'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ equivale a cercare le intersezioni della funzione f con l'asse delle x.
Poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed esistono due valori di x in cui la funzione cambia di segno, ovvero $x_1 = 0$, $f(0) = 6$ e $x_2 = -1$, $f(-1) = -5$, per il teorema di esistenza degli zeri possiamo concludere che esiste almeno un punto C, interno all'intervallo $[-1, 0]$, in cui la funzione si annulla.
Calcoliamo la derivata prima di $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$, ottenendo

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6(x^2 - x + 1).$$

Osserviamo che $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni valore di $x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è strettamente crescente in $\mathbb{R}$. Si conclude che esiste una sola radice dell'equazione di partenza ed è localizzata nell'intervallo $[-1; 0]$.
Per calcolare tali radici utilizziamo il metodo delle secanti, tenendo conto che, nell'intervallo $[-1; 0]$ la derivata seconda vale $f''(x) = 12x - 6$ ed è qui negativa, come $f(-1)$. Vale pertanto la formula ricorsiva:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{-1 - x_n}{-5 - f(x_n)} \cdot f(x_n) \end{cases}$$

Osserviamo che a partire da x_4 comincia a essere stabile la cifra dei centesimi. Pertanto il valore della radice con una precisione di due cifre significative è $-0,67$.

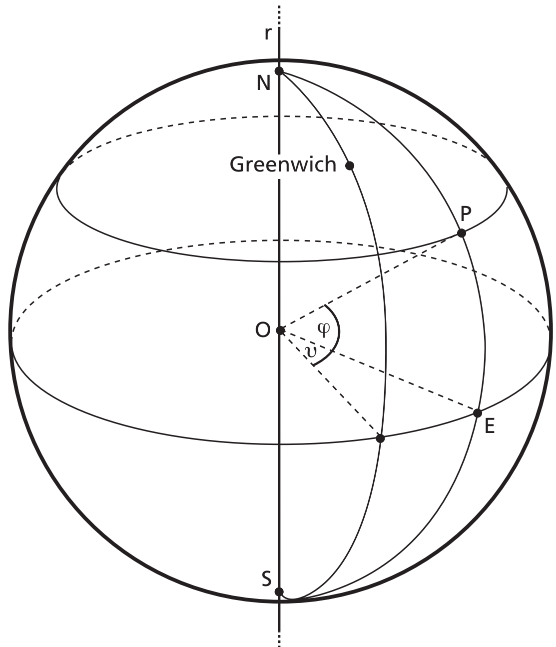
n	x_n
0	0
1	$-0,54545$
2	$-0,65089$
3	$-0,66891$
4	$-0,67190$
5	$-0,67240$
6	$-0,67248$

10 Si osservi la figura 17.

Per definire i meridiani, consideriamo il fascio di piani contenenti l'asse di rotazione *r*. Ciascuno di tali piani interseca la superficie della sfera lungo una circonferenza massima passante per i poli, cioè i punti in cui l'asse interseca la superficie della sfera. Ciascuna delle due semicirconferenze definite dai poli è un arco di meridiano. Fissato come riferimento l'arco di meridiano passante per l'osservatorio di Greenwich (Londra), si definisce longitudine del punto *P* la misura in gradi dell'angolo convesso compreso tra il semipiano contenente l'arco di meridiano passante per *P* e il semipiano contenente il meridiano di Greenwich, specificando se l'angolo sia percorso verso *E* o verso *O* rispetto a Greenwich (longitudine 0°).

Per definire la latitudine si immagini il fascio di piani perpendicolari all'asse *r*: ciascuno «taglia» la superficie della sfera lungo una circonferenza detta parallelo. Il parallelo definito dall'unico piano del fascio che contiene il centro *O* della sfera terrestre è l'equatore: si definisce latitudine (nord o sud) di un punto *P* la misura in gradi dell'angolo acuto $\varphi = P\hat{O}E$, dove *E* è il punto di intersezione tra l'equatore e l'arco di meridiano passante per *P*. (L'equatore è ovviamente l'insieme dei punti a latitudine zero.)

Pertanto la posizione di un punto *P* sulla superficie terrestre è univocamente determinata assegnando due angoli orientati, per esempio: 10° long. E, 45° lat. N.



▲ **Figura 17.**