ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione integrale:

$$f(x)=\int_0^x (e^{3t}+2e^{2t}-3e^{t})dt.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si scriva l'equazione della normale alla curva C nel punto di ascissa $\ln 2$.
3. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse delle ascisse e dalla retta di equazione $x=\ln 3$.
4. Tenuto conto che $\ln 2=\int_1^2 \frac{1}{x}dx$, si calcoli un valore approssimato di $\ln 2$, utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

PROBLEMA 2

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2; 0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

   $$\overline{PO}^2+2\overline{PA}^2=8,$$

   controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y=ax^3+bx^2+cx+d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

QUESTIONARIO

1 Si calcoli il volume del solido generato in una rotazione completa attorno all'asse delle x della regione finita di piano delimitata dalla curva $y=\frac{2}{x}$ e dalla retta di equazione $y=-x+3$.

2 Si calcoli il valore medio della funzione $y=\operatorname{sen}^3 x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \pi$.

3 Data la funzione $y=x^3+kx^2-kx+3$, nell'intervallo chiuso [1; 2], si determini il valore di k per il quale sia a essa applicabile il teorema di Rolle e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

4 Si consideri la seguente proposizione: «In ogni triangolo isoscele la somma delle distanze di un punto della base dai due lati uguali è costante». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

5 Si dimostri che l'equazione $e^x-x^3=0$ ha un'unica radice reale e se ne calcoli un valore approssimato con due cifre decimali esatte.

6 Si scelga a caso un punto P all'interno di un cerchio. Si determini la probabilità che esso sia più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio.

7 Servendosi in maniera opportuna del principio di Cavalieri nel piano, si dimostri che l'area di un'ellisse di semiassi a, b è $S=\pi ab$.

8 Si calcoli il limite della funzione $\frac{x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}$, quando x tende a 0.

9 Si verifichi che la curva di equazione $y=x^3+3x^2-1$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

10 Si risolva la disequazione $5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Data la funzione $f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt$, risolviamo l'integrale al secondo membro:

$$\int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dx = \left[\frac{1}{3}e^{3t} + e^{2t} - 3e^t\right]_0^x = \frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x} - 3e^x - \frac{1}{3} - 1 + 3 = \frac{e^{3x} + e^{2x} - 9e^x + 5}{3}.$$

Ponendo $a = e^x$, il numeratore dell'ultimo termine diventa il polinomio $a^3 + 3a^2 - 9a + 5$, il quale si scompone, utilizzando la regola di Ruffini, in $(a-1)^2(a+5)$. In conclusione la funzione da studiare è la seguente:

$$f(x) = \frac{1}{3}(e^x - 1)^2\,(e^x + 5).$$

Essa ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali; si annulla per $x = 0$ e altrove è sempre positiva.
I limiti agli estremi del campo di esistenza valgono:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{3}(e^x - 1)^2\,(e^x + 5) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3}(e^x - 1)^2\,(e^x + 5) = \frac{5}{3}.$$

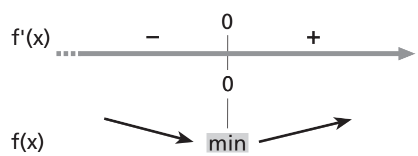
Ne segue che non vi sono asintoti obliqui, mentre la retta $y = \frac{5}{3}$ è asintoto orizzontale.
Consideriamo la derivata prima. Essendo $f(x) = \int_0^x (e^{3t} + 2e^{2t} - 3e^t)dt$, per il teorema fondamentale del calcolo integrale vale:

$$f'(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x = e^x(e^{2x} + 2e^x - 3) = e^x(e^x + 3)(e^x - 1).$$

Poiché il prodotto $e^x(e^x + 3)$ è sempre positivo, segue che:

$$f'(x) \geq 0 \;\rightarrow\; e^x - 1 \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 0.$$

Pertanto la funzione ammette un minimo in corrispondenza dell'origine degli assi, è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$ (figura 1).

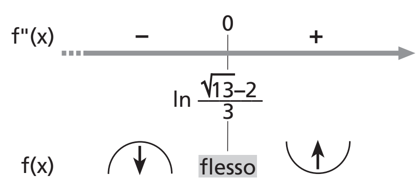


▲ **Figura 1.**

Studiamo infine la derivata seconda:

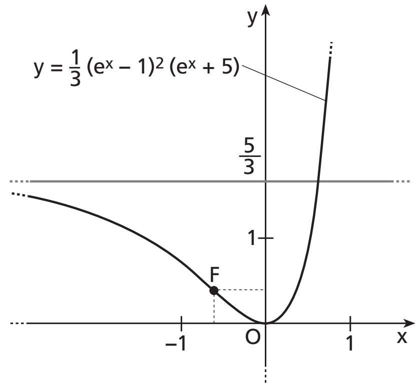
$$f''(x) = 3e^{3x} + 4e^{2x} - 3e^x = e^x(3e^{2x} + 4e^x - 3) = 3e^x\left(e^x + \frac{\sqrt{13}+2}{3}\right)\left(e^x - \frac{\sqrt{13}-2}{3}\right).$$

Essa si annulla solo se $e^x = \frac{\sqrt{13}-2}{3}$, cioè per $x = \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$, mentre è positiva per $x > \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$, negativa per $x < \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$. Pertanto la funzione ha concavità rivolta verso l'alto per $x > \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$, rivolta verso il basso per $x < \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$ e un flesso in $x = \ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}$ (figura 2).



▲ **Figura 2.**

Indicato con F il punto di flesso di coordinate $\left(\ln\frac{\sqrt{13}-2}{3}; \frac{364-92\sqrt{13}}{81}\right)$, il grafico della curva C è rappresentato in figura 3.



▲ **Figura 3.**

2. Per definizione, la normale alla curva nel punto di ascissa $\ln 2$ è la retta perpendicolare alla tangente alla curva nel punto stesso. Tale punto ha ordinata:

$$f(\ln 2) = \frac{1}{3}(2-1)^2(2+5) = \frac{7}{3}.$$

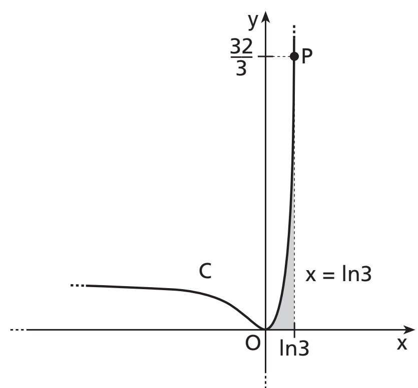
Il coefficiente angolare della retta tangente in questo punto vale:

$$f'(\ln 2) = 2(2+3)(2-1) = 10,$$

quindi il coefficiente della retta a essa perpendicolare è $m = -\frac{1}{10}$. Pertanto l'equazione della retta normale alla curva nel punto $\left(\ln 2; \frac{7}{3}\right)$ è:

$$y - \frac{7}{3} = -\frac{1}{10}(x - \ln 2) \rightarrow y = -\frac{x}{10} + \frac{\ln 2}{10} + \frac{7}{3}.$$

3. In figura 4 è evidenziata l'area della superficie piana da calcolare. La retta $x = \ln 3$ e la curva C si intersecano nel punto $P\left(\ln 3; \frac{32}{3}\right)$.



▲ **Figura 4.**

L'area di tale superficie vale:

$$A = \int_0^{\ln 3} f(x)dx = \int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x} + 3e^{2x} - 9e^x + 5}{3}\, dx =$$

$$= \int_0^{\ln 3} \left(\frac{e^{3x}}{3} + e^{2x} - 3e^x + \frac{5}{3}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{e^{3x}}{9} + \frac{e^{2x}}{2} - 3e^x + \frac{5}{3}x\right]_0^{\ln 3} = \frac{e^{\ln 27}}{9} + \frac{e^{\ln 9}}{2} - 9 + \frac{5}{3}\ln 3 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + 3 =$$

$$= 3 + \frac{9}{2} - 9 + \frac{5}{3}\ln 3 - \frac{1}{9} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{8}{9} + \frac{5}{3}\ln 3.$$

4. Per il calcolo approssimato di ln2 utilizziamo il metodo dei rettangoli. Dividendo, ad esempio, l'intervallo [1; 2] in 20 parti uguali e indicata con g la funzione $g(x) = \frac{1}{x}$, si ottiene:

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx \simeq \frac{2-1}{20}\left[g(1) + g\left(\frac{21}{20}\right) + g\left(\frac{22}{20}\right) + \ldots + g\left(\frac{39}{20}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{20}\left[1 + \frac{20}{21} + \frac{20}{22} + \ldots + \frac{20}{39}\right] \simeq 0{,}706.$$

Si osserva che il valore di $\ln 2$ calcolato tramite calcolatrice è $\ln 2 = 0{,}693\ldots$.

PROBLEMA 2

1. Sia $P(x; y)$ un generico punto del piano cartesiano Oxy. Utilizzando la formula della distanza tra due punti si ricava:

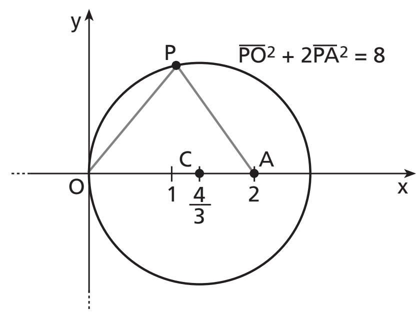
$$\overline{PO}^2 = x^2 + y^2,$$

$$\overline{PA}^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4,$$

pertanto risulta:

$$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8 \rightarrow x^2 + y^2 + 2(x^2 + y^2 - 4x + 4) = 8 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 - 8x = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{8}{3}x = 0.$$

L'equazione è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$. Essa rappresenta una circonferenza se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0$. Nel nostro caso si ha $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = \frac{16}{9} > 0$. Pertanto il luogo trovato è una circonferenza, con centro $C\left(\frac{4}{3}; 0\right)$ e raggio $r = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ (figura 5).



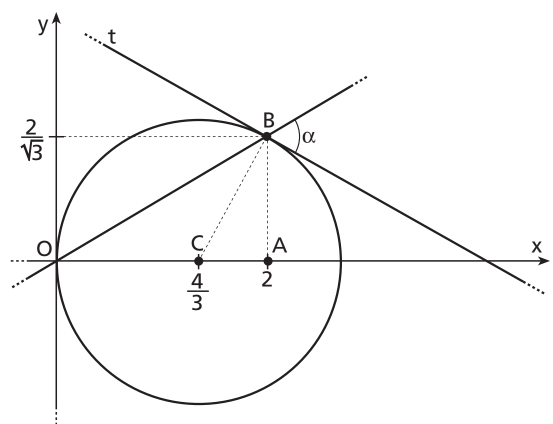
▶ **Figura 5.**

2. Per trovare l'ordinata di B, punto della circonferenza avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva, sostituiamo nell'equazione della circonferenza il valore 2 a x. Otteniamo:

$$4 + y^2 - \frac{16}{3} = 0 \rightarrow y^2 = \frac{4}{3} \rightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Poiché l'ordinata di B è positiva, il punto ha coordinate $\left(2; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Tracciamo la retta t, tangente alla circonferenza nel punto B e la retta OB (figura 6).

Per calcolare l'ampiezza dell'angolo α rappresentato in figura, determiniamo i coefficienti angolari delle rette OB e t. La retta OB ha coefficiente angolare $m_{OB} = \frac{y_B - y_O}{x_B - x_O} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - 0}{2 - 0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



▲ **Figura 6.**

Considerata la retta tangente t passante per il punto $B\left(2; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, il suo coefficiente angolare m_t è l'antireciproco del coefficiente angolare della retta passante per il raggio CB, ovvero:

$$m_{CB} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} - 0}{2 - \frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3},$$

pertanto $m_t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

L'angolo acuto α, formato dalla retta OB con la tangente t, ha tangente goniometrica:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_{OB} - m_t}{1 + m_{OB} \cdot m_t} \to \operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}.$$

Risulta allora che $\alpha = 60°$.

3. Affinché il grafico della funzione $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ passi per l'origine e qui presenti un flesso con tangente orizzontale, devono essere verificate le seguenti condizioni:

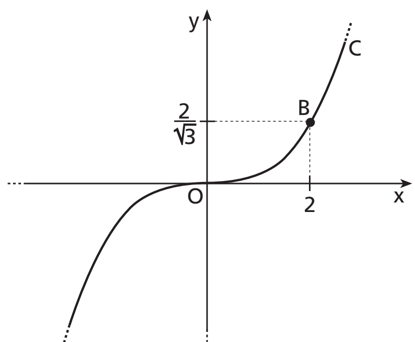
$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 0.$$

Poiché $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ e $f''(x) = 6ax + 2b$, tali condizioni sono verificate rispettivamente se $d = 0$, $c = 0$, $b = 0$. L'equazione si riduce a $y = ax^3$.
Determiniamo il coefficiente a sostituendo le coordinate di $B\left(2; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ alla funzione:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = a \cdot 2^3 \to a = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

L'equazione della parabola cubica è quindi $y = \frac{1}{4\sqrt{3}} x^3$.

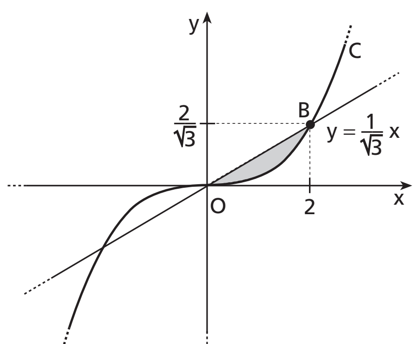
Essa è definita in tutto $\mathbb{R}$, interseca gli assi nell'origine che è anche l'unico punto di flesso. È positiva nell'intervallo $]0; +\infty[$, negativa in $]-\infty; 0[$ e sempre crescente. La concavità è rivolta verso l'alto in $]0; +\infty[$, verso il basso in $]-\infty; 0[$. Il suo grafico C è rappresentato in figura 7.



▲ **Figura 7.**

4. In figura 8 è indicata la regione finita di piano di cui si richiede di calcolare l'area.
La retta OB ha equazione $y = \frac{1}{\sqrt{3}} x$, pertanto:

$$\text{Area} = \int_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{4\sqrt{3}} x^3\right) dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



▲ **Figura 8.**

QUESTIONARIO

1 Determiniamo le intersezioni tra l'iperbole di equazione $y=\frac{2}{x}$ e la retta $y=-x+3$ risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=\frac{2}{x} \\ y=-x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ y=-x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Indicate con A e B tali intersezioni, nella figura 9 è rappresentato il solido di rotazione richiesto.

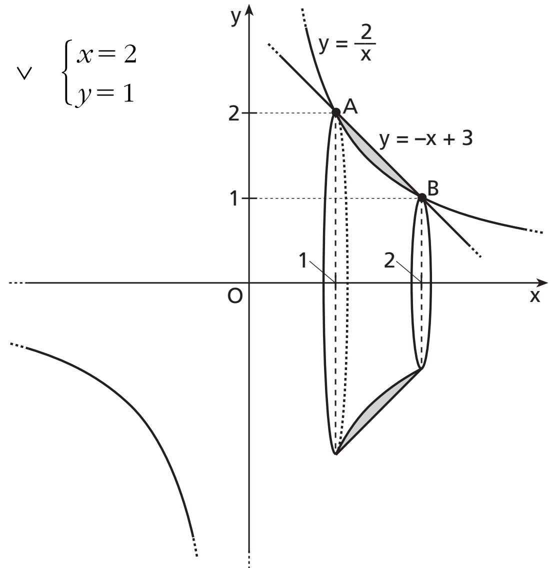
Il corrispondente volume vale:

$$V=\pi\int_1^2\left[(-x+3)^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2\right]dx=$$

$$=\pi\int_1^2\left(x^2-6x+9-\frac{4}{x^2}\right)dx=$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-3x^2+9x+\frac{4}{x}\right]_1^2=$$

$$=\pi\left(\frac{8}{3}-12+18+2-\frac{1}{3}+3-9-4\right)=\frac{\pi}{3}.$$



▲ **Figura 9.**

2 Per definizione, il valore medio di una funzione $y=f(x)$, continua nell'intervallo $[a;\ b]$, è:

$$M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Se $f(x)=\mathrm{sen}^3 x$, nell'intervallo $[0;\ \pi]$ risulta:

$$M=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}^3 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,x\cdot \mathrm{sen}^2 x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{sen}\,x(1-\cos^2 x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,x\cos^2 x)dx=\frac{1}{\pi}\left[-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^\pi=\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3\pi}.$$

3 Una funzione $y=f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle in un intervallo $[a;\ b]$ se è continua in $[a;\ b]$, se è derivabile nei suoi punti interni e se $f(a)=f(b)$. In tal caso esiste un punto $x=c$ nell'intervallo $]a;\ b[$ tale che $f'(c)=0$. Se consideriamo $f(x)=x^3+kx^2-kx+3$ nell'intervallo $[1;\ 2]$, le prime due ipotesi sono verificate in quanto la funzione è di tipo polinomiale per ogni k reale. È allora necessario imporre la condizione $f(1)=f(2)$. Poiché risulta:

$$f(1)=1+k-k+3=4,$$
$$f(2)=8+4k-2k+3=11+2k,$$

allora vale:

$$f(1)=f(2)\rightarrow 11+2k=4\rightarrow k=-\frac{7}{2}.$$

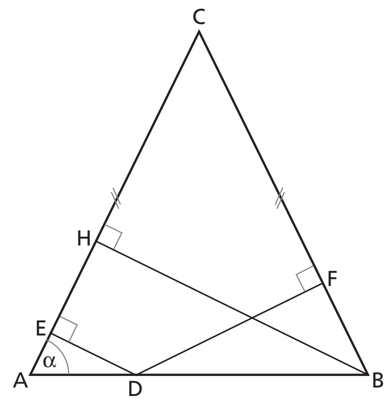
Pertanto il valore di k cercato è $k=-\frac{7}{2}$. In sua corrispondenza si ottiene la funzione $f(x)=x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{2}x+3$, la cui derivata è $f'(x)=3x^2-7x+\frac{7}{2}$, che si annulla per $x=\frac{7\pm\sqrt{7}}{6}$.

Il punto che soddisfa il teorema di Rolle nell'intervallo $]1;\ 2[$ è quindi $x=\frac{7+\sqrt{7}}{6}$.

4 Consideriamo un triangolo isoscele ABC di base AB, dove BH è l'altezza relativa al lato obliquo AC (figura 10). Sia D un qualsiasi punto sulla base ed ED e DF le sue distanze dai lati obliqui.
Consideriamo la somma delle distanze $\overline{ED} + \overline{DF}$. Sia α l'angolo alla base del triangolo isoscele. Ne segue che $\overline{ED} = \overline{AD}$ sen α e $\overline{DF} = \overline{DB}$ sen α. Risulta pertanto:

$$\overline{ED} + \overline{DF} = (\overline{AD} + \overline{DB}) \text{ sen}\,\alpha = \overline{AB} \text{ sen}\,\alpha.$$

Ma anche l'altezza BH ha lunghezza $\overline{BH} = \overline{AB}$ sen α.
Poiché in un triangolo isoscele la lunghezza dell'altezza relativa al lato obliquo è univocamente determinata, ne segue che la somma delle distanze di un qualsiasi punto della base dai due lati obliqui è anch'essa univocamente determinata, perciò costante. L'affermazione è pertanto vera.



▲ **Figura 10.**

5 Il testo del quesito è errato poiché si dimostra che l'equazione $e^x - x^3 = 0$ ammette più di una radice reale nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$. Consideriamo infatti la funzione $f(x) = e^x - x^3$. Essa è continua in $\mathbb{R}$; inoltre $f(1) = e - 1 > 0$ ed $f(2) = e^2 - 8 < 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri esiste almeno una radice reale nell'intervallo $]1; 2[$. Ma risulta anche: $f(4) = e^4 - 64 < 0$ e $f(5) = e^5 - 125 > 0$. Dunque esiste anche un'altra radice reale nell'intervallo $]4; 5[$.
Un esempio, invece, di funzione che ammette un'unica radice reale è $g(x) = e^x + x^3$. Infatti essa è continua e risulta:

$$g(-1) = e^{-1} - 1 \simeq 0{,}6 < 0,$$
$$g(1) = e + 1 > 0.$$

La sua derivata è $g'(x) = e^x + 3x^2$ che è positiva in $\mathbb{R}$. La funzione suddetta è strettamente crescente e ammette un'unica radice che è interna all'intervallo $[-1; 1]$.
Per completare comunque il quesito, calcoliamo un valore approssimato con due cifre decimali esatte della radice della funzione $f(x) = e^x - x^3$ nell'intervallo $]1; 2[$. Utilizzando il metodo di bisezione otteniamo la seguente tabella.

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\frac{x_1 + x_2}{2}$	ε_n
1	2	1,7	− 0,6	1,5	0,5
1,5	2	1,1	− 0,6	1,75	0,25
1,75	2	0,4	− 0,6	1,875	0,125
1,75	1,875	0,4	− 0,07	1,8125	0,0625
1,8125	1,875	0,17	− 0,07	1,8438	0,03125
1,8438	1,875	0,052	− 0,07	1,8595	0,0156
1,8595	1,875	0,009	− 0,07	1,8673	0,008

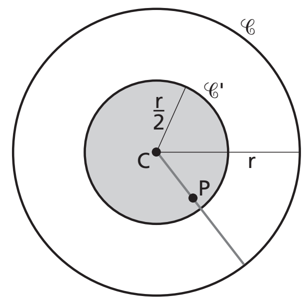
La soluzione appartiene all'intervallo $[1{,}8595; 1{,}875]$ e una sua approssimazione con due cifre decimali esatte è:

$$x = 1{,}8673.$$

6 Un punto P, interno a un cerchio $\mathscr{C}$ di centro C e raggio r, è più vicino al centro che alla circonferenza del cerchio stesso se esso è interno al cerchio $\mathscr{C}'$ di centro C e raggio $\frac{r}{2}$ (figura 11).

Il rapporto tra l'area del cerchio $\mathscr{C}'$ e quella del cerchio $\mathscr{C}$ fornisce la probabilità richiesta, che vale:

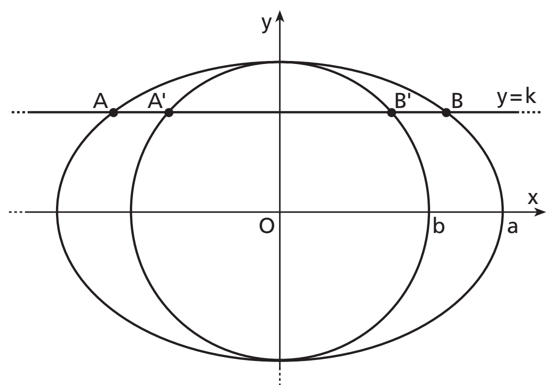
$$P = \frac{\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2}{\pi r^2} = \frac{1}{4}.$$



▲ **Figura 11.**

7 Il principio di Cavalieri nel piano afferma che se un fascio di rette parallele stacca su due figure piane coppie di segmenti uguali o proporzionali, allora anche le aree delle due figure sono uguali o proporzionali con lo stesso rapporto di proporzionalità.

Consideriamo in un sistema cartesiano ortogonale un'ellisse di semiassi a e b, di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, e una circonferenza di raggio b, di equazione $x^2 + y^2 = b^2$ (figura 12).



▲ **Figura 12.**

Consideriamo la retta parallela all'asse delle x di equazione $y = k$, con $k \in \,]-b;\ b[$. Essa interseca l'ellisse nei punti A e B, le cui coordinate si trovano risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = k \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \to \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1 \quad \to \quad x^2 = \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right) \cdot a^2 \quad \to \quad x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2},$$

pertanto risulta:

$$A\left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2};\ k\right) \text{ e } B\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2};\ k\right).$$

Osserviamo che la corda AB intercettata sull'ellisse ha lunghezza:

$$\overline{AB} = \left|2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}\right| = 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}.$$

Intersechiamo ora la retta $y = k$ con la circonferenza:

$$\begin{cases} y = k \\ x^2 + y^2 = b^2 \end{cases} \quad \to \quad x^2 = b^2 - k^2 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{b^2 - k^2};$$

i punti di intersezione sono: $A'(-\sqrt{b^2 - k^2};\ k)$ e $B'(\sqrt{b^2 - k^2};\ k)$.

La corda intercettata ha lunghezza: $\overline{A'B'} = \left|2\sqrt{b^2 - k^2}\right| = 2\sqrt{b^2 - k^2}$.

Osserviamo che, al variare di k nell'intervallo $]-b;\ b[$, il rapporto tra la lunghezza delle due corde intercettate rispettivamente sull'ellisse e sulla circonferenza è costante:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - k^2}}{2\sqrt{b^2 - k^2}} = \frac{a}{b}.$$

Ne segue, per il principio di Cavalieri, che anche il rapporto delle rispettive aree deve valere $\frac{a}{b}$, cioè:

$$\frac{A_{ellisse}}{A_{circonferenza}} = \frac{a}{b} \quad \rightarrow \quad A_{ellisse} = \frac{a}{b} A_{circonferenza} = \frac{a}{b} \cdot \pi b^2 = \pi ab.$$

In conclusione l'area di un'ellisse di semiassi a e b è πab.

8 Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Procediamo applicando più volte il teorema di De L'Hospital:

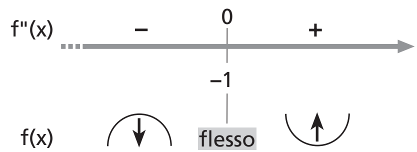
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1 - \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos x) - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + x \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{3 \cos x - x \operatorname{sen} x} = \frac{1}{3}.$$

9 Determiniamo il flesso della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ studiando il segno della sua derivata seconda:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x,$$
$$f''(x) = 6x + 6.$$

Quest'ultima si annulla per $x = -1$, è positiva per $x > -1$ e negativa altrove (figura 13).



▲ **Figura 13.**

La funzione ha un flesso nel punto $x = -1$, il quale ha immagine $f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$. Indichiamo con $F(-1; 1)$ il punto di flesso del grafico corrispondente.
La simmetria centrale di centro $F(-1; 1)$ ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = -2 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x = -2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}.$$

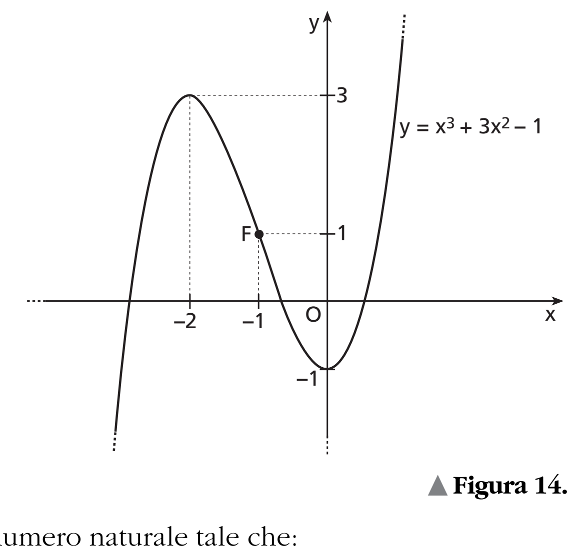
Trasformiamo l'equazione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ secondo questa simmetria:

$$2 - y'(-2 - x')^3 + 3(-2 - x')^2 - 1.$$

Togliendo gli apici e svolgendo i calcoli, si ricava:

$$2 - y = -8 - x^3 - 12x - 6x^2 + 12 + 3x^2 + 12x - 1$$
$$2 - y = -x^3 - 3x^2 + 3$$
$$y = x^3 + 3x^2 - 1$$

Ritrovando l'equazione della curva di partenza, possiamo concludere che essa è simmetrica rispetto al punto F. Il suo grafico è rappresentato nella figura 14.



▲ **Figura 14.**

10 La disequazione assume significato solo se x è un numero naturale tale che:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x + 2 \geq 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad x \geq 3.$$

Risolviamo la disequazione utilizzando la formula del coefficiente binomiale:

$$5\binom{x}{3} \leq \binom{x+2}{3} \quad \rightarrow \quad 5\frac{x!}{(x-3)!3!} \leq \frac{(x+2)!}{3!(x-1)!} \quad \rightarrow \quad 5x(x-1)(x-2) \leq (x+2)(x+1)x.$$

Essendo $x \geq 3$, pertanto positivo, possiamo dividere per x:

$$5(x-1)(x-2) \leq (x+2)(x+1) \quad \rightarrow \quad 5x^2 - 15x + 10 \leq x^2 + 3x + 2 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 9x + 4 \leq 0.$$

Tale disequazione è verificata per $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$. Poiché l'equazione di partenza ammette come soluzioni accettabili solo i numeri naturali x tali che $x \geq 3$, le sue soluzioni sono pertanto $x_1 = 3$ e $x_2 = 4$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 1 pag. W 170 (punti a, c) • Esercizio 472 pag. V 75 • Esercizio 259 pag. W 122 • Esercizio 52 pag. ι 54 • Quesito 8 pag. ι 62
Problema 2	• Problema 53 pag. L 368 • Esercizio 226 pag. O 123 • Quesito 9 pag. W 167 • Esercizio 43 pag. V 241 • Esercizio 219 pag. W 118
Quesito 1	• Esercizio 269 pag. W 124 • Problema 281 pag. W 125
Quesito 2	• Esercizio 176 pag. W 114
Quesito 3	• Esercizio 20 pag. V 115
Quesito 5	• Quesito 5 pag. W 167 • Quesito 3 pag. ι 31
Quesito 6	• Test 9 pag. α 93
Quesito 8	• Quesito 9 pag. W 169 • Esercizio 153 pag. V 129
Quesito 9	• Esercizio 148 pag. V 187 • Esercizio 225 pag. J_1 73
Quesito 10	• Quesito 163 pag. α 37