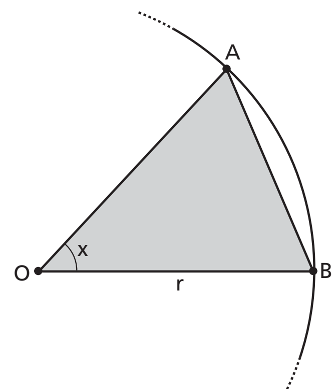
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da
$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).
3. Si fissi l'area del settore $A\widehat{O}B$ pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di $A\widehat{O}B$ e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore $A\widehat{O}B$ è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.



▶ **Figura 1.**

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \ln x$ (logaritmo naturale).

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base è $\delta = 45°$? E per quale valore di a è $\delta = 135°$?
3. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di D.
4. Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x = -1$.

© Zanichelli Editore, 2010

QUESTIONARIO

1 Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è sen x e il cui grafico passa per il punto $(0; 2)$.

2 Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili applicazioni (o funzioni) di A in B, ce ne sono di suriettive? Di iniettive? Di biiettive?

3 Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4 «Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni». Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5 Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{0}, \frac{1}{0}, 0^0.$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6 Si calcoli: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

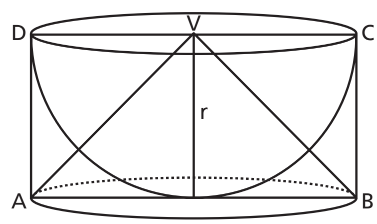
7 Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8 Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0.$$

ha una radice compresa fra -1 e 0.

9 Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura 2.



▶ **Figura 2.**

10 Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

© Zanichelli Editore, 2010

PROBLEMA 1

1. Indichiamo con:

$S(A\widehat{O}B)$ l'area del settore circolare $A\widehat{O}B$ di raggio r e ampiezza x,

$S(AOB)$ l'area del triangolo isoscele AOB,

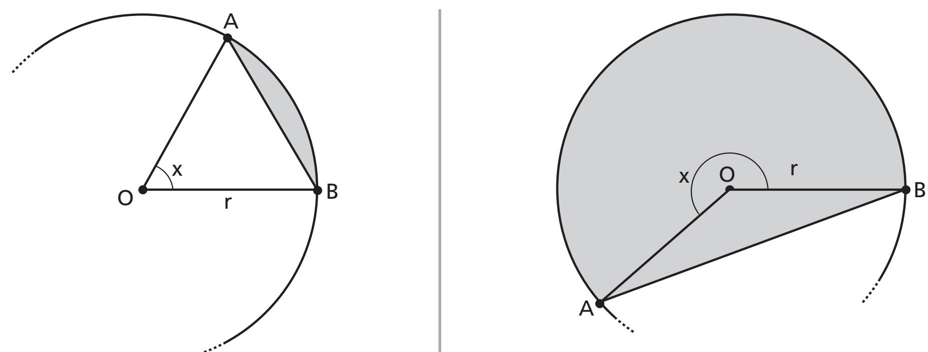
$S(x)$ la superficie compresa fra l'arco e la corda AB.

Differenziamo i casi in cui l'angolo x del settore circolare è convesso o concavo (figura 3):

a) se x è convesso $(0 \leq x < \pi)$ risulta $S(x) = S(A\widehat{O}B) - S(AOB)$;

b) se x è concavo $(\pi \leq x \leq 2\pi)$ risulta $S(x) = S(A\widehat{O}B) + S(AOB)$.

▼ **Figura 3.**



a. Angolo x convesso. **b.** Angolo x concavo.

L'area del settore circolare di raggio r e ampiezza x è $S(A\widehat{O}B) = \dfrac{r^2 x}{2}$, mentre l'area del triangolo AOB, conoscendo due lati e l'angolo compreso, è per la trigonometria:

$$S(AOB) = \begin{cases} \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\[2ex] \dfrac{r^2 \operatorname{sen}(2\pi - x)}{2} = -\dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Quindi la superficie $S(x)$ diventa:

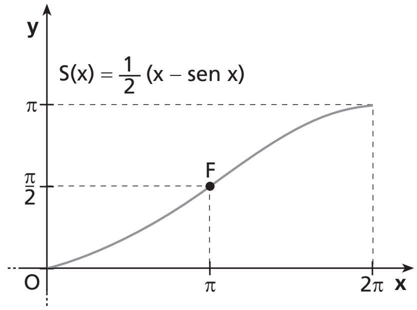
$$S(x) = \begin{cases} S(A\widehat{O}B) - S(AOB) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ S(A\widehat{O}B) + S(AOB) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad S(x) = \begin{cases} \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\[2ex] \dfrac{r^2 x}{2} - \dfrac{r^2 \operatorname{sen} x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$S(x) = \frac{r^2 x - r^2 \operatorname{sen} x}{2} = \frac{1}{2} r^2 (x - \operatorname{sen} x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Ponendo $r = 1$, diventa $S(x) = \dfrac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x)$. Tale funzione è continua nell'intervallo di definizione $[0; 2\pi]$; agli estremi del dominio risulta $S(0) = 0$, $S(2\pi) = \pi$; la sua derivata prima ha espressione: $S'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos x)$. Pertanto risulta $S'(x) > 0$ per $0 < x < 2\pi$ e $S'(0) = S'(2\pi) = 0$: la funzione è non decrescente e ha tangente orizzontale negli estremi dell'intervallo.

© Zanichelli Editore, 2010

La derivata seconda vale $S''(x) = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,x$: è positiva per $0 < x < \pi$, negativa per $\pi < x < 2\pi$, nulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$; la curva ha pertanto un flesso $F\left(\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Nella figura 4 è rappresentato il grafico della funzione $S(x)$.



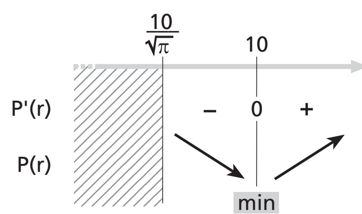
▶ **Figura 4.**

3. Posta l'area del settore circolare $S(A\widehat{O}B) = \frac{r^2 x}{2}$ uguale a 100 m², diventa $\frac{r^2 x}{2} = 100$, quindi $r = \sqrt{\frac{200}{x}}$ con $x \in \left]0;\ 2\pi\right]$; risulta allora che, al variare di x nell'intervallo, la variabile r è inferiormente limitata ovvero $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Calcoliamo il perimetro P del settore $A\widehat{O}B$ in funzione del raggio r, considerando che si può scrivere l'angolo x in funzione del raggio r ovvero $x = \frac{200}{r^2}$:

$$P = r + r + rx \quad \rightarrow \quad P(r) = 2r + r\frac{200}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}.$$

▼ **Figura 5.**



Determiniamo la derivata prima di tale funzione e studiamone il segno:

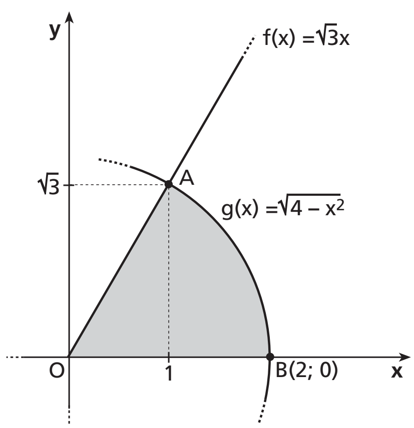
$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2};\ P'(r) > 0 \quad \rightarrow \quad r^2 > 100 \quad \rightarrow \quad r > 10.$$

In figura 5 è riportato il quadro dei segni.

La funzione ha un minimo per $r = 10$ m; in tal caso l'angolo corrispondente misura:

$$x = \frac{200}{10^2} = 2 \text{ rad} \simeq 57{,}3° \simeq 115°.$$

▼ **Figura 6.**



4. Posto $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$, fissiamo un sistema di riferimento ortogonale Oxy contenente il settore in modo che O coincida con l'origine; risulta allora che B ha coordinate $(2;0)$ e $A\ (1;\sqrt{3})$ (figura 6).

La retta OA ha equazione $f(x) = \sqrt{3}\,x$ mentre l'arco AB è il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, per $x \in [1;\ 2]$.

Poiché il solido W ha come base il settore circolare e ha sezioni ortogonali a OB quadrate, si ottiene il suo volume V secondo la seguente formula:

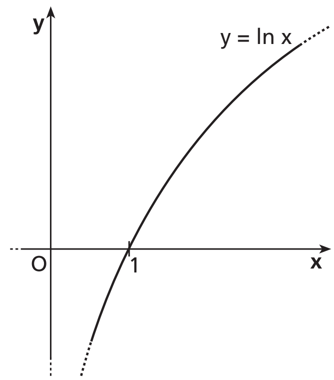
$$V(W) = \int_0^1 [f(x)]^2\,dx + \int_1^2 [g(x)]^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 = 1 + \left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

© Zanichelli Editore, 2010

PROBLEMA 2

La funzione $f(x) = \ln x$ ha dominio $D =]0; +\infty[$, interseca l'asse x nel punto di coordinate (1; 0) ed è sempre crescente. Il corrispondente grafico G_f di f è riportato in figura 7.



▲ **Figura 7.**

1. Consideriamo un punto generico di G_f, $P(k; \ln k)$, con $k > 0$; tracciamo per esso la tangente t alla curva che interseca l'asse y nel punto A e la retta parallela all'asse x che interseca l'asse delle ordinate nel punto B; tale punto ha coordinate $B\,(0; \ln k)$ (figura 8).

Per determinare le coordinate di A, scriviamo l'equazione della retta t, che ha coefficiente angolare $f'(x_P) = \dfrac{1}{k}$.

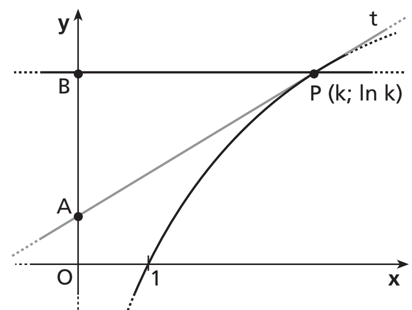
Quindi, l'equazione della retta t è:

$$y - y_P = f'(x_P)(x - x_P) \rightarrow y - \ln k = \frac{1}{k}(x - k) \rightarrow$$

$$y = \frac{1}{k}\,x + \ln k - 1.$$

Tale retta interseca l'asse y in $A(0; \ln k - 1)$, e la lunghezza del segmento AB è:

$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |\ln k - \ln k + 1| = 1,$$



▶ **Figura 8.**

che, perciò, è costante.
Nel caso in cui la funzione considerata sia $g(x) = \log_a x$, si può procedere in modo analogo, trovando:

$g'(x_P) = \dfrac{1}{k}\log_a e$, coefficiente angolare della retta tangente nel punto P,

$y = \dfrac{1}{k}\log_a e \cdot x + \log_a e$, equazione della retta tangente t,

$A(0; \log_a k - \log_a e)$, $B(0; \log_a k)$.

La distanza tra A e B è ora:

$$\overline{AB} = |\log_a k - \log_a k + \log_a e| = |\log_a e|.$$

Possiamo concludere che, fissato il valore della base a del logaritmo, la lunghezza di AB rimane costante indipendentemente dalla scelta del punto P.
Osserviamo infine che, per $a = e$, ritroviamo il caso particolare $\overline{AB} = 1$.

2. Poiché per inclinazione si intende l'angolo che una retta forma col semiasse positivo delle x, si ha che il coefficiente angolare della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1è tg δ. Tale coefficiente corrisponde al valore della derivata prima della funzione calcolata nel punto $x = 1$:

$$g'(1) = \log_a e \quad \rightarrow \quad \text{tg}\,\delta = \log_a e.$$

- Se $\delta = 45°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi $1 = \log_a e$, cioè $a = e$ e il logaritmo risulta naturale;
- se $\delta = 135°$, allora tg $\delta = 1$. Quindi: $-1 = \log_a e$, cioè $a = \dfrac{1}{e}$.

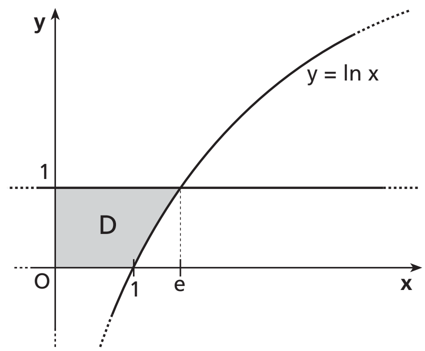
© Zanichelli Editore, 2010

3. La regione D di cui calcolare l'area $A(D)$ è evidenziata nella figura 9.
Determiniamo tale superficie come differenza tra l'area del rettangolo di base e e altezza 1 e l'area sottesa dalla funzione $f(x) = \ln x$ per $1 \leq x \leq e$:

$$A(D) = e \cdot 1 - \int_1^e \ln x \, dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$= e - [x \ln x - x]_1^e = e - (e - e + 1) = e - 1.$$

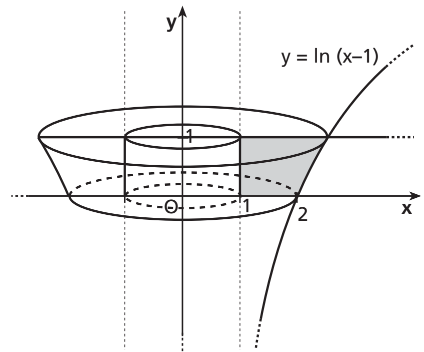


▶ **Figura 9.**

4. Operiamo sulla funzione f la traslazione di vettore $\vec{v}$ (1;0) in modo che l'asse di rotazione coincida con l'asse y. La curva traslata ha equazione $y = \ln(x - 1)$ (figura 10).
Per calcolare il volume di rotazione della funzione $y = \ln(x - 1)$ intorno all'asse y, è necessario determinare l'equazione della funzione inversa:

$$y = \ln(x - 1) \quad \rightarrow \quad e^y = x - 1 \quad \rightarrow \quad x = e^y + 1.$$

Il volume richiesto si ottiene sottraendo al volume del solido di rotazione il volume del cilindro interno di raggio di base 1 e altezza 1:



▲ **Figura 10.**

$$V = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 \, dy - \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi \int_0^1 (e^{2y} + 1 + 2e^y) dy - \pi = \pi \left[\frac{e^{2y}}{2} + y + 2e^y \right]_0^1 - \pi =$$

$$= \pi \left(\frac{e^2}{2} + 1 + 2e - \frac{1}{2} - 2 - 1 \right) = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2} \right) = \frac{\pi}{2} (e^2 + 4e - 5).$$

© Zanichelli Editore, 2010

QUESTIONARIO

1 Una funzione $f(x)$ si definisce primitiva di una funzione $g(x)$ quando è derivabile e risulta $f'(x) = g(x)$. L'insieme delle primitive di $g(x) = \operatorname{sen} x$ è:

$$f_k(x) = -\cos x + k, \text{ con } k \in \mathbb{R}.$$

Determiniamo il valore di k, imponendo al corrispondente grafico il passaggio per il punto (0;2):

$$f_k(0) = -1 + k = 2 \quad \to \quad k = 3.$$

Pertanto la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto (0;2) è $f_3(x)$ ovvero:

$$f(x) = -\cos x + 3.$$

2 Una funzione $f: A \to B$ si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A. Poiché $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$, allora sono suriettive tutte le funzioni in cui due e solo due elementi di A hanno uguale immagine in B.

Le possibili coppie di A sono $\binom{4}{2} = 6$. Ogni coppia può essere associata ai 3 elementi di B con un totale di $6 \cdot 3 = 18$ associazioni. Per ogni associazione i due elementi di A non utilizzati (che hanno quindi immagine distinta in B) possono essere accoppiati in due modi diversi con i due elementi di B rimasti. Quindi il numero totale di funzioni suriettive da A a B è $18 \cdot 2 = 36$.
Una funzione $f: A \to B$ si dice iniettiva quando ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A. Poiché il numero degli elementi di A è maggiore di quello di B, non esistono funzioni iniettive.
Una funzione $f: A \to B$ si dice biiettiva quando è sia iniettiva, che suriettiva. Poiché non esistono funzioni iniettive, allora non esistono nemmeno funzioni biiettive.

3 Data la curva di equazione $y(x) = x^3 + kx^2 + 3x - 4$, la funzione derivata prima $y'(x) = 3x^2 + 2kx + 3$ è di secondo grado. Posta la derivata prima uguale a zero, si ottiene un'equazione di secondo grado. Affinché la curva ammetta una sola tangente orizzontale è necessario che il corrispondente discriminante sia nullo:

$$3x^2 + 2kx + 3 = 0, \frac{\Delta}{4} = 0 \quad \to \quad k^2 - 9 = 0 \quad \to \quad k = \pm 3.$$

Le curve richieste sono quindi due:

$$y = x^3 + 3x^2 + 3x - 4,$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4.$$

4 Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e i suoi diedri sono congruenti. Pertanto gli angoli delle facce di ogni suo diedro devono essere angoli di poligoni regolari e devono essere almeno tre. Per un noto teorema di geometria solida, in ogni diedro la somma degli angoli delle facce deve essere strettamente minore di 360°. Se le facce del poliedro regolare fossero esagoni, l'angolo di ogni faccia di un diedro sarebbe di 120° e quindi la somma degli angoli di tre facce sarebbe uguale a 360°, il che è impossibile. L'affermazione quindi è falsa.

© Zanichelli Editore, 2010

5 Una frazione è una coppia ordinata di numeri interi, di cui il secondo è diverso da 0:

$$\frac{n}{d}, \text{ con } n,\ d \in \mathbb{Z},\ d \neq 0.$$

L'espressione $\frac{0}{1}$ equivale al valore numerico 0. Il reciproco di $\frac{0}{1}$, cioè $\frac{1}{0}$, è privo di significato e non corrisponde a nessun valore numerico. Ugualmente le espressioni $\frac{0}{0}$ e 0^0 non corrispondono a nessun valore numerico e sono forme indeterminate.

6 Consideriamo il limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Raccogliamo x^2 al radicando del numeratore e portiamolo fuori dalla radice:

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}.$$

Poiché il limite va calcolato in un intorno di $-\infty$, risulta $x<0$, possiamo togliere al numeratore il valore assoluto alla x cambiandone il segno:

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1.$$

7 Data l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n>k$, si esplicitano i coefficienti binomiali tramite la funzione fattoriale per entrambi i membri.

Primo membro:

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)}{(k+1) \cdot k!}$$

Secondo membro:

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{n-k}{k+1} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)(n-k)}{(k+1) \cdot k!}.$$

Poiché il primo membro è uguale al secondo membro, l'identità è verificata.

8 Consideriamo la funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$. Cercare le soluzioni reali dell'equazione di partenza equivale a determinare le intersezioni della funzione $f(x)$ con l'asse delle x. La funzione è continua in $\mathbb{R}$ ed esistono almeno due valori di x in cui la funzione cambia di segno:

$$x_1 = -1, \quad f(-1) = (-1)^{2009} - 2009 + 1 = -1 - 2009 + 1 = -2009;$$

$$x_2 = 0, \qquad f(0) = 1.$$

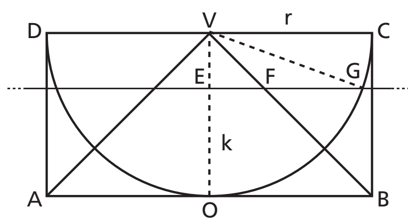
© Zanichelli Editore, 2010

Per il teorema di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto c, interno all'intervallo $[-1; 0]$, in cui la funzione si annulla.
Calcoliamo la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = 2009x^{2008} + 2009.$$

Poiché la derivata è sempre positiva nell'intervallo, la funzione $f(x)$ è strettamente crescente; pertanto esiste una sola radice dell'equazione di partenza, compresa tra -1 e 0.

9 Consideriamo il principio di Cavalieri: «due solidi hanno lo stesso volume (sono equivalenti) se si può fissare un piano in modo che ogni altro piano parallelo a esso tagli i due solidi in sezioni equivalenti». Consideriamo un piano parallelo alla base del cilindro distante k da esso, con $0 \leq k \leq r$ (figura 11).
La sezione formata con il cono è un cerchio di raggio EF. Essendo VEF un triangolo rettangolo isoscele, risulta $\overline{EF} = \overline{VE} = r - k$. Dunque il cerchio ha area:



▶ **Figura 11.**

$$A_1 = \pi(r - k)^2.$$

La sezione del piano con la scodella è una corona circolare di raggio esterno r e raggio interno EG. Per il teorema di Pitagora risulta:

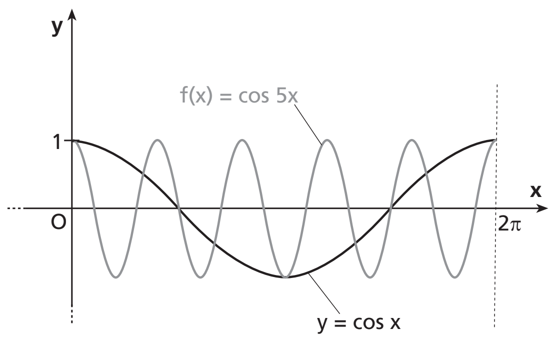
$$\overline{EG}^2 = \overline{VG}^2 - \overline{VE}^2 = r^2 - (k - r)^2 = 2kr - k^2.$$

L'area della sezione con la scodella è:

$$A_2 = \pi[r^2 - (2kr - k^2)] = \pi(r - k)^2.$$

Per il principio di Cavalieri, poiché $A_1 = A_2$, possiamo concludere che la scodella e il cono sono equivalenti.

10 Osserviamo che la funzione $f(x) = \cos 5x$ si ottiene dalla funzione goniometrica elementare $y = \cos x$ tramite una contrazione rispetto all'asse x di fattore $k = 5$. Ne segue che, essendo 2π il periodo di $y = \cos x$, il periodo di f è $\frac{2\pi}{k}$ ovvero $\frac{2\pi}{5}$.
A tale conclusione si può giungere anche osservando i grafici delle due funzioni tra 0 e 2π (figura 12).
In tale grafico si può notare che in un periodo di $y = \cos x$ il grafico di $f(x) = \cos 5x$ si ripete uguale per 5 volte.



▲ **Figura 12.**

© Zanichelli Editore, 2010