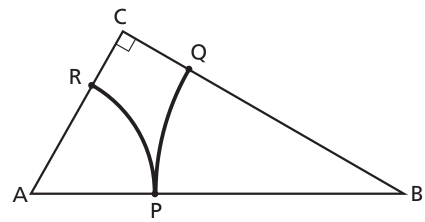
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2008

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $AB = a$ e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$ (figura 1).

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre a x affinché la costruzione sia realizzabile.



▲ **Figura 1.**

b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di $S(x)$.

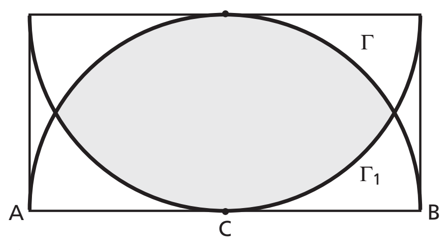
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutte quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$ (figura 2), si affrontino le seguenti questioni.

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.



▲ **Figura 2.**

b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

QUESTIONARIO

1 Si consideri la seguente proposizione: "Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

2 Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

3 Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?

4 Si esponga la regola del marchese de L'Hospital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

5 Si determini un polinomio $P(x)$ di terzo grado tale che:

$$P(0) = P'(0) = 0, \quad P(1) = 0 \text{ e } \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}.$$

6 Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, con $n > 3$, sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

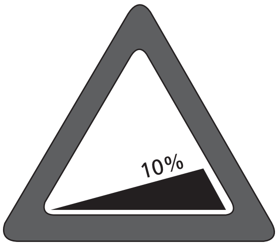
7 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

8 Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9 Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$; esiste $\lim_{x \to 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.

10 Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (figura 3) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?



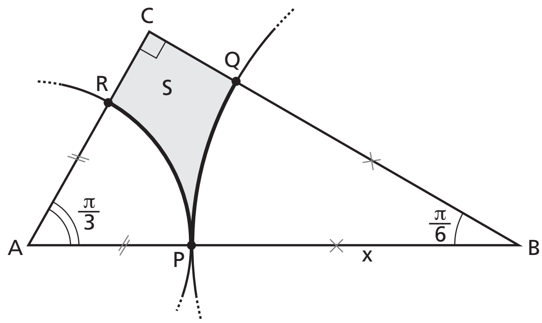
▲ **Figura 3.**

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

a) Considerando il triangolo ABC, per costruzione si osserva che $A\hat{B}C = \frac{\pi}{6}$, $AC = \frac{a}{2}$, $QB = PB = x$, $AR = AP = a - x$ (figura 4).
La costruzione è realizzabile fino al caso limite di coincidenza tra il punto Q e il punto C, e in tal caso $x = BC = a\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, e al caso limite di coincidenza tra il punto R e il punto C, cioè per $x = \frac{a}{2}$. I limiti geometrici per la x sono dunque:

$$\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



▲ **Figura 4.**

b) L'area S del quadrilatero mistilineo $PQCR$ (figura 4) si esprime come differenza tra l'area del triangolo ABC e la somma delle aree dei due settori circolari $Q\hat{B}P$ e $P\hat{A}R$, di raggi rispettivamente x e $a - x$. La funzione area $S = S(x)$ vale:

$$S = \text{Area}(ABC) - [\text{Area}(Q\hat{B}P) + \text{Area}(P\hat{A}R)] \rightarrow$$

$$\rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \left[\frac{\pi}{6} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}(a-x)^2\right] = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{12}[x^2 + 2(a-x)^2].$$

Per determinare i valori di massimo e minimo di $S(x)$ nell'intervallo $\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a$, calcoliamo la derivata prima e ne studiamo il segno:

$$S'(x) = -\frac{\pi}{6}[x - 2(a-x)] = -\frac{\pi}{6}(3x - 2a).$$

Lo studio del segno della derivata indica che:

$$S'(x) \geq 0 \text{ per } \frac{a}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}a \text{ e } S'(x) < 0 \text{ per } \frac{2}{3}a < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Quindi il valore $x = \frac{2}{3}a$ è un punto di massimo; in tal caso l'area S è massima e vale:

$$S_{\max} = S\left(\frac{2}{3}a\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{18}\right)a^2.$$

Per determinare il valore minimo di $S(x)$, dobbiamo valutare tale funzione nei punti estremi dell'intervallo di variabilità di x:

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{16}\right)a^2 \simeq 0{,}02\ a^2,$$

$$S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)a^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right]a^2 \simeq 0{,}01\ a^2.$$

Poiché $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) < S\left(\frac{a}{2}\right)$, l'area minima si ottiene per $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ e il corrispondente valore vale:

$$S_{\min} = S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right]a^2.$$

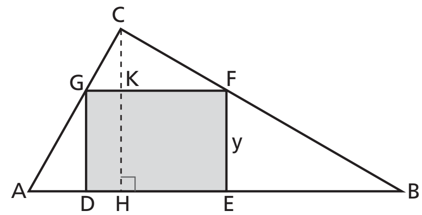
c) Consideriamo il rettangolo *DEFG* come in figura 5 e assumiamo come incognita y l'altezza DG.

Risulta $AB \cdot CH = AC \cdot BC$, da cui si ricava CH:

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}a,$$

mentre

$$CK = CH - DG = \frac{\sqrt{3}}{4}a - y.$$



▲ **Figura 5.**

Consideriamo ora i triangoli ABC e GFC; essi sono simili per il Teorema di Talete e, in particolare, vale la proporzione tra basi e altezze: $AB : FG = CH : CK$.

Ricaviamo FG e sostituiamo le espressioni degli altri segmenti:

$$FG = \frac{AB \cdot CK}{CH} \rightarrow FG = \frac{a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a - y\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}a} = a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y.$$

La funzione $R(y)$, area del rettangolo inscritto nel triangolo ABC, risulta:

$$R(y) = \left(a - \frac{4\sqrt{3}}{3}y\right)y = ay - \frac{4\sqrt{3}}{3}y^2.$$

L'intervallo di variabilità di y è $0 < y < \frac{\sqrt{3}}{4}a$; nei casi in cui y uguaglia uno dei due estremi, il rettangolo $DEFG$ degenera in un segmento.

Osserviamo che $R(y)$ è una funzione parabolica con concavità rivolta verso il basso e assume quindi il valore massimo nel suo vertice di ascissa:

$$y_V = \frac{\sqrt{3}}{8}a.$$

In corrispondenza di tale valore l'area R è massima e vale:

$$R_{\max} = R\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2.$$

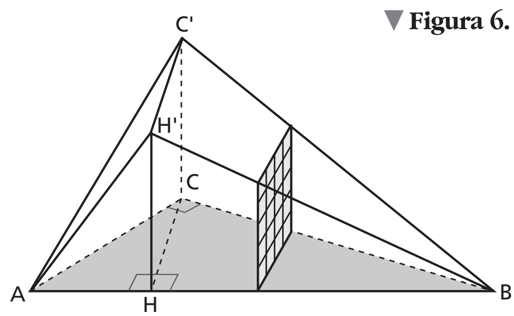
d) Il solido W si compone di due piramidi aventi in comune la base quadrata $CHH'C'$ come in figura 6.

Una piramide ha altezza AH, mentre l'altra ha altezza BH. Ricordando la formula del volume della piramide, il volume del solido W risulta uguale a:

$$\frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AH} + \frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{HB} = \frac{1}{3}\overline{CH}^2 \cdot \overline{AB} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{16}.$$

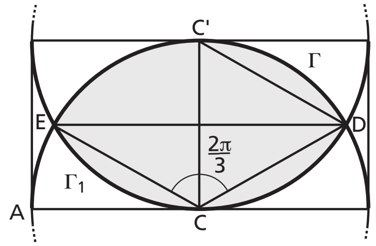
▼ **Figura 6.**



PROBLEMA 2

a) Indicate con E e D le intersezioni delle semicirconferenze corrispondenti ai due semicerchi, congiungiamo i punti E con D e C con C'. Consideriamo i lati del triangolo CDC' i cui vertici sono i centri C e C' dei due semicerchi Γ e Γ_1 e uno dei due punti di intersezione tra di essi (figura 7). Risulta:

$\overline{CD} = 1$ perché D appartiene a Γ,
$\overline{C'D} = 1$, perché D appartiene a Γ_1,
$\overline{CC'} = 1$, per costruzione.



▲ **Figura 7.**

Il triangolo CDC' è pertanto equilatero e l'angolo $E\hat{C}D$ misura $\frac{2}{3}\pi$.

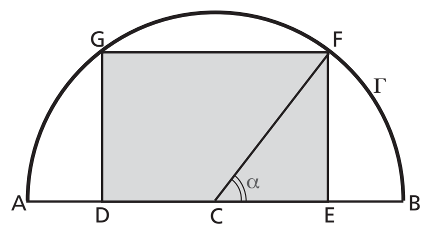
L'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi risulta uguale al doppio della differenza tra l'area del settore circolare $E\hat{C}D$ e l'area del triangolo ECD:

$$\text{Area} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Consideriamo il semicerchio Γ e assumiamo come incognita l'angolo $\alpha = E\hat{C}F$ (figura 8).

Le limitazioni affinché il rettangolo non sia degenere sono:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$



▲ **Figura 8.**

Dalla trigonometria risulta:

$\overline{EF} = \overline{CF} \cdot \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \overline{EF} = \operatorname{sen}\alpha$,
$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{CE} = 2 \cdot \overline{CF} \cdot \cos\alpha \rightarrow \overline{DE} = 2\cos\alpha$.

L'area del rettangolo $GDEF$ vale:

$$R(\alpha) = \overline{EF} \cdot \overline{DE} \rightarrow R(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}2\alpha.$$

Studiamo la derivata prima e il suo segno:

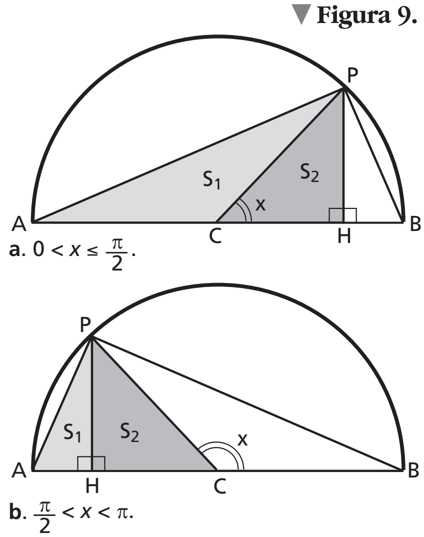
$$R'(\alpha) \geq 0 \text{ per } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \quad R'(\alpha) < 0 \text{ per } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

La funzione area $R(\alpha)$ assume valore massimo per $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

In tal caso l'area massima del rettangolo vale 1 e le corrispondenti dimensioni sono:

$$\overline{DE} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

▼ **Figura 9.**



c) Se P è un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB e $P\hat{C}B = x$, si osservano dalla figura 9 due possibili configurazioni a seconda della variabilità dell'angolo x. Nel primo caso l'angolo x è acuto o retto $\left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, mentre nel secondo caso è ottuso $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$.

Caso a: $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$

Le misure dei lati dei triangoli PCH e APH, utili per determinare le aree, sono:

$$PH = \operatorname{sen}x, \quad CH = \cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$$

Le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x(1+\cos x),\ S_2(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_1(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{1+\cos x}{\cos x}.$$

Caso b: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Le misure dei lati dei triangoli PCH e APH, utili per determinare le aree, sono:

$$PH = \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \quad CH = \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$$

Quindi le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x(1+\cos x), \qquad S_2(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,(-\cos x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_2(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = -\frac{1+\cos x}{\cos x}.$$

d) Prescindendo dai limiti geometrici del problema risulta $f_1(x) = -f_2(x)$, ovvero le due funzioni sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Pertanto si conviene di studiare la funzione

$$f_1(x) = \frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 1.$$

Tale funzione è periodica, di periodo 2π: ci limitiamo a studiarla nell'intervallo $[0;\ 2\pi]$ nel quale è definita per $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

La curva interseca gli assi cartesiani in $(0;\ 2)$ e $(\pi;\ 0)$; è positiva per $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x \leq 2\pi$.
I limiti nei punti di discontinuità valgono

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \mp\infty,\ \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^{\pm}} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \pm\infty,$$

pertanto la funzione ha asintoti verticali di equazioni $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

La derivata prima ha espressione e segno:

$$f'_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x},$$

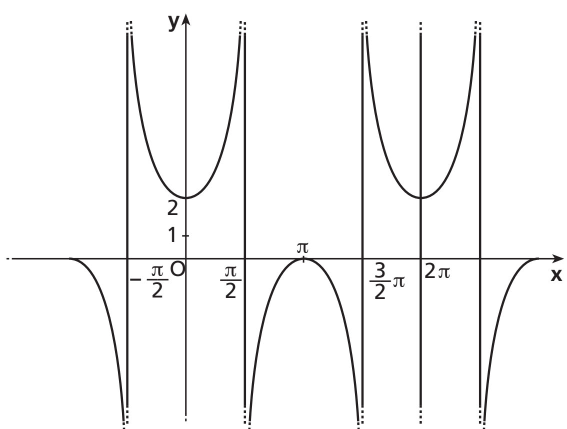
$f'_1(x) > 0$ per $0 < x < \pi$,
$f'_1(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$.

Essa si annulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.
Pertanto la funzione ha un massimo relativo in $(\pi;\ 0)$ e minimi relativi in $(0;\ 2)$ e $(2\pi;\ 2)$.
Studiamo la concavità di $f_1(x)$, tramite il segno di f'' che ha espressione:

$$f''_1(x) = \frac{1+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x},$$

$f''_1(x) > 0 \rightarrow \cos x > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ∨

∨ $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$,



▲ **Figura 10.**

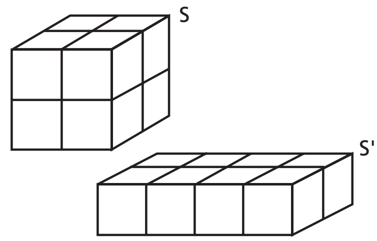
$f''_1(x) < 0$ per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$.

La funzione ha concavità verso l'alto per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, verso il basso per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$.

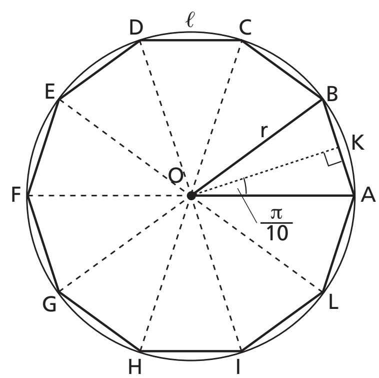
Rappresentiamo in figura 10 il grafico di $f_1(x)$, tenendo conto della periodicità di 2π.

QUESTIONARIO

1 Consideriamo il postulato detto *Principio di Cavalieri*: "due solidi, che possono essere disposti in modo che ogni piano, parallelo a un altro fissato, li tagli secondo sezioni equivalenti, sono equivalenti, ovvero hanno lo stesso volume".
Tale principio fornisce una condizione sufficiente ma non necessaria per l'equiestensione dei solidi. Infatti consideriamo i solidi S e S', come in figura 11.
Essi sono equivalenti perché equiscomponibili, ma non è possibile applicare il Principio di Cavalieri. Pertanto la proposizione "Se due solidi hanno uguale volume allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area" è falsa.



▲ **Figura 11.**

▼ **Figura 12.**


2 Consideriamo il decagono regolare di lato ℓ, inscritto in un cerchio di raggio r e centro O (figura 12).
Poiché per ipotesi il lato ℓ è sezione aurea del raggio r, risulta:

$$r : \ell = \ell : (r - \ell).$$

Applichiamo la proprietà dell'invertire delle proporzioni:

$$\ell : r = (r - \ell) : \ell \rightarrow \frac{\ell}{r} = \frac{r}{\ell} - 1.$$

Posto $\frac{\ell}{r} = a > 0$, vale:

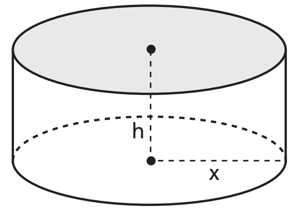
$$a = \frac{1}{a} - 1 \rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & \text{accettabile} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & \text{non accettabile} \end{cases}$$

Consideriamo il triangolo isoscele ABO e conduciamo l'altezza OK che è anche mediana e bisettrice.
Poiché $A\hat{O}B = \frac{\pi}{5}$, risulta $A\hat{O}K = \frac{\pi}{10}$. Applichiamo il primo teorema dei triangoli rettangoli della trigonometria:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AO}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{r} = \frac{\ell}{2r} = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

3 Nella figura 13 si considera una casseruola di forma cilindrica con base di raggio x e altezza h. La superficie S (quella laterale più il fondo) ha espressione:

$$S = \pi x^2 + 2\pi x \cdot h.$$



▲ **Figura 13.**

Considerata la superficie S costante, ricaviamo h in funzione di x:

$$h = \frac{S}{2\pi x} - \frac{x}{2}.$$

Calcoliamo il volume V della casseruola:

$$V = \pi x^2 h = \pi x^2 \left(\frac{S}{2\pi x} - \frac{x}{2} \right) = \frac{S}{2} x - \frac{\pi}{2} x^3.$$

Consideriamo la funzione $V = \frac{S}{2} x - \frac{\pi}{2} x^3$, ricaviamo la sua derivata prima V' e studiamone il segno, tenendo conto del limite geometrico $x > 0$:

$$V' = \frac{S}{2} - \frac{3}{2} \pi x^2,$$

$$V' > 0 \to \frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi x^2 > 0 \to -\sqrt{\frac{S}{3\pi}} < x < \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \to 0 < x < \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \text{ soluzione accettabile.}$$

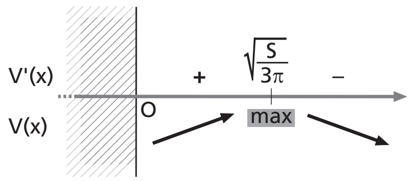
Nella figura 14 è riportato il quadro del segno della derivata prima.

Il volume V ha un massimo per $x = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ e il valore è:

$$V_{\max} = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{S}{3\pi}\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) S \sqrt{\frac{S}{3\pi}} =$$

$$= \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}.$$

▼ **Figura 14.**



4 Enunciamo la regola di de L'Hospital. Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, definite in un intorno di $+\infty$, sono derivabili in tale intorno, con $g'(x) \neq 0$, se le due funzioni, per $x \to +\infty$, tendono entrambe a 0 o a ∞, e se esiste il limite del rapporto delle derivate delle funzioni date, $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni $\frac{f(x)}{g(x)}$, e vale:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ponendo $f(x) = x^{2008}$ e $g(x) = 2^x$, le funzioni soddisfano la regola sopra enunciata. Inoltre, ricordando che $D[x^n] = nx^{n-1}$, per $n \geq 1$, e $D[2^x] = 2^x \ln 2$, applichiamo 2008 volte il teorema di de L'Hospital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2008 \cdot 2007 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(\ln 2)^{2008}\, 2^x} = 0.$$

5 Il polinomio $P(x)$ è della forma:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Calcoliamo i coefficienti a, b, c, d in base alle condizioni imposte dal problema:

$$P(0) = d \ \text{ e } \ P(0) = 0 \ \to \ d = 0;$$
$$P(1) = a + b + c \ \text{ e } \ P(1) = 0 \ \to \ a + b + c = 0;$$
$$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \ \to \ P'(0) = c \ \text{ e } \ P'(0) = 0 \ \to \ c = 0.$$

Risulta pertanto $b = -a$ e il polinomio è della forma: $P(x) = ax^3 - ax^2$.

Per ipotesi vale $\int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$, ed essendo

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 (ax^3 - ax^2)dx = \left[\frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{a}{4} - \frac{a}{3} = -\frac{a}{12},$$

si ricava:

$$-\frac{a}{12}=\frac{1}{12} \rightarrow a=-1 \rightarrow b=1.$$

Il polinomio cercato è pertanto:

$$P(x)=-x^3+x^2.$$

6 Una successione a_n è una progressione aritmetica quando la differenza fra ogni termine e il suo precedente è uguale a una costante d, detta *ragione*:

$$a_n-a_{n-1}=d.$$

Considerando i tre termini $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$, con $n>3$, risulta:

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=d \quad \text{e} \quad \binom{n}{3}-\binom{n}{2}=d.$$

Uguagliando i primi membri si ottiene la seguente equazione:

$$\binom{n}{2}-\binom{n}{1}=\binom{n}{3}-\binom{n}{2} \quad \rightarrow \quad 2\binom{n}{2}-\binom{n}{1}-\binom{n}{3}=0.$$

Sostituendo nell'equazione ottenuta le corrispondenti espressioni dei coefficenti binomiali ricaviamo:

$$2\frac{n(n-1)}{2}-n-\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}=0.$$

Dividiamo per $n>3$ e riduciamo allo stesso denominatore semplificando:

$$6n-6-6-(n-1)(n-2)=0 \rightarrow 6n-12-(n^2-3n+2)=0 \rightarrow n^2-9n+14=0.$$

Risolviamo l'equazione:

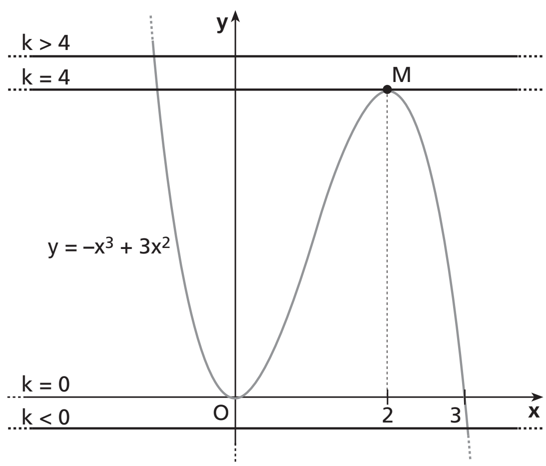
$$n=\frac{9\pm 5}{2}=\begin{cases} 7 \text{ accettabile} \\ 2 \text{ non accettabile} \end{cases}$$

Pertanto il valore di n cercato è $n=7$.

7 Data l'equazione $x^3-3x^2+k=0$, la scriviamo come $-x^3+3x^2=k$.
Risolverla equivale a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} y=-x^3+3x^2 \\ y=k \end{cases}$$

ovvero a cercare i punti di intersezione tra la curva di equazione $y=f(x)=-x^3+3x^2$ e il fascio di rette improprio $y=k$ parallelo all'asse x.
La funzione $f(x)=-x^3+3x^2$ ha dominio $\mathbb{R}$, ha intersezioni con gli assi nei punti $(0; 0)$ e $(3; 0)$, è positiva o nulla per $x\leq 3$ e negativa per $x>3$.
Poiché la derivata prima vale $f'(x)=-3x^2+6x$, la funzione risulta crescente per $0<x<2$, decrescente per $x<0$ e $x>2$; ha pertanto un minimo in $O(0; 0)$ e un massimo in $M(2; 4)$.
Nella figura 15 sono tracciati il grafico di $f(x)$ e alcune rette del fascio $y=k$.
Osservando le intersezioni tra le rette del fascio e la curva $f(x)$, si deduce che l'equazione di partenza $x^3-3x^2+k=0$ ammette:



▲ **Figura 15.**

- per $k<0$ e $k>4$, una soluzione reale;
- per $k=0$ e $k=4$, tre soluzioni reali, di cui due coincidenti;
- per $0<k<4$, tre soluzioni reali e distinte.

8 Sia $f(x)=\pi^x-x^\pi$. Dette $f_1(x)=\pi^x$ e $f_2(x)=x^\pi$, f_1 è una funzione esponenziale, con dominio coincidente con $\mathbb{R}$, mentre f_2 è una funzione potenza ed è trascendente con dominio $\mathbb{R}^+$. Il dominio di $f=f_1(x)-f_2(x)$ è allora $\mathbb{R}^+$.
Calcoliamo la derivata prima di f:

$$f'(x)=\ln\pi\cdot\pi^x-\frac{\pi}{x}x^\pi.$$

Valutiamo il segno di $f'(x)$ nel punto $x=\pi$:

$$f'(\pi)=\ln\pi\cdot\pi^\pi-\pi^\pi=\pi^\pi(\ln\pi-1)>0,\text{ essendo }\ln\pi>1.$$

Calcoliamo la derivata seconda di f:

$$f''(x)=\ln^2\pi\cdot\pi^x-\frac{\pi}{x^2}x^\pi(\pi-1).$$

Esaminiamo il segno di $f''(x)$ nel punto $x=\pi$:

$$f''(\pi)=\ln^2\pi\cdot\pi^\pi-\frac{\pi^\pi}{\pi}(\pi-1)=\pi^\pi\left(\ln^2\pi+\frac{1}{\pi}-1\right)>0,\text{ poiché }\ln\pi>1.$$

9 La funzione $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ è definita in $\mathbb{R}$ per $x\neq 1$ e può essere trattata per casi:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{per } x>1\\[2ex] \dfrac{x^2-1}{-x+1} & \text{per } x<1\end{cases}$$

Semplificando risulta:

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{per } x>1\\ -x-1 & \text{per } x<1\end{cases}$$

Ora, esiste il limite $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ quando esistono e coincidono limite destro e limite sinistro della funzione. Nel nostro caso risulta che:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2\quad\text{e}\quad\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(-x-1)=-2.$$

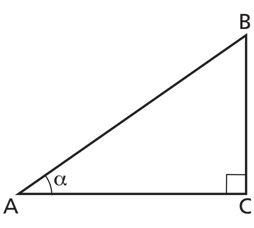
Si può quindi concludere che non esiste il $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

10 Si intende come pendenza p di un tratto rettilineo di strada AB il rapporto tra il dislivello BC e l'avanzamento orizzontale AC (figura 16).
Per la trigonometria essa rappresenta la tangente dell'angolo α. Nel nostro caso risulta:

$AB=1{,}2$ km,
$BC=85$ m $=0{,}085$ km.

Troviamo l'avanzamento orizzontale AC con il teorema di Pitagora:

$$AC=\sqrt{(1{,}2)^2-(0{,}085)^2}\simeq 1{,}19699\text{ km}.$$



▲ **Figura 16.**

Calcoliamo la pendenza p:

$$p = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} \simeq \frac{0{,}085}{1{,}19699} \simeq 0{,}07101.$$

Pertanto, l'angolo di inclinazione vale

$$\alpha \simeq \operatorname{arctg} 0{,}07101 \simeq 4{,}06°,$$

mentre la percentuale da riportare sul segnale è:

$$0{,}07101 \simeq 7\%.$$