ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli ABC con $A(1; 0)$, $B(3; 0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1; 2)$ e $\left(\frac{3}{5}; \frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$.
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo ABC. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$, si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di ln 3.

PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di h e dall'asse x sull'intervallo $[2; 4]$.

QUESTIONARIO

1 Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.

2 Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $\operatorname{sen}\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

3 Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare a un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.

4 Si esponga la regola del marchese de L'Hospital (1661-1704) e la si applichi per dimostrare che è:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0.$$

5 Nel piano riferito a coordinate cartesiane $(x; y)$ si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta:

$$y^2 - x^3 > 0.$$

6 I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9, e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

7 Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

8 Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

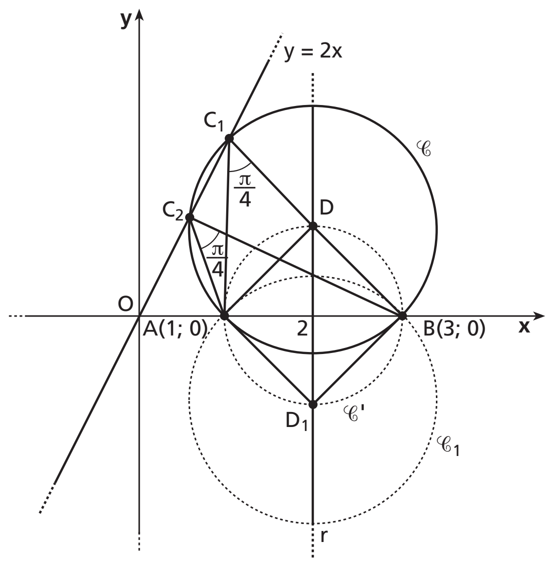
9 In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

10 Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Qual è quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. In un sistema cartesiano si considerano i punti $A(1;\,0)$, $B(3;\,0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y=2x$. I punti C del piano che formano angoli $A\hat{C}B=\frac{\pi}{4}$ stanno su due circonferenze, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$, passanti per A e B, di centri D e D_1, tali che l'angolo al centro $A\hat{D}B=A\hat{D}_1B=\frac{\pi}{2}$ (figura 1).



▲ **Figura 1.**

Considerata la circonferenza $\mathscr{C}'$ di diametro AB ed equazione $(x-2)^2+y^2=1$, e l'asse r del segmento AB, i punti D e D_1 risultano intersezione tra tale circonferenza e l'asse. Risolvendo il corrispondente sistema

$$\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1\\ x=2\end{cases}$$

si ottiene $D(2;\,1)$ e $D_1(2;\,-1)$.
I raggi delle circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$ risultano pertanto $DA=D_1A=\sqrt{2}$.
Le equazioni delle due circonferenze sono quindi:

$\mathscr{C}$: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$,
$\mathscr{C}_1$: $(x-2)^2+(y+1)^2=2$.

Mentre la circonferenza $\mathscr{C}_1$ non interseca la retta $y=2x$, la circonferenza $\mathscr{C}$ interseca tale retta nei punti di coordinate soddisfacenti il sistema:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=2\\ y=2x\end{cases} \quad\to\quad C_1\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases} \quad\wedge\quad C_2\begin{cases}x=\dfrac{3}{5}\\[2mm] y=\dfrac{6}{5}\end{cases}$$

2. Esprimiamo il punto C in coordinate parametriche: $C(t;\,2t)$, con $t\neq 0$ (per $t=0$ il triangolo ABC è degenere). Poiché in un triangolo l'ortocentro è l'intersezione delle altezze, troviamo le equazioni delle altezze relative ai lati BC e AB che hanno equazioni, rispettivamente:

$$y=\frac{3-t}{2t}(x-1) \quad\text{e}\quad x=t.$$

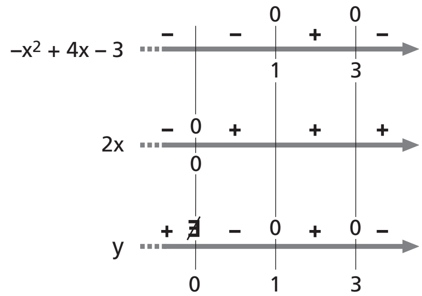
Otteniamo quindi il generico ortocentro risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}y=\dfrac{3-t}{2t}(x-1)\\[2mm] x=t\end{cases}$$

Eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana di γ, luogo geometrico dell'ortocentro, ossia:

$$y=\frac{3-x}{2x}(x-1) \;\to\; y=\frac{-x^2+4x-3}{2x}.$$

Indicata con $f(x)$ tale funzione, essa è definita nel campo reale per $x \neq 0$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono i punti $A(1; 0)$, $B(3; 0)$. Per il segno della funzione, nella figura 2 è riportato il quadro dei segni.



▲ **Figura 2.**

La curva presenta un asintoto verticale di equazione $x=0$ e un asintoto obliquo, che si ottiene calcolando i limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+4x-3}{2x}=\mp\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^2+4x-3}{2x^2}=-\frac{1}{2},$$

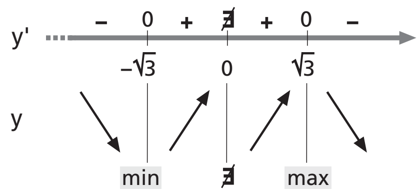
$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^2+4x-3}{2x}+\frac{x}{2}\right)=2.$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è dunque $y=-\dfrac{1}{2}x+2$.

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (figura 3):

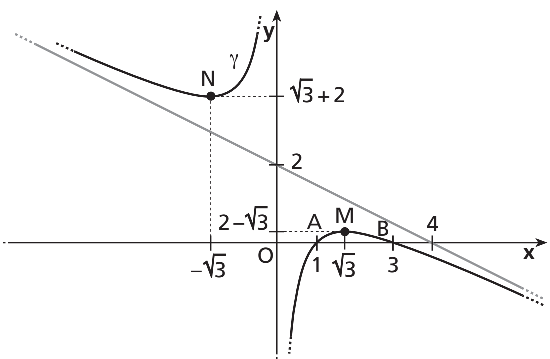
$$f'(x)=\frac{2x(-2x+4)-2(-x^2+4x-3)}{4x^2}=\frac{-x^2+3}{2x^2}.$$

▼ **Figura 3.**



Esistono un punto di minimo relativo $N(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}+2)$ e un punto di massimo relativo $M(\sqrt{3};\ 2-\sqrt{3})$.

Nella figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x)$.



▲ **Figura 4.**

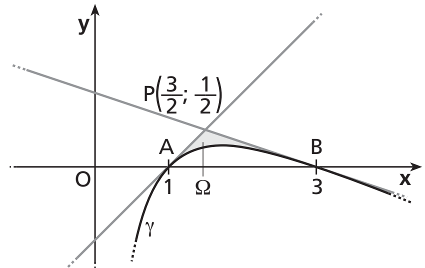
3. Determiniamo le equazioni delle tangenti a γ in A e B.

La tangente in A è la retta per A con coefficiente angolare $f'(x_A)=f'(1)=1$: la sua equazione è $y=x-1$.

In modo analogo si trova $f'(x_B)=f'(3)=-\dfrac{1}{3}$ e la retta tangente a γ in B è la retta di equazione $y=-\dfrac{1}{3}x+1$. Tali rette si intersecano nel punto P, soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y=x-1 \\ y=-\dfrac{1}{3}x+1 \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Nella figura 5 è evidenziata l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti alla curva nei punti A e B.



▲ **Figura 5.**

Essa si calcola come differenza tra l'area del triangolo ABP e l'area della regione di piano delimitata dalla curva γ con l'asse x:

$$\Omega=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-\int_1^3\frac{-x^2+4x-3}{2x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}+\int_1^3\left(\frac{x}{2}-2+\frac{3}{2x}\right)dx=\frac{1}{2}+\left[\frac{x^2}{4}-2x+\frac{3}{2}\ln x\right]_1^3=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-6+\frac{3}{2}\ln 3-\frac{1}{4}+2=\frac{3}{2}(\ln 3-1).$$

L'area Ω cercata vale $\dfrac{3}{2}(\ln 3-1)$.

4. Posto $g(x)=\dfrac{1}{x}$, si osserva che $\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx=\ln 3$. Possiamo calcolare un valore approssimato di $\ln 3$ applicando il metodo dei trapezi all'integrale $\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx$.

Dividiamo l'intervallo [1; 3] in $n=4$ parti uguali di ampiezza $h=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$ e applichiamo il metodo di analisi numerica suddetto.

Costruiamo la seguente tabella.

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$g(x)=\frac{1}{x}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

Risulta:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \simeq h\left[\frac{g(1)+g(3)}{2}+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)=\frac{67}{60}=1{,}1166\ldots$$

L'errore commesso è maggiorato da $\varepsilon_4=\dfrac{(3-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot m$, con m valore massimo di $|g''(x)|$ in [1; 3] ovvero:

$$g''(x)=\frac{2}{x^3} \quad\rightarrow\quad m=2,$$

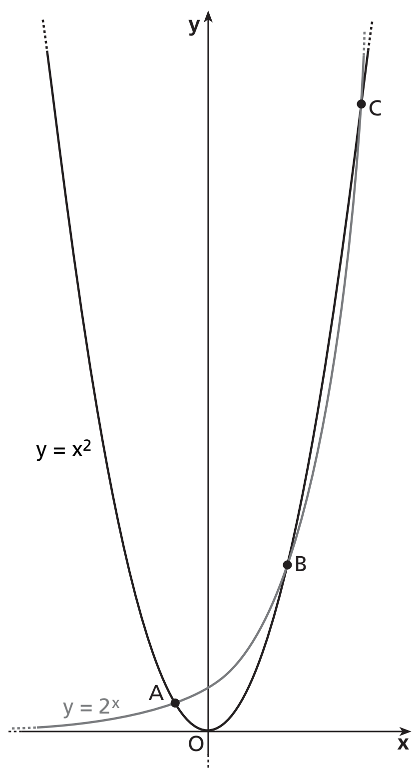
$$\varepsilon_4=\frac{(3-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot 2=\frac{1}{12}\simeq 0{,}08.$$

Pertanto risulta $\ln 3\simeq 1{,}1$.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x)=2^x$ è la funzione esponenziale di base 2, mentre $g(x)=x^2$ è una parabola con asse verticale, vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto. Tracciamo i corrispondenti grafici e indichiamo con A, B, C i punti di intersezione delle due curve (figura 6).

▼ **Figura 6.**



2. Nella figura 6 osserviamo che il punto A ha ascissa negativa ed è uno zero della funzione $h(x)=2^x-x^2$. Tale funzione è definita, continua e derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$. Inoltre risulta

$$h(0)=1>0, \qquad h(-1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0,$$

pertanto $-1<x_A<0$.

La derivata prima e seconda hanno forma:

$$h'(x)=(\ln 2)\cdot 2^x-2x,$$
$$h''(x)=(\ln^2 2)\cdot 2^x-2.$$

La derivata seconda è crescente nell'intervallo $[-1; 0]$, inoltre:

$$h''(-1)=\frac{\ln^2 2}{2}-2<0, \qquad h''(0)=\ln^2 2-2<0.$$

In tale intervallo la derivata seconda mantiene costante e negativo il suo segno, concorde con $h(-1)$.

Applichiamo il metodo delle tangenti nell'intervallo $[-1; 0]$ per determinare x_A, utilizzando la formula di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}.$$

I primi quattro termini di tale successione sono:

$$x_0 = -1,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = -1 + \frac{1}{\ln 2 + 4} \simeq -0{,}7869,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \simeq -0{,}7668,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \simeq -0{,}7666.$$

Poiché $|x_3 - x_2| = 0{,}0002 < 0{,}01$, il valore approssimato di x_A con due cifre decimali esatte è:

$x_A \simeq 0{,}76.$

3. Come già osservato nel punto 2 la funzione $h(x) = 2^x - x^2$ è definita, continua e derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$. Inoltre risulta $h'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e $h''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2$.
Dal grafico di figura 6 si deduce che, essendo tre i punti di intersezione tra le curve $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$, gli zeri della funzione differenza $h(x) = 2^x - x^2$ sono pertanto tre, di ascissa x_A, x_B e x_C. Ovvero:

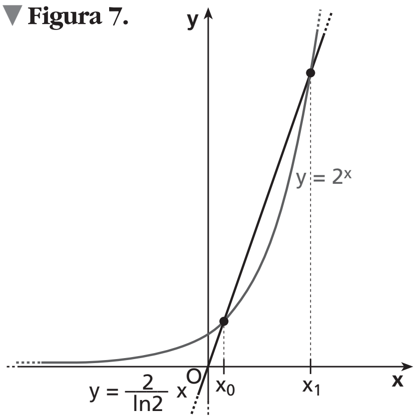
$x_A \simeq 0{,}76$, per il punto 2;
$h(0) = 1 > 0$, $\quad h(3) = 8 - 9 = -1 < 0$, $\quad h(2) = 4 - 4 = 0 \rightarrow x_B = 2$;
$h(3) = -1 < 0$, $\quad h(5) = 32 - 25 = 7 > 0$ $\quad h(4) = 16 - 16 = 0 \rightarrow x_C = 4$.

L'unicità e l'esistenza degli zeri della funzione h può essere confermata alla luce del calcolo della derivata prima e seconda e del loro segno.
Studiamo la derivata prima $h'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e il suo segno. Benché non sia possibile stabilire con esattezza gli zeri di questa funzione, osserviamo che i punti in cui tale derivata si annulla sono quelli che verificano l'equazione $2^x = \frac{2x}{\ln 2}$, ossia le ascisse dei punti di intersezione delle due curve $y = 2^x$ e $y = \frac{2x}{\ln 2}$ che mettiamo a sistema:

$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = \dfrac{2}{\ln 2} x \end{cases}$$

Essendo $y = 2^x$ una funzione convessa, le intersezioni di questa esponenziale con la retta $y = \frac{2x}{\ln 2}$ possono essere al più 2 (figura 7).
Poiché $h'(0) = \ln 2 \cdot 1 = \ln 2 > 0$, $h'(1) = 2(\ln 2 - 1) < 0$, mentre $h'(4) = 8(2 \ln 2 - 1) > 0$, concludiamo che gli unici zeri di $h'(x)$ sono $x_0 \in]0; 1[$ e $x_1 \in]1; 4[$.

Figura 7.

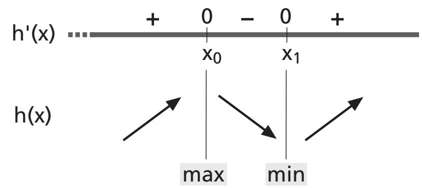


In figura 8 è rappresentato il quadro dei segni della derivata prima $h'(x)$.

La derivata seconda $h''(x)=(\ln^2 2)\cdot 2^x-2$ si annulla per:

$$(\ln^2 2)\cdot 2^x=2 \quad\rightarrow\quad 2^x=\frac{2}{\ln^2 2} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{\ln\frac{2}{\ln^2 2}}{\ln 2}=1-2\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}=\bar{x}\simeq 2{,}5.$$



▲ **Figura 8.**

Pertanto la funzione h ha concavità rivolta verso il basso per $x<\bar{x}$, concavità verso l'alto per $x>\bar{x}$.

Suddividiamo il dominio di h in 5 intervalli:

- in $]-\infty;-1]$, $h'>0$ e quindi h è crescente; poiché $h(-1)<0$ segue che $h(x)<0$ per $x<-1$;
- analogamente si verifica che $h'>0$ in $[5;+\infty[$ ed essendo $h(5)>0$ segue che $h(x)>0$ per $x\geq 5$;
- in $[-1; 0]$ la funzione h ha un solo zero, per il primo teorema di unicità dello zero, infatti $h(-1)\cdot h(0)<0$ e $h'(x)\neq 0$ per $-1<x<0$; si osservi che tale zero è l'ascissa del punto A;
- in $[0;\bar{x}]$ la funzione h ha un solo zero per il secondo teorema di unicità dello zero; per lo stesso teorema, ha un solo zero in $[\bar{x}; 5]$, essendo $h(\bar{x})\cdot h(5)<0$ e $h''(x)>0$ per $\bar{x}<x<5$.

  Pertanto le uniche intersezioni con gli assi cartesiani della funzione h sono:

  $(x_A; 0)$, $(2; 0)$, $(4; 0)$, $(0; 1)$.

  Il quadro del segno di h è:

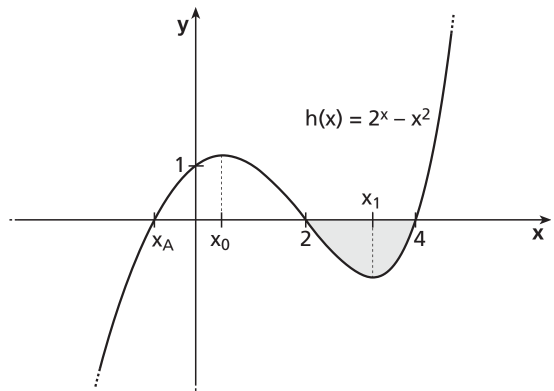
  $h(x)>0$ per $x_A<x<2$ e $x>4$;
  $h(x)<0$ per $2<x<4$.

In figura 9 è riportato il grafico della funzione h.

4. L'area della regione racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo $[2; 4]$, evidenziata in figura 9, è:

$$\text{Area}=\int_2^4 -(2^x-x^2)dx=\left[-\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}\right]_2^4=$$

$$=\frac{56}{3}-\frac{12}{\ln 2}.$$



▲ **Figura 9.**

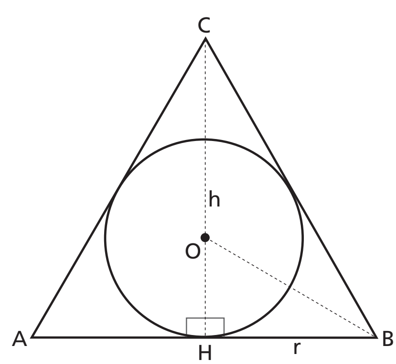
QUESTIONARIO

1 Consideriamo la sezione lungo l'asse di simmetria di un cono equilatero (figura 10). Indicato con r il raggio di base e con h l'altezza, nel cono equilatero la lunghezza dell'apotema è uguale al diametro di base. Pertanto risulta:

$$h=\sqrt{3}\,r, \qquad V_{\text{cono}}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

La sfera inscritta ha raggio OH. Considerati i triangoli simili CHB e OHB vale la seguente proporzione:

$$OH : HB = HB : CH \rightarrow OH : r = r : h \rightarrow OH=\frac{r^2}{\sqrt{3}\,r}=\frac{\sqrt{3}}{3}r.$$



▲ **Figura 10.**

Il volume della sfera ha quindi espressione:

$$V_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3.$$

La probabilità P che il punto all'interno del cono sia esterno alla sfera è:

$$P = 1 - \frac{V_{\text{sfera}}}{V_{\text{cono}}} = 1 - \frac{\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi r^3}{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3} = \frac{5}{9}.$$

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2008.

3 Il solido in questione è a base circolare, con raggio 1. Fissiamo un sistema cartesiano ortogonale il cui piano xy contenga il cerchio centrato nell'origine del sistema (figura 11).
Sia x_P l'ascissa di un generico punto P sul diametro sull'asse delle ascisse, con $-1 \leq x_P \leq 1$. Un piano passante per P e perpendicolare a tale diametro individua una corda AB di lunghezza:

$$AB = 2\sqrt{1-x^2}.$$

Tale corda risulta essere uno dei tre lati del triangolo equilatero sezione del solido. La corrispondente altezza risulta:

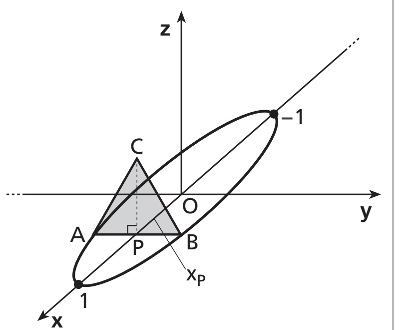
$$CP = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} = \sqrt{3(1-x^2)}.$$

La funzione area del triangolo è pertanto:

$$\text{Area }(ABC) = \frac{2\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{3(1-x^2)}}{2} = \sqrt{3}(1-x^2).$$

Integrando tra -1 e 1 questa funzione, otteniamo il volume del solido:

$$V = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}(1-x^2)dx = \sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$



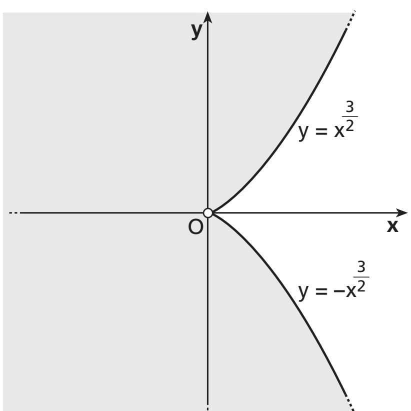
▲ **Figura 11.**

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2008.

5 Studiamo la disequazione $y^2 > x^3$ equivalente alla data $y^2 - x^3 > 0$. Distinguiamo i seguenti casi:

- se $x < 0$, allora $x^3 < 0$, mentre $y^2 \geq 0$. Quindi la disequazione è sempre verificata per qualsiasi punto del secondo e terzo quadrante;
- se $x = 0$, la disequazione da studiare diventa $y^2 > 0$, cioè $y \neq 0$ e i punti che soddisfano la disequazione sono quelli dell'asse y escluso il punto (0; 0);
- se $x > 0$, la disequazione iniziale è equivalente a $|y| > x^{\frac{3}{2}}$ ovvero $y > x^{\frac{3}{2}} \vee y < -x^{\frac{3}{2}}$.

Tracciate in un sistema cartesiano le curve di equazioni $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = -x^{\frac{3}{2}}$ per $x > 0$, nella figura 12 è evidenziato l'insieme dei punti che verifica la disequazione di partenza.



▲ **Figura 12.**

6 Rappresentiamo il parallelepipedo rettangolo in figura 13.
Osserviamo che:

$$V\hat{A}P = V\hat{B}P = V\hat{C}P = 90°.$$

Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli rettangoli *PUB* e *PVB*, si ottiene:

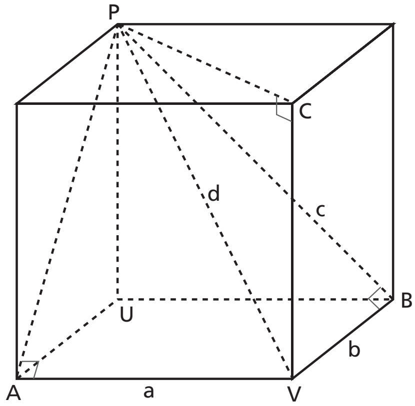
$$\overline{PV} = \sqrt{\overline{UB}^2 + \overline{PU}^2 + \overline{VB}^2} = \sqrt{a^2 + c^2 + b^2} = \sqrt{64 + 144 + 81} = 17.$$

Per il teorema dei triangoli rettangoli in trigonometria si ricava:

$$A\hat{V}P = \arccos\frac{a}{d} = \arccos\frac{8}{17} = 61°\ 55'\ 39'',$$

$$B\hat{V}P = \arccos\frac{b}{d} = \arccos\frac{9}{17} = 58°\ 2'\ 03'',$$

$$C\hat{V}P = \arccos\frac{c}{d} = \arccos\frac{12}{17} = 45°\ 5'\ 55''.$$



▲ **Figura 13.**

7 Si dice *geometria euclidea* la geometria che fonda le proprie basi sugli assiomi e postulati dettati dagli *Elementi* di Euclide. Storicamente vengono chiamate geometrie non euclidee quelle che negano o modificano il V Postulato di Euclide e da cui si possono quindi dedurre svariati teoremi non euclidei. Nella geometria di Lobacevskij-Bolyai (denominata *geometria iperbolica*) si sostituisce al V Postulato di Euclide, un nuovo postulato secondo il quale "Data una retta, per un punto esterno a essa è sempre possibile condurre almeno due rette che non la incontrano".
Fra le conseguenze citiamo per esempio i seguenti teoremi non euclidei:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di due retti;
- due triangoli che hanno angoli interni congruenti sono necessariamente congruenti.

La geometria iperbolica non è l'unica che si può costruire in alternativa a quella euclidea.
Infatti è possibile modificare il V Postulato nella proposizione: "Data una retta, per un punto esterno a essa non è possibile condurre parallele alla retta data", ma questa sola modifica contraddirebbe una conseguenza dei primi due Postulati, almeno uno dei quali deve essere sostituito. Si presentano così due possibilità:

a) sostituire il I Postulato con "Due rette possono racchiudere un'area", ottenendo la *geometria sferica*;
b) sostituire il II Postulato, escludendo la possibilità di prolungare illimitatamente due rette. Così facendo si ottiene la *geometria ellittica*.

Tra le conseguenze che accomunano queste due alternative possiamo citare le seguenti proposizioni:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di due retti;
- i triangoli che hanno angoli uguali sono tutti congruenti tra loro.

Si osservi che ciò che contraddistingue maggiormente la geometria sferica da quella ellittica è che nella geometria sferica le rette sono linee chiuse, mentre ciò non accade nella geometria ellittica.

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova del corso di ordinamento 2008.

9 La probabilità P è espressa dal rapporto tra il numero f dei casi favorevoli e il numero u dei casi possibili.
I casi possibili, vale a dire tutti i gruppi possibili di 8 studenti scelti a caso su un totale di 20 studenti, sono:

$$u = \binom{20}{8} = \frac{20!}{8! \cdot 12!} = 125\,970.$$

I casi favorevoli si possono calcolare come prodotto tra il numero dei gruppi possibili di 4 studenti maschi sui 12 totali per il numero dei gruppi possibili di 4 studentesse sulle 8 totali, ovvero:

$$f=\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}=\frac{12!}{8!\cdot 4!}\cdot\frac{8!}{4!\cdot 4!}=495\cdot 70=34\,650.$$

Di conseguenza, la probabilità che, estraendo 8 persone a caso in una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, vi siano 4 maschi e 4 femmine sarà:

$$P=\frac{34\,650}{125\,970}=\frac{1155}{4199}\simeq 27{,}5\%.$$

10 Consideriamo la curva di equazione $y=e^{-2x}$. La simmetria di centro l'origine ha equazioni:

$$\begin{cases} x'=-x \\ y'=-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-x' \\ y=-y' \end{cases}$$

La trasformata della curva data rispetto a tale simmetria ha equazione:

$$-y'=e^{-2(-x')} \rightarrow y'=-e^{2x'} \rightarrow y=-e^{2x}.$$

In figura 14 sono rappresentate la curva di partenza e la sua simmetrica rispetto all'origine.
La simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante ha equazione:

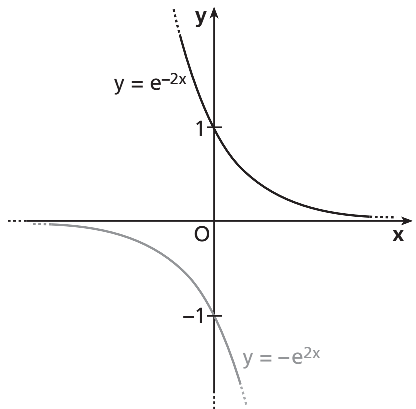
$$\begin{cases} x'=y \\ y'=x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y' \\ y=x' \end{cases}$$

La trasformata della curva di equazione $y=e^{-2x}$ rispetto a tale simmetria ha equazione:

$$x'=e^{-2y'} \rightarrow y'=-\frac{1}{2}\ln x' \rightarrow y=-\frac{1}{2}\ln x.$$

In figura 15 sono rappresentati i grafici della funzione data e della sua trasformata secondo la simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$.

Figura 14.



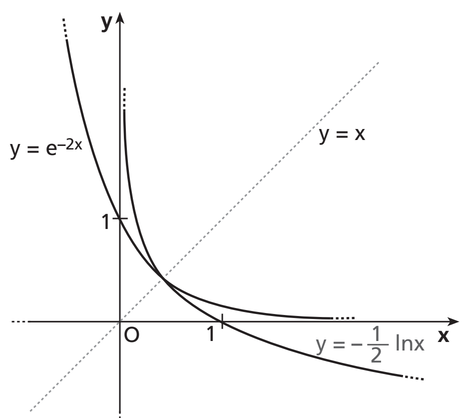


Figura 15.