# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

## PROBLEMA 1

Siano $f$ e $g$ le funzioni definite, per tutti gli $x$ reali da

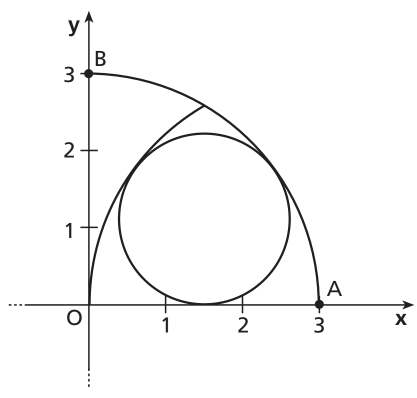
$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

1. Qual è il periodo della funzione $g$? Si studino $f$ e $g$ e se ne disegnino i rispettivi grafici $G_f$ e $G_g$ in un conveniente sistema di riferimento cartesiano $Oxy$.
2. Si scrivano le equazioni delle rette $r$ e $s$ tangenti, rispettivamente, a $G_f$ e $G_g$ nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da $r$ e da $s$?
3. Sia $R$ la regione delimitata da $G_f$ e da $G_g$. Si calcoli l'area di $R$.
4. La regione $R$, ruotando attorno all'asse $x$, genera il solido $S$ e, ruotando intorno all'asse $y$, il solido $T$. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di $S$ e di $T$.

## PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento $Oxy$ sono assegnati l'arco di circonferenza di centro $O$ ed estremi $A(3; 0)$ e $B(0; 3)$ e l'arco $L$ della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto $A$ e il punto $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

1. Sia $r$ la retta tangente in $A$ a $L$. Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui $r$ divide la regione $R$ racchiusa tra $L$ e l'arco $AB$.
2. La regione $R$ è la base di un solido $W$ le cui sezioni, ottenute tagliando $W$ con piani perpendicolari all'asse $x$, hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di $W$.
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di $R$ intorno all'asse $x$.
4. Si provi che l'arco $L$ è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco $AB$ e all'asse $x$. Infine, tra le circonferenze di cui $L$ è il luogo dei centri, si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro $A$ e raggio 3, come nella figura a lato.




▲ **Figura 1.**

## QUESTIONARIO

**1** Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \to 0} \frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}.$$

**2** Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

**3** La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

**4** Qual è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

**5** Siano dati nello spazio $n$ punti $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

**6** Sia $f(x) = 5 \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x - \frac{5}{2} \operatorname{sen} 2x - \cos 2x - 17$. Si calcoli $f'(x)$.

**7** È dato un tetraedro regolare di spigolo $l$ e altezza $h$. Si determini l'ampiezza dell'angolo $\alpha$ formato da $l$ e da $h$.

**8** Qual è il valore medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

**9** Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti $A$ e $B$, situati dalla stessa parte rispetto a una retta $r$, nel determinare il cammino minimo che congiunge $A$ con $B$ toccando $r$. Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

**10** Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni $x$ reale?

A $\cos(\operatorname{sen}(x^2+1))$

B $\operatorname{sen}(\cos(x^2+1))$

C $\operatorname{sen}(\ln(x^2+1))$

D $\cos(\ln(x^2+1))$

Si giustifichi la risposta.

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## PROBLEMA 1

**1.** La funzione goniometrica $g(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ammette periodo $P$ se risulta $g(x+P) = g(x)$, quindi:

$$\mathrm{sen}\left[\frac{3}{2}\pi(x+P)\right] = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \rightarrow \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi P\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Tenendo conto che il periodo della funzione seno è $2\pi$, ne consegue che:

$$\frac{3}{2}\pi P = 2\pi \rightarrow P = \frac{4}{3}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = |27x^3|$, scrivendola in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} 27x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -27x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

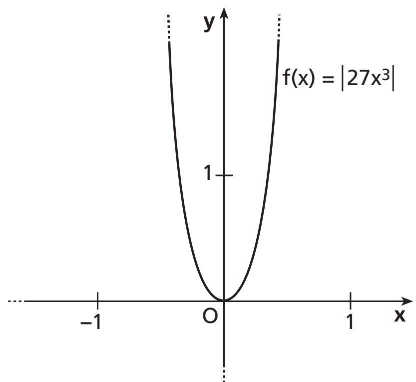
Essa ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in tutto il dominio; poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari, pertanto il suo grafico $G_f$ è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; interseca gli assi nel punto $O(0; 0)$; è non negativa nel proprio dominio.
Ricaviamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -81x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$: la funzione $f$ ha pertanto minimo assoluto nel punto $x = 0$.
Studiamo la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = \begin{cases} 162x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -162x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Ne segue che $f''(x) > 0$ per $x \neq 0$ e il corrispondente grafico ha nel dominio concavità rivolta verso l'alto.
Nella figura 2 è rappresentato il grafico $G_f$ di $f(x)$.



▲ **Figura 2.**

Analizziamo ora la funzione goniometrica $g(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ di periodo $\frac{4}{3}$. Si tratta di una contrazione orizzontale della funzione seno, del tipo $y = \mathrm{sen}\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{2}{3\pi}$.

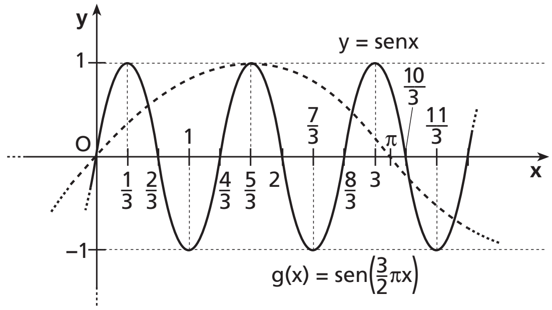
Ricordando che la funzione seno, $y = \mathrm{sen}\, x$, si annulla nei punti $x = k\pi$, ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ha minimi assoluti nei punti $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si deduce che la funzione $g(x) = \mathrm{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, per $k \in \mathbb{Z}$:

- si annulla nei punti $x = \frac{2}{3}k$,
- ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$,

- ha minimi assoluti nei punti $x = 1 + \frac{4}{3}k$.

Nella figura 3 è rappresentato il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e della sua contrazione orizzontale

$g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$.




▲ **Figura 3.**

**2.** Data una funzione generica $y = h(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di $h$ nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse $y$, è:

$$y - y_0 = h'(x_0)(x - x_0).$$

Determiniamo l'equazione della retta $r$ tangente alla funzione $f(x) = |27x^3|$ nel punto $x = \frac{1}{3}$, tenendo conto che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$:

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = 9x - 2.$$

Tale retta ha coefficiente angolare $m_r = 9$.

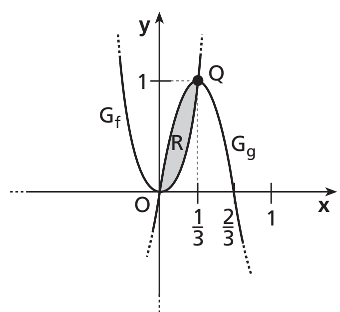
Consideriamo la funzione $g(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$: è noto dal punto 1 del problema che nel punto $x = \frac{1}{3}$ la funzione è dotata di massimo la cui ordinata vale 1; pertanto in tale punto la corrispondente tangente $s$ è orizzontale, ha equazione $y = 1$ e coefficiente angolare $m_s = 0$.
Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo $\gamma$ formato dalle rette $r$ e $s$:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \rightarrow \operatorname{tg}\gamma = 9.$$

Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$$\gamma = \operatorname{arctg} 9 = 83{,}6598\ldots° \simeq 83°40'.$$

**3.** Rappresentiamo in uno stesso piano cartesiano i grafici $G_f$ e $G_g$ ed evidenziamo la regione $R$ delimitata dalle due curve (figura 4).
Ricaviamo l'ascissa del punto $Q$, intersezione dei grafici risolvendo il seguente sistema:




▲ **Figura 4.**

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = |27x^3| \\ |27x^3| = \operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema non è risolvibile algebricamente ma dallo studio dei grafici sappiamo che la soluzione è unica per $x > 0$. Ugualmente è noto dal punto 2 del problema che il punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ è comune a entrambi i grafici. Per unicità si deduce che $x_Q = \frac{1}{3}$.

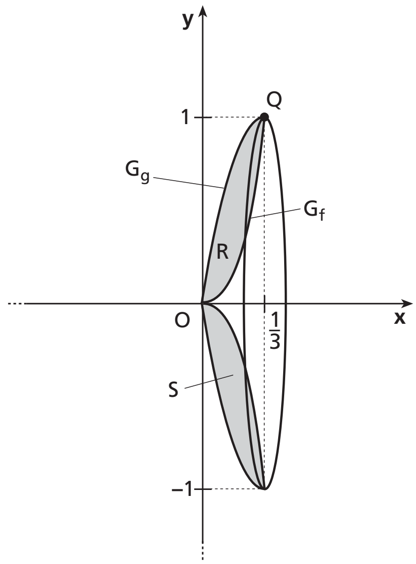
Calcoliamo l'area della regione $R$ tramite il seguente integrale:

$$\mathscr{A}(R) = \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3\right] dx = \left[-\frac{2}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - \frac{27}{4}x^4\right]_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= -\frac{27}{4}\cdot\frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}.$$

**4.** Rappresentiamo in figura 5 il solido $S$ generato dalla rotazione della regione $R$ intorno all'asse $x$.
Osserviamo che il volume del solido $S$ si ottiene dalla differenza tra due volumi:

– il volume $V_g$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse $x$ della parte di piano delimitata dalla funzione $g(x)$, dalla retta $x=\frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse;
– il volume $V_f$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse $x$ della parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dalla retta $x=\frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse.




▲ **Figura 5.**

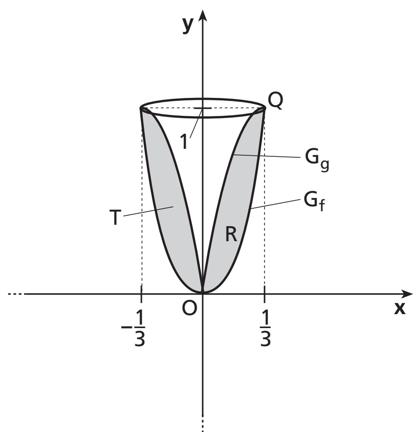
Risulta allora:

$$V(S) = V_g - V_f = \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right)dx - \pi\int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx =$$

$$= \pi\int_0^{\frac{1}{3}} \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6\right]dx.$$

Rappresentiamo in figura 6 il solido $T$ generato dalla rotazione della regione $R$ intorno all'asse $y$.
Osserviamo che il volume del solido $T$ si ottiene dalla differenza tra due volumi:

– il volume $V_{f^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse $y$ della parte di piano delimitata dalla funzione $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$, dalla retta $y=1$ e dall'asse positivo delle ordinate;
– il volume $V_{g^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse $y$ della parte di piano delimitata dalla funzione $g^{-1}(y)=\frac{2}{3\pi}\operatorname{arcsen} y$, dalla retta $y=1$ e dall'asse positivo delle ordinate.




▲ **Figura 6.**

Risulta quindi:

$$V(T) = V_{f^{-1}} - V_{g^{-1}} = \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{y}\right)^2 dy - \pi\int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi}\operatorname{arcsen} y\right)^2 dy = \pi\int_0^1 \left(\frac{1}{9}\sqrt[3]{y^2} - \frac{4}{9\pi^2}\operatorname{arcsen}^2 y\right)dy.$$

## PROBLEMA 2

**1.** Consideriamo la parabola di equazione $x^2 = 9 - 6y$; la sua forma esplicita è $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}$, ha vertice $V\left(0; \frac{3}{2}\right)$ e interseca il semiasse positivo delle ascisse nel punto $A(3; 0)$.

La retta $r$ tangente alla parabola nel punto $A$ per la formula dello sdoppiamento ha equazione:

$$\frac{y+0}{2} = -\frac{1}{6} \cdot 3x + \frac{3}{2} \rightarrow y = -x + 3.$$

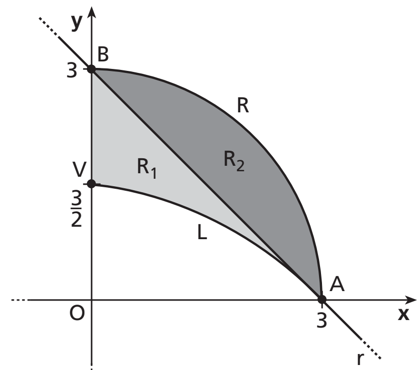
Tale retta interseca l'asse $y$ nel punto $B(0; 3)$.

Rappresentiamo in figura 7 l'arco di circonferenza di centro l'origine e di estremi $A$ e $B$, l'arco $L$ di parabola di estremi $A$ e $V$, la retta tangente $r$.

La parte di piano $R$, delimitata dai due archi, viene suddivisa dalla retta $r$ in due parti, $R_1$ e $R_2$.

Calcoliamo l'area della regione $R_1$ come differenza tra l'area del triangolo $AOB$ e l'area della regione $OAV$ corrispondente alla metà dell'area del segmento parabolico Vale quindi:

$$\mathcal{A}(R_1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} \cdot \left(6 \cdot \frac{3}{2}\right)\right] = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}.$$



▲ **Figura 7.**

Troviamo l'area della regione $R_2$ come differenza tra l'area del settore circolare $A\widehat{O}B$ e l'area del triangolo $AOB$. Risulta allora:

$$\mathcal{A}(R_2) = \frac{1}{4} \cdot (3^2\pi) - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2}.$$

**2.** Considerato il solido $W$, di base la regione $R$ e le cui sezioni, perpendicolari all'asse $x$, hanno area $S(x) = e^{5-3x}$, per $0 \leq x \leq 3$, tale solido ha volume di valore:

$$V(W) = \int_0^3 S(x)dx = \int_0^3 e^{5-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{5-3x}\right]_0^3 = -\frac{1}{3}(e^{-4} - e^5) = \frac{e^9 - 1}{3e^4}.$$

**3.** Consideriamo il solido $Q$ ottenuto dalla rotazione della regione $R$ intorno all'asse $x$ (figura 8).

Il relativo volume $V(Q)$ si ottiene come differenza tra il volume della semisfera di centro $O$ e raggio $OA$ e il volume del solido ottenuto dalla rotazione dell'arco di parabola $L$ intorno all'asse $x$:

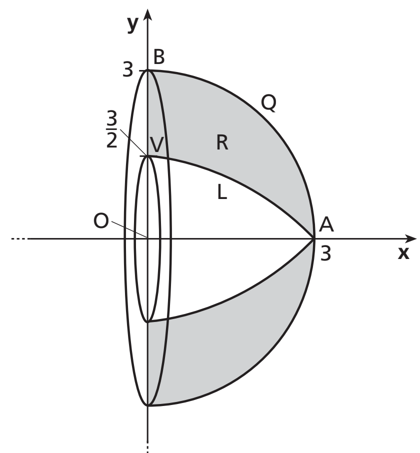
$$V(Q) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi \cdot 3^3\right) - \pi\int_0^3\left(-\frac{1}{6}x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\int_0^3 (-x^2 + 9)^2 dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\int_0^3 (x^4 - 18x^2 + 81)dx =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\left[\frac{x^5}{5} - 6x^3 + 81x\right]_0^3 =$$

$$= 18\pi - \frac{\pi}{36}\left(\frac{243}{5} - 162 + 243\right) = 18\pi - \frac{\pi}{36} \cdot \frac{648}{5} = 18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi.$$



▲ **Figura 8.**

**4.** Consideriamo il settore circolare $AOB$ e una generica circonferenza di centro $C(x; y)$, con $0<x<3$ e $0<y<3$, tangente internamente all'arco $AB$ e all'asse $x$ (figura 9).

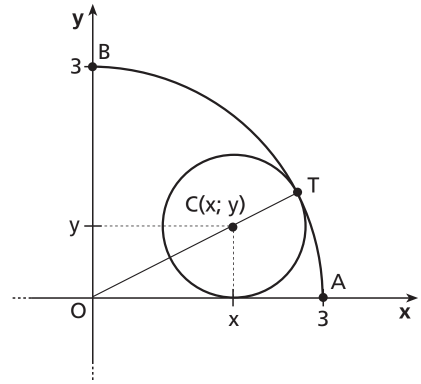
Per la condizione di tangenza interna deve valere l'uguaglianza:

$$\overline{OC}+\overline{CT}=\overline{OA}.$$

Poiché $\overline{CT}=y$, allora vale

$$\overline{OC}+\overline{CT}=\overline{OA} \to \sqrt{x^2+y^2}+y=3 \to$$

$$\to x^2+y^2=9-6y+y^2 \to x^2=9-6y \to y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}.$$



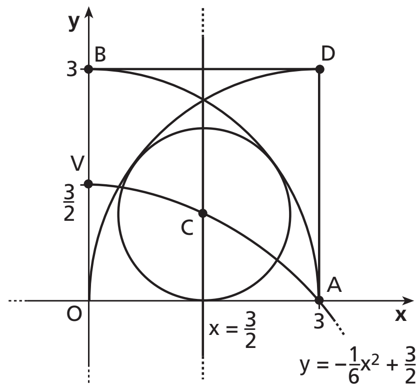

▲ **Figura 9.**

Pertanto il luogo dei centri corrisponde all'arco di parabola $L$ di partenza.

Infine, consideriamo tale luogo, $C\left(x; -\frac{1}{6}x^2+\frac{3}{2}\right)$ e imponiamo che la circonferenza in esso centrata sia anche tangente alla circonferenza centrata in $A$ e con raggio uguale a 3 (figura 10).

Si osserva che gli archi di circonferenza $AB$ e $OD$ sono simmetrici rispetto all'asse mediano $x=\frac{3}{2}$, così la circonferenza $\mathscr{C}$ tangente a entrambi gli archi ha centro su tale asse. Pertanto per $x=\frac{3}{2}$ risulta:

$$C\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\right) \to C\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{8}\right) \text{ con raggio } r=\frac{9}{8}.$$




▲ **Figura 10.**

## QUESTIONARIO

**1** Data la funzione polinomiale $f(x)=5x^4$, il rapporto incrementale di tale funzione nel punto $x=\frac{1}{2}$ risulta:

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}.$$

Per definizione, la derivata di una funzione in un punto è il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale di tale funzione in quel punto, pertanto il limite indicato nella consegna rappresenta la derivata della funzione $f$ nel punto $x=\frac{1}{2}$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{5\left(\frac{1}{2}+h\right)^4-5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}=f'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Calcoliamo il valore del limite sfruttando tale uguaglianza e la regola di derivazione $f'(x)=20x^3$:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=20\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}.$$

**2** Una retta è detta *asintoto* del grafico di una funzione $f(x)$ se la distanza di un generico punto del grafico da tale retta tende a 0 quando l'ascissa o l'ordinata del punto tendono a $\infty$.
In particolare, data una funzione $y=f(x)$ di dominio $D$, se si verifica che:

- $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$, $c\in\mathbb{R}$ si dice che la retta $x=c$, è *asintoto verticale* del grafico della funzione;
- $\lim_{x\to\infty} f(x)=q$, $q\in\mathbb{R}$, si dice che la retta $y=q$ è *asintoto orizzontale* del grafico della funzione;
- $\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$, $m$ e $q\in\mathbb{R}$, $m\neq 0$, si dice che la retta $y=mx+q$ è *asintoto obliquo* del grafico della funzione.

Consideriamo per esempio la funzione $y=\dfrac{4x^2-x+1}{x^2-1}$.

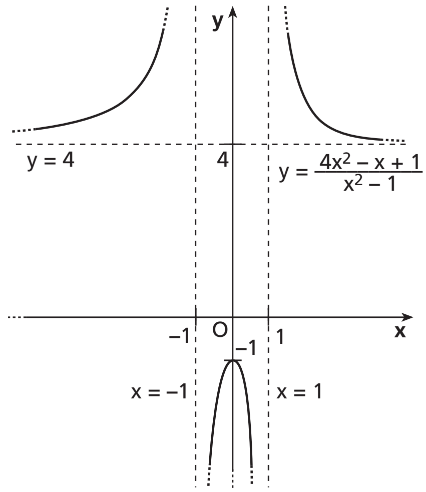
Il dominio è $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$. Calcoliamo il limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to 1^{\pm}}\frac{4x^2-x+1}{x^2-1}=\pm\infty \to \text{il grafico ha asintoto verticale } x=1;$$

$$\lim_{x\to -1^{\pm}}\frac{4x^2-x+1}{x^2-1}=\mp\infty \to \text{il grafico ha asintoto verticale } x=-1;$$

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{4x^2-x+1}{x^2-1}=4 \to \text{il grafico ha asintoto orizzontale } y=4.$$

In figura 11 è riportato il grafico della funzione $y=\dfrac{4x^2-x+1}{x^2-1}$.




▲ **Figura 11.**

**3** In Meccanica l'equazione oraria $s(t)=20\left(2e^{-\frac{t}{2}}+t-2\right)$ rappresenta un moto unidimensionale di un punto materiale. Per definizione di velocità istantanea $v(t)$ e di accelerazione istantanea $a(t)$ risulta:

$$v(t)=s'(t), \qquad a(t)=v'(t)=s''(t).$$

Calcoliamo con le regole di derivazione tali derivate:

$$v(t)=s'(t)=20\left(-e^{-\frac{t}{2}}+1\right), \qquad a(t)=v'(t)=10e^{-\frac{t}{2}}.$$

Ricaviamo il valore dell'accelerazione nell'istante di tempo $t=4$:

$$a(4)=10e^{-\frac{4}{2}}=\frac{10}{e^2}.$$

**4** Consideriamo un cono circolare retto (figura 12), sia $x$ l'altezza, $r$ il raggio del cerchio di base e $a=1$ m l'apotema. Omettendo l'unità di misura, il raggio $r$ e il volume $V$ del cono risultano rispettivamente:

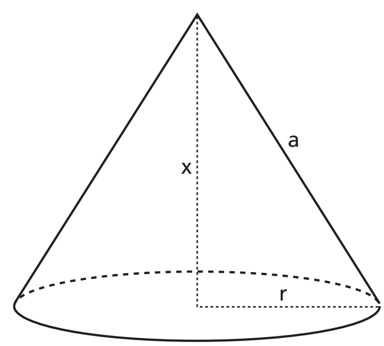
$$r=\sqrt{a^2-x^2} \to r=\sqrt{1-x^2}, \text{ con } 0<x<1;$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 x=\frac{\pi}{3}(1-x^2)x=\frac{\pi}{3}(x-x^3).$$

Consideriamo la funzione:

$$V(x)=\frac{\pi}{3}(x-x^3), \text{ con } 0<x<1,$$

e, per determinare il massimo, calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno nell'intervallo dei limiti geometrici:




▲ **Figura 12.**

$$V'(x)=\frac{\pi}{3}(1-3x^2),$$

$$V'(x)=0 \text{ per } x=\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad V'(x)>0 \text{ per } 0<x<\frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad V'(x)<0 \text{ per } \frac{\sqrt{3}}{3}<x<1.$$

Pertanto il volume del cono è massimo per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e vale:

$$V_{\max} = V\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}.$$

Esprimiamo nuovamente le unità di misura e approssimiamo il valore:

$$V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{27}\,\text{m}^3 \simeq 0{,}403067\ \text{m}^3,$$

poiché 1 $\text{m}^3$ = 1000 L, risulta:

$$V_{\max} \simeq 403{,}067\ \text{L}.$$

**5** Un segmento è definito univocamente dai suoi due estremi, indipendentemente dal loro ordine; pertanto i segmenti che congiungono a due a due $n$ punti sono le combinazioni di $n$ estremi, raggruppati a due a due:

$$C_{n,2} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Analogamente un triangolo è univocamente determinato dai suoi tre vertici, indipendentemente dal loro ordine; il numero di triangoli che si possono formare sono:

$$C_{n,3} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Un tetredro è univocamente determinato dai suoi quattro vertici, indipendentemente dal loro ordine; il numero di tetraedri che si possono formare sono:

$$C_{n,4} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

**6** Data la funzione $f(x) = 5\,\text{sen}\,x\,\cos x + \cos^2 x - \text{sen}^2 x - \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2x - \cos 2x - 17$, applichiamo le formule di duplicazione, $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\cos x$ e $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$, e riscriviamo la funzione:

$$f(x) = \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2x + \cos 2x - \frac{5}{2}\,\text{sen}\,2x - \cos 2x - 17 \rightarrow f(x) = -17.$$

La funzione $f(x)$ è costante, pertanto la sua derivata è nulla:

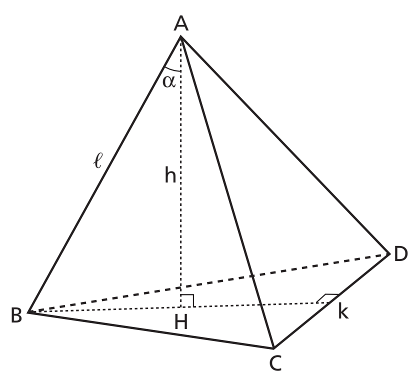
$$f'(x) = D[-17] = 0.$$

**7** Consideriamo il tetraedro regolare di spigolo $l$ e altezza $h$, sia $\alpha$ l'angolo formato da $l$ e da $h$ (figura 13).
Le facce del tetraedro sono triangoli equilateri di lato $l$ e altezza $\frac{\sqrt{3}}{2}l$; l'altezza $h$ cade nell'ortocentro $H$ del triangolo $BCD$ e divide in due parti il segmento $BK$, una doppia dell'altra. Risulta allora:

$$\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BK} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}l\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}l.$$

Consideriamo il triangolo rettangolo $BHA$ e applichiamo uno dei teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}l}{l} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



▲ **Figura 13.**

Segue allora che l'ampiezza in gradi sessagesimali dell'angolo α vale:

$$\alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} = 35{,}264\ldots° \simeq 35°\ 16'.$$

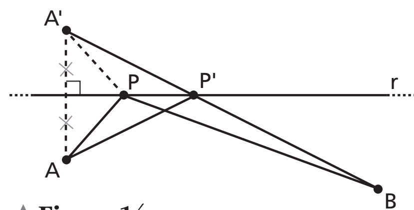
**8** Data la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, essa è continua nell'intervallo $[1; e]$; pertanto vale il teorema della media ovvero esiste almeno un punto $z$ appartenente all'intervallo tale che:

$$\int_1^e f(x)dx = f(z)\cdot(e-1).$$

Si chiama $f(z)$ il valor medio della funzione nell'intervallo e ha valore:

$$f(z) = \frac{\int_1^e f(x)dx}{e-1} = \frac{\int_1^e \frac{1}{x}dx}{e-1} = \frac{[\ln|x|]_1^e}{e-1} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

**9** Consideriamo una retta $r$, un punto generico $P$ sulla retta e i punti $A$ e $B$ dalla stessa parte della retta. Rappresentiamo il punto $A'$ simmetrico ad $A$ rispetto alla retta $r$; minimizzare il percorso $AP + PB$ equivale a minimizzare il percorso $A'P + PB$. Tracciamo il segmento $A'B$ che interseca la retta $r$ nel punto $P'$ (figura 14).




▲ **Figura 14.**

Dimostriamo che $A'P'B$ è il minimo percorso che congiunge $A'$ con $B$.

Consideriamo il segmento $A'B$ (percorso $A'P' + P'B$); per disuguaglianza triangolare vale:

$$A'B < A'P + PB.$$

Pertanto il minimo percorso che congiunge $A'$ con $B$ è $A'P' + P'B$ e di conseguenza $AP' + P'B$ è il minimo percorso che congiunge $A$ con $B$.

**10** Consideriamo le varie alternative di funzioni composte.

A) La funzione $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x^2+1))$ ha argomento del coseno compreso tra $-1$ e $1$; poiché la funzione coseno è positiva nell'intervallo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ e $]-1; 1[ \subset \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, allora la funzione $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(x^2+1))$ è sempre positiva in $\mathbb{R}$.

B) La funzione $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2+1))$ ha argomento del seno compreso tra $-1$ e $1$; poiché la funzione seno è positiva nell'intervallo $]0; 1[$ e negativa in $]-1; 0[$, allora la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(x^2+1))$ non è sempre positiva in $\mathbb{R}$.

C) La funzione $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2+1))$ ha argomento del seno che assume valori in $[0; +\infty[$; poiché la funzione seno in tale intervallo assume sia valori positivi che negativi, la funzione non è sempre positiva in $\mathbb{R}$.

D) Ugualmente la funzione $f(x) = \cos(\ln(x^2+1))$ ha argomento del coseno che assume valori in $[0; +\infty[$; poiché la funzione coseno in tale intervallo assume sia valori positivi che negativi, la funzione non è sempre positiva in $\mathbb{R}$.

In conclusione la risposta esatta è la A.