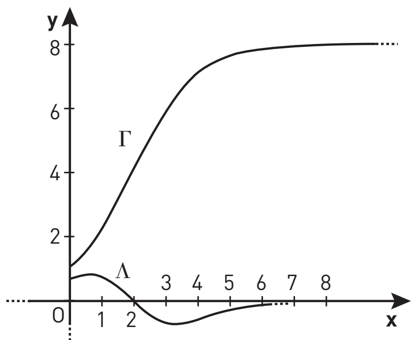
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Una funzione $f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[0; +\infty[$ e nella figura sono disegnati i grafici Γ e Λ di $f(x)$ e della sua derivata seconda $f''(x)$. La tangente a Γ nel suo punto di flesso, di coordinate $(2; 4)$ passa per $(0; 0)$, mentre le rette $y = 8$ e $y = 0$ sono asintoti orizzontali per Γ e Λ, rispettivamente.



▲ **Figura 1.**

1. Si dimostri che la funzione $f'(x)$, ovvero la derivata prima di $f(x)$, ha un massimo e se ne determinino le coordinate. Sapendo che per ogni x del dominio è $f''(x) \le f'(x) \le f(x)$, qual è il possibile andamento di $f'(x)$?
2. Si supponga che $f(x)$ costituisca, ovviamente in opportune unità di misura, il modello di crescita di un certo tipo di popolazione. Quali informazioni sulla sua evoluzione si possono dedurre dai grafici in figura e in particolare dal fatto che Γ presenta un asintoto orizzontale e un punto di flesso?
3. Se Γ è il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{b-x}}$, si provi che $a = 8$ e $b = 2$.
4. Nell'ipotesi del punto 3., si calcoli l'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0; 2]$.

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x positivi, da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico γ su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0; 1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.

4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse delle y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.

QUESTIONARIO

1 Un triangolo ha area 3 e due lati che misurano 2 e 3. Qual è la misura del terzo lato? Si giustifichi la risposta.

2 Se la funzione $f(x) - f(2x)$ ha derivata 5 in $x = 1$ e derivata 7 in $x = 2$, qual è la derivata di $f(x) - f(4x)$ in $x = 1$?

3 Si considerino, nel piano cartesiano, i punti $A(2; -1)$ e $B(-6; -8)$. Si determini l'equazione della retta passante per B e avente distanza massima da A.

4 Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

5 In un libro si legge: "se per la dilatazione corrispondente a un certo aumento della temperatura un corpo si allunga (in tutte le direzioni) di una certa percentuale (per es. 0,38%), esso si accresce in volume in proporzione tripla (cioè dell'1,14%), mentre la sua superficie si accresce in proporzione doppia (cioè del 0,76%)". È così? Si motivi esaurientemente la risposta.

6 Con le cifre da 1 a 7 è possibile formare $7! = 5040$ numeri corrispondenti alle permutazioni delle 7 cifre. Ad esempio i numeri 1 234 567 e 3 546 712 corrispondono a due di queste permutazioni. Se i 5040 numeri ottenuti dalle permutazioni si dispongono in ordine crescente qual è il numero che occupa la settima posizione e quale quello che occupa la 5036-esima posizione e quale quello che occupa la 1441-esima posizione?

7 In un gruppo di 10 persone il 60% ha gli occhi azzurri. Dal gruppo si selezionano a caso due persone. Qual è la probabilità che nessuna di esse abbia occhi azzurri?

8 Si mostri, senza usare il teorema di L'Hôpital, che:

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi} = -1.$$

9 Tre amici discutono animatamente di numeri reali. Anna afferma che sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti e dunque i razionali sono tanti quanti gli irrazionali. Paolo sostiene che gli irrazionali costituiscono dei casi eccezionali, ovvero che la maggior parte dei numeri reali sono razionali. Luisa afferma, invece, il contrario: sia i numeri razionali che gli irrazionali sono infiniti, ma esistono più numeri irrazionali che razionali. Chi ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta.

10 Si stabilisca per quali valori $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo $[0; 3]$. Posto $k = 3$, si approssimi con due cifre decimali la maggiore di tali soluzioni, applicando uno dei metodi iterativi studiati.

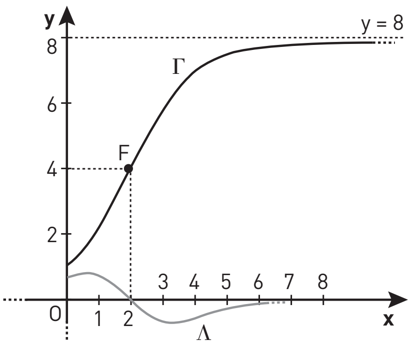
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione $f'(x)$ e osserviamo nella figura 2 il segno della sua derivata prima $f''(x)$ ovvero il grafico Λ:

- $f''(x) > 0$ per $0 \leq x < 2$ $\rightarrow$ $f'(x)$ crescente;
- $f''(x) = 0$ per $x = 2$ $\rightarrow$ $x = 2$ punto stazionario per $f'(x)$;
- $f''(x) < 0$ per $x > 2$ $\rightarrow$ $f'(x)$ decrescente.

La funzione $f'(x)$ ha quindi un solo punto stazionario, in particolare ha un massimo per $x = 2$.



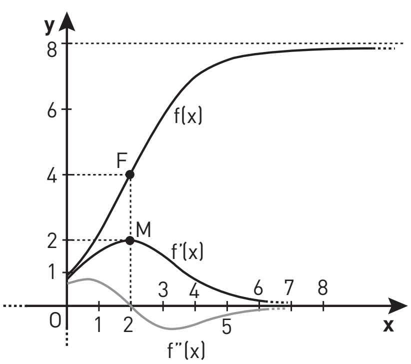
▲ **Figura 2.**

Per calcolare la sua ordinata, $f'(2)$, consideriamo la retta tangente al grafico Γ di $f(x)$ nel suo punto di flesso $F(2; 4)$. Sapendo che tale retta passa per l'origine O, essa ha equazione $y = f'(2) \cdot x$.
Imponiamo il passaggio per $F(2; 4)$:

$$4 = f'(2) \cdot 2 \quad \rightarrow \quad f'(2) = 2.$$

Il punto di massimo assoluto del grafico di $f'(x)$ ha quindi coordinate $M(2; 2)$.
Per ipotizzare un possibile andamento di $f'(x)$ si osserva dalla figura che la funzione $f(x)$ è sempre crescente e che ha asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$: ciò comporta che la sua derivata prima $f'(x)$ è sempre positiva e che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ ovvero che $y = 0$ è asintoto orizzontale per il grafico della funzione $f'(x)$.
Rappresentiamo in figura 3 un possibile grafico della derivata prima, tenendo conto che:

$f''(x) \leq f'(x) \leq f(x)$.



◀ **Figura 3.**

2. Se $f(x)$ rappresenta il modello di crescita di un certo tipo di popolazione, possiamo considerare il suo tasso di crescita in funzione della variabile x come la sua derivata prima, ovvero $f'(x)$. Osserviamo che il tasso di crescita:

- aumenta per $0 \leq x < 2$ $\rightarrow$ la popolazione aumenta sempre più rapidamente;
- ha un massimo per $x = 2$ $\rightarrow$ in tale punto si registra un flesso nell'andamento del modello;
- diminuisce per $x > 2$, tendendo a 0 per $x \rightarrow +\infty$ $\rightarrow$ la popolazione cresce ma sempre meno rapidamente fino a stabilizzarsi sul valore 8.

3. Posto $f(x) = \dfrac{a}{1 + e^{b-x}}$, è noto che per il punto 1 la funzione passa per il punto $F(2; 4)$ e che $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 8$. Imponiamo tali condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1 + e^{b-2}} = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{1 + e^{b-x}} = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{1 + e^{b-2}} = 4 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{1 + e^{b-2}} = 4 \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2 = 1 + e^{b-2} \\ a = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = 8 \end{cases}.$$

Pertanto risulta:

$$f(x) = \frac{8}{1 + e^{2-x}}.$$

4. L'area della regione di piano delimitata da Λ e dall'asse x sull'intervallo $[0; 2]$ è:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 f''(x)dx.$$

Per il teorema del calcolo integrale risulta:

$$\int_0^2 f''(x)dx = f'(2) - f'(0).$$

Al punto 1 si era trovato $f'(2) = 2$.

Calcoliamo, nota $f(x) = \dfrac{8}{1 + e^{2-x}}$, la sua derivata prima nel punto $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{-8e^{2-x}(-1)}{(1 + e^{2-x})^2} \rightarrow f'(0) = \frac{8e^2}{(1 + e^2)^2}.$$

Quindi ricaviamo:

$$\mathcal{A} = 2 - \frac{8e^2}{(1 + e^2)^2}.$$

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 \ln x$:

- il dominio è $]0; +\infty[$;
- vista la natura del dominio, la funzione non è né pari né dispari;
- poiché $x > 0$, il grafico non interseca l'asse y; per le intersezioni con l'asse x valutiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=x^3 \ln x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \quad \text{non accettabile} \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ \ln x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow P(1;\,0);$$

- studiamo il segno della funzione tenendo conto del suo dominio:

$$\begin{cases} x>0 \\ f(x)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^3 \ln x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \quad x>1,$$

  pertanto la funzione è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $0 < x < 1$;
- studiamo l'esistenza di eventuali asintoti valutando i limiti agli estremi del dominio:

  a) $\lim_{x\to 0^+} x^3 \ln x$

  si tratta di una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3\cdot\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0,$$

  il punto $(0;\,0)$ è un punto di discontinuità della funzione;

  b) $\lim_{x\to +\infty} x^3 \ln x = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = +\infty,$

  pertanto non esistono asintoti orizzontali e obliqui;
- determiniamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno, tenendo conto del suo dominio:

  $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1),$

  pertanto:

$$\begin{cases} x>0 \\ f'(x)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2(3\ln x+1)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ 3\ln x+1>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x>-\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x>0 \\ x>e^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \rightarrow \quad x>\frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

quindi:

- $f'(x)>0$ per $x>\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\rightarrow f(x)$ è crescente;
- $f'(x)=0$ per $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\rightarrow f(x)$ ha un punto stazionario;
- $f'(x)<0$ per $0<x<\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\rightarrow f(x)$ è decrescente;

la funzione ha quindi un minimo relativo per $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\simeq 0{,}717$ e il corrispondente punto M sul grafico ha coordinate:

$$\begin{cases} x_M=\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ y_M=x_M^3\ln x_M \end{cases} \to \begin{cases} x_M=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\simeq 0{,}717 \\ y_M=-\frac{1}{3e}\simeq -0{,}123 \end{cases};$$

- valutiamo il comportamento della derivata prima nell'intorno destro di 0:

  $$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2(3\ln x+1)$$

  si tratta di una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln x+1}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{3}{x}}{-2\cdot\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{3x^2}{2}=0,$$

  la derivata destra del punto $x=0$ è quindi nulla;

- studiamo la concavità del grafico della funzione studiando il segno della derivata seconda, tenendo conto del dominio della funzione:

  $$f''(x)=2x(3\ln x+1)+x^2\cdot\frac{3}{x}=6x\ln x+5x=x(6\ln x+5),$$

  pertanto:

  $$\begin{cases} x>0 \\ f''(x)>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>0 \\ x(6\ln x+5)>0 \end{cases} \to 6\ln x+5>0 \to \ln x>-\frac{5}{6} \to x>\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$$

  quindi:

  – $f''(x)>0$ per $x>\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\to$ $f(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto;

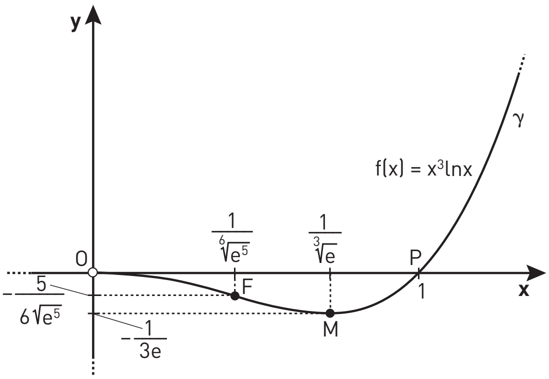
  – $f''(x)=0$ per $x=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\to$ $f(x)$ ha un punto di flesso;

  – $f''(x)<0$ per $0<x<\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\to$ $f(x)$ ha concavità rivolta verso il basso;

  la funzione ha un flesso per $x=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\simeq 0{,}435$ e il corrispondente punto F sul grafico ha coordinate:

  $$\begin{cases} x_F=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \\ y_F=x_F^3\ln x_F \end{cases} \to \begin{cases} x_F=\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\simeq 0{,}435 \\ y_F=-\frac{5}{6\sqrt{e^5}}\simeq -0{,}068 \end{cases}$$

In figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x) = x^3 \ln x$.



▲ **Figura 4.**

2. Una parabola con asse parallelo all'asse y e passante per l'origine ha equazione $y = ax^2 + bx$.
Imponiamo il passaggio per $P(1; 0)$:

$$0 = a + b \quad \to \quad b = -a.$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 - ax$$

Se la conica è tangente a γ in P le derivate delle funzioni corrispondenti devono essere uguali per $x = 1$:

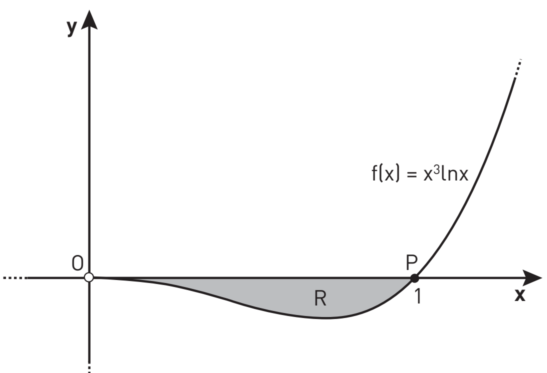
$$y' = 2ax - a \quad \to \quad y'(1) = 2a - a = a$$

$$f'(x) = x^2(3\ln x + 1) \quad \to \quad f'(1) = 1.$$

Pertanto $a = 1$ e la parabola cercata ha equazione $y = x^2 - x$.

3. Poiché la funzione $f(x)$ è non positiva nell'intervallo $]0; 1]$ (figura 5), l'area della regione R delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto si calcola tramite il seguente integrale definito improprio:

$$\mathcal{A}(R) = \lim_{x \to 0^+} \int_x^1 -f(t)dt = -\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 t^3 \ln t dt.$$



▲ **Figura 5.**

Per semplicità risolviamo l'integrale indefinito $\int t^3 \ln t\, dt$ mediante l'integrazione per parti:

$$\int t^3 \ln t\, dt = \frac{t^4}{4}\ln t - \int \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \frac{t^4}{4}\ln t - \int \frac{t^3}{4}\, dt = \frac{t^4}{4}\ln t - \frac{t^4}{16} + c.$$

Pertanto $\mathscr{A}(R)$ risulta:

$$\mathscr{A}(R) = -\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t^3 \ln t\, dt = -\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{t^4}{16}\right]_x^1 = -\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{16} - \frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{16}\right).$$

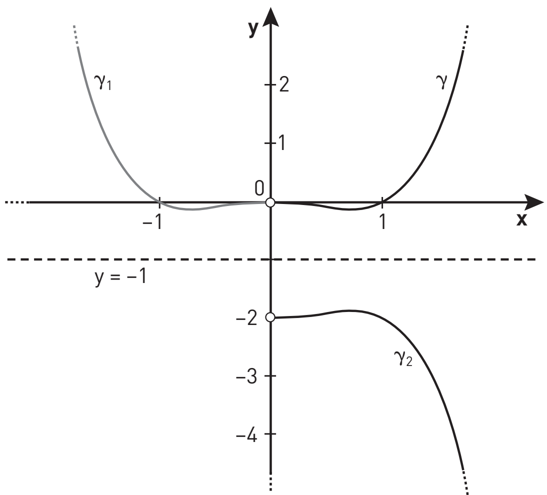
Poiché la forma indeterminata del limite $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{4}\ln x$ è eliminabile con il teorema di De L'Hôpital e vale $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{4}\ln x = 0$, allora:

$$\mathscr{A}(R) = -\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}.$$

Supposta l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro, risulta:

$$\mathscr{A}(R) = \frac{1}{16}\ \text{dm}^2 = 0{,}0625\ \text{dm}^2 = 625\ \text{mm}^2.$$

4. Nella figura 6 sono rappresentati i grafici γ_1 e γ_2, rispettivamente γ_1 simmetrico di γ rispetto all'asse delle y e γ_2 simmetrico di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.



▲ **Figura 6.**

Determiniamo l'equazione della curva γ_1 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto all'asse y:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad\to\quad y' = -x'^3 \ln(-x') \quad\to\quad \gamma_1\!: y = -x^3 \ln(-x),\ x < 0.$$

Ricaviamo l'equazione della curva γ_2 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = -1$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2 - y \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} x = x' \\ y = -2 - y' \end{cases} \quad\to\quad -2 - y' = x'^3 \ln x' \quad\to\quad \gamma_2\!: y = -x^3 \ln x - 2,\ x > 0.$$

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova del corso di ordinamento 2013.

2 Considerata $f(x)$ derivabile, la funzione $f(x) - f(4x)$ è anch'essa derivabile e, secondo le regole di derivazione, la sua derivata risulta uguale a:

$$f'(x) - 4f'(4x),$$

e in particolare per $x = 1$ vale:

$$f'(1) - 4f'(4).$$

Analogamente la funzione $f(x) - f(2x)$ è anch'essa derivabile e la sua derivata risulta:

$$f'(x) - 2f'(2x).$$

Per ipotesi tale derivata vale 5 in $x = 1$ e 7 in $x = 2$, pertanto valgono le seguenti uguaglianze:

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ f'(2) - 2f'(4) = 7 \end{cases}.$$

Moltiplichiamo per 2 entrambi i membri della seconda uguaglianza:

$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 5 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 14 \end{cases}.$$

Sommiamo membro a membro le due equazioni:

$$f'(1) - 2f'(2) + 2f'(2) - 4f'(4) = 5 + 14 \quad \to \quad f'(1) - 4f'(4) = 19.$$

Se ne conclude allora che la derivata della funzione $f(x) - f(4x)$ nel punto $x = 1$ vale 12.

3 Vedi lo svolgimento del quesito 3 della prova del corso di ordinamento 2013.

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2013.

5 Consideriamo per semplicità un corpo con la forma di un parallelepipedo di spigoli a, b, c. Il suo volume vale $V = abc$. Indicata con p la percentuale con cui aumentano le dimensioni tramite una dilatazione termica, queste diventano:

$$a' = a + a \cdot p = a(1 + p), \qquad b' = b + b \cdot p = b(1 + p), \qquad c' = c + c \cdot p = c(1 + p).$$

Il nuovo volume V' ha quindi valore:

$$V' = a(1 + p) \cdot b(1 + p) \cdot c(1 + p) = abc(1 + p)^3 \quad \to \quad V' = V(1 + p)^3.$$

Ricaviamo l'aumento relativo del volume:

$$\frac{V' - V}{V} = \frac{V(1 + p)^3 - V}{V} = (1 + p)^3 - 1 = p^3 + 3p^2 + 3p.$$

Pertanto se $p = 0{,}38\% = 0{,}0038$:

$$\frac{V' - V}{V} = (0{,}0038)^3 + 3(0{,}0038)^2 + 3(0{,}0038) =$$

$$= 5{,}4872 \cdot 10^{-8} + 4{,}32 \cdot 10^{-5} + 1{,}14 \cdot 10^{-2} \simeq 1{,}14 \cdot 10^{-2} = 1{,}14\% = 3 \cdot p.$$

Concludiamo che, se la percentuale di dilatazione lineare p è piccola, come nel caso di $p = 0{,}38\%$, i termini di secondo e terzo grado, p^2 e p^3, possono trascurarsi e il corpo si accresce in volume in proporzione tripla, come sostenuto nell'affermazione del libro.

Analogamente determiniamo la dilatazione termica superficiale del corpo considerando un rettangolo di dimensioni a e b. La superficie vale $S = ab$, mentre quella dilatata risulta:

$$S' = a(1+p) \cdot b(1+p) = ab(1+p)^2 \quad \rightarrow \quad S' = S(1+p)^2.$$

Ricaviamo l'aumento relativo superficiale:

$$\frac{S'-S}{S} = \frac{S(1+p)^2 - S}{S} = (1+p)^2 - 1 = p^2 + 2p.$$

Pertanto se $p = 0{,}38\% = 0{,}0038$:

$$\frac{S'-S}{S} = (0{,}0038)^2 + 2 \cdot 0{,}0038 = 1{,}444 \cdot 10^{-5} + 7{,}6 \cdot 10^{-3} \simeq 7{,}6 \cdot 10^{-3} = 0{,}76\% = 2 \cdot p.$$

Anche in questo caso se la percentuale di dilatazione lineare p è piccola, il termine di secondo grado, p^2, si può trascurare e la superficie del corpo si accresce in proporzione doppia, come affermato dal testo del libro.

6 Il numero più piccolo che si può formare con le cifre da 1 a 7 è 1 234 567. Disponiamo le cifre secondo la seguente stringa:

1	2	3	4	5	6	7

Osserviamo che i primi sei numeri che si possono scrivere in ordine crescente sono quelli ottenibili dalla permutazione delle ultime tre cifre ($3! = 6$ permutazioni):

1 234 567, 1 234 576, 1 234 657, 1 234 675, 1 234 756, 1 234 765.

Pertanto il settimo valore nella successione si ottiene dalla stringa di partenza tenendo fisse le prime tre cifre (l'1, il 2 e il 3) e scambiando il 4 con il 5:

1 235 467.

Per determinare il valore che occupa la 5036-esima posizione e, sapendo che il numero totale degli elementi della successione è 5040, possiamo partire dal valore più grande:

7 654 321

che occupa la 5040-esima posizione, e andare così a ritroso fino alla vicina 5036-esima posizione:

5040-esima posizione: 7 654 321
5039-esima posizione: 7 654 312
5038-esima posizione: 7 654 231
5037-esima posizione: 7 654 213
5036-esima posizione: 7 654 132

Pertanto il valore che occupa la 5036-esima posizione è 7 654 132.
Infine, osservando che $6! = 720$, i primi 720 valori della successione si possono ottenere permutando le ultime 6 cifre della seguente stringa, tenendo fissa la prima cifra dell'1:

1	2	3	4	5	6	7

Ne consegue che i successivi 720 valori, fino alla 1440-esima posizione, si ottengono permutando le ultime 6 cifre della nuova seguente stringa, tenendo fissa la prima cifra del 2:

2	1	3	4	5	6	7

Se ne deduce che il valore della successione che occupa la 1441-esima posizione è il valore più piccolo che ha come prima cifra il 3 ovvero:

3 124 567.

7 In un gruppo di 10 persone il 60% ha gli occhi azzurri, ovvero 6 persone hanno questa caratteristica mentre 4 persone no. Calcoliamo la probabilità p che selezionando a caso due persone nessuna abbia gli occhi azzurri tramite la concezione classica di probabilità e il calcolo combinatorio:

$$\text{numero dei casi possibili: } C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45,$$

$$\text{numero dei casi favorevoli: } C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6.$$

La probabilità p vale quindi:

$$p = \frac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}.$$

8 Il limite

$$\lim_{x \to \pi} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{x - \pi}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Poniamo $h = x - \pi$ e sostituiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h}.$$

Esso rappresenta il limite del rapporto incrementale della funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ calcolato nel punto $x = \pi$. Per definizione è la derivata calcolata in tale punto ovvero

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h} = f'(\pi).$$

Per i teoremi di derivazione risulta

$$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \quad \rightarrow \quad f'(\pi) = e^{\operatorname{sen} \pi} \cdot \cos \pi = -1,$$

pertanto il limite di partenza è uguale a -1.

Tuttavia, dopo avere eseguito la sostituzione, si può procedere nel seguente modo alternativo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}(\pi + h)} - e^{\operatorname{sen} \pi}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{h}$$

moltiplichiamo numeratore e denominatore per $-\operatorname{sen} h$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{-\operatorname{sen} h} \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) =$$

per i limiti notevoli $\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$ e $\lim_{h \to 0} \frac{e^{g(h)} - 1}{h} = 1$, risulta allora:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen} h} - 1}{-\operatorname{sen} h} \cdot \left(-\frac{\operatorname{sen} h}{h} \right) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

9 Per risolvere il problema è necessario ricordare che la cardinalità di un insieme è il numero degli elementi che lo costituiscono; due insiemi hanno la stessa cardinalità (o potenza) se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi; un insieme ha cardinalità minore di un altro se esiste una funzione iniettiva tra il primo insieme e il secondo, ma non viceversa. È noto che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e i numeri razionali $\mathbb{Q}$ hanno la stessa cardinalità (si veda, per questo, lo svolgimento del quesito 4 del corso sperimentale P.N.I. 2012).
Si può dimostrare che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, in particolare si dimostra che $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore dei numeri reali compresi tra 0 e 1 e a maggior ragione l'avrà rispetto a tutto $\mathbb{R}$. Tale dimostrazione si basa sul cosiddetto *argomento diagonale*, proprio di G. Cantor (1845-1918), con quale il matematico dimostrò la non numerabilità di $\mathbb{R}$. Ipotizziamo per assurdo l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e i numeri reali appartenenti all'intervallo [0; 1]; ciò genera una successione formata da tutti questi numeri che esprimeremo in forma decimale:

$$x_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots$$
$$x_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots$$
$$x_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dove a_{ij} è la cifra j-esima del numero i-esimo.

Osserviamo il numero formato dagli elementi della diagonale principale della matrice $\{a_{ij}\}$:

$$0,\ a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \dots$$

e costruiamo un nuovo numero $\overline{x} = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ \dots$, dove la cifra b_i è così generata:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } 0 \leq a_{ii} < 9 \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9 \end{cases} .$$

Si può dedurre che il numero $\overline{x}$, reale e appartenente all'intervallo [0; 1] non appare nella successione $\{x_i\}$. Pertanto non esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e i numeri reali dell'intervallo [0; 1] e, a maggior ragione, tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.
Ora, l'insieme degli irrazionali $\mathbb{I}$ è l'insieme differenza $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$: tale insieme ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$. Pertanto ha ragione Luisa affermando che esistono più numeri irrazionali che razionali.

10 Consideriamo l'equazione $x^2(3 - x) = k$ e poniamo entrambi i membri uguali a y; otteniamo il seguente sistema parametrico:

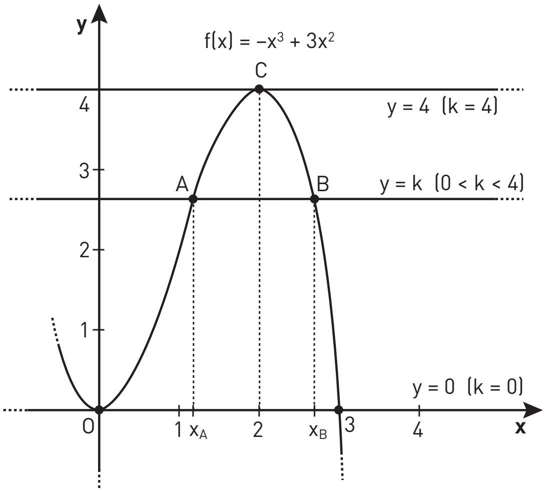
$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = k \end{cases} .$$

Si tratta di studiare nel piano cartesiano le intersezioni del grafico della funzione razionale intera $f(x) = -x^3 + 3x^2$ col fascio improprio di rette $y = k$.

Tale funzione:

- ha dominio reale;
- poiché $f(-x) \neq \pm f(x)$, essa non è né pari né dispari;
- si annulla per $x = 0$ e $x = 3$;
- è positiva per $x < 3$ e negativa per $x > 3$;
- non ha asintoti;
- ha derivata prima $f'(x) = -3x^2 + 6x$, positiva per $0 < x < 2$, negativa per $x < 0 \vee x > 2$, nulla per $x = 0 \vee x = 2$; il grafico di f è così dotato di minimo nel punto $O(0; 0)$ e di massimo nel punto $C(2; 4)$.

Rappresentiamo in figura 7 il grafico della funzione $f(x)$ e studiamo le sue intersezioni nell'intervallo $0 \leq x \leq 3$ con le rette del fascio improprio $y = k$.



▲ **Figura 7.**

Dalla figura si osserva che l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ha:

- per $k = 0$, tre soluzioni di cui due coincidenti e una distinta;
- per $0 < k < 4$, due soluzioni distinte, $x_A < x_B$;
- per $k = 4$, due soluzioni coincidenti.

Quindi l'equazione $x^2(3 - x) = k$ ammette due soluzioni distinte appartenenti all'intervallo [0; 3] per $0 \leq k < 4$.
Posto $k = 3$, si deduce dal grafico che la soluzione maggiore x_B appartiene all'intervallo [2; 3] ed è l'unica soluzione in tale intervallo dell'equazione $-x^3 + 3x^2 = 3$.
Posto $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 3$, x_B è anche l'unico zero di $g(x)$ per $2 < x < 3$. Determiniamo un valore approssimato di tale zero col metodo di bisezione compilando la seguente tabella.

n	a_n	b_n	$g(a_n)$	$g(b_n)$	$m_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$g(m_n)$	$\epsilon_n = \frac{b_n - a_n}{2}$
1	2	3	1	− 3	2,5	0,125	0,5
2	2,5	3	0,125	− 3	2,75	− 1,109375	0,25
3	2,5	2,75	0,125	− 1,109375	2,625	− 0,416016	0,125
4	2,5	2,625	0,125	− 0,416016	2,5625	− 0,127197	0,0625
5	2,5	2,5625	0,125	− 0,127197	2,53125	0,003387	0,03125
6	2,53125	2,5625	0,003387	− 0,127197	2,546875	− 0,060772	0,015625
7	2,53125	2,546875	0,003387	− 0,060772	2,539063	− 0,028410	0,007813

Osservando la colonna dei valori medi, il valore approssimato con due cifre decimali della soluzione x_B è 2,53.

- Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nei problemi e nei quesiti vai sul sito **www.online.zanichelli.it/provamatematica**