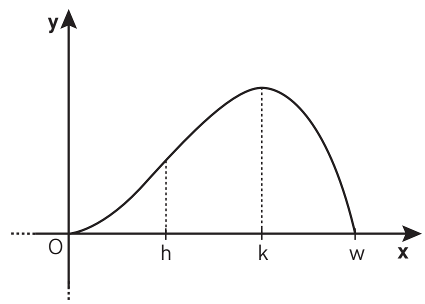
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2014

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nella figura a lato è disegnato il grafico Γ di $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ con f funzione definita sull'intervallo $[0; w]$ e ivi continua e derivabile. Γ è tangente all'asse x nell'origine O del sistema di riferimento e presenta un flesso e un massimo rispettivamente per $x=h$ e $x=k$.

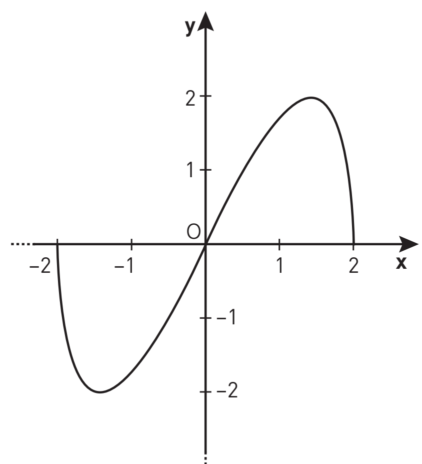


▲ **Figura 1.**

1. Si determinino $f(0)$ e $f(k)$; si dica se il grafico della funzione f presenti punti di massimo o di minimo e se ne tracci il possibile andamento.
2. Si supponga, anche nei punti successivi 3 e 4, che $g(x)$ sia, nell'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado. Si provi che, in tal caso, i numeri h e k dividono l'intervallo $[0; w]$ in tre parti uguali.
3. Si determini l'espressione di $g(x)$ nel caso $w=3$ e $g(1)=\frac{2}{3}$ e si scrivano le equazioni delle normali a Γ nei punti in cui esso è tagliato dalla retta $y=\frac{2}{3}$.
4. Si denoti con R la regione che Γ delimita con l'asse x e sia W il solido che essa descrive nella rotazione completa intorno all'asse y. Si spieghi perché il volume di W si può ottenere calcolando:
$$\int_0^3 (2\pi x)g(x)dx.$$
Supposte fissate in decimetri le unità del sistema monometrico Oxy, si dia la capacità in litri di W.

PROBLEMA 2

A lato è disegnato il grafico Γ della funzione
$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}.$$



▲ **Figura 2.**

1. Si calcolino il massimo e il minimo assoluti di $f(x)$.
2. Si dica se l'origine O è centro di simmetria per Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in O a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
3. Si disegni la curva di equazione $y^2=x^2(4-x^2)$ e si calcoli l'area della parte di piano da essa racchiusa.
4. Sia $h(x)=\text{sen}(f(x))$ con $0\le x\le 2$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x)=k$ ha 4 soluzioni distinte?

QUESTIONARIO

1 Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?

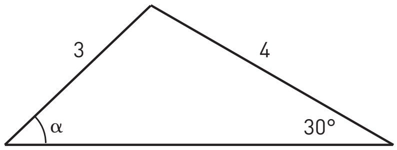


Figura 3.

2 Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce sono esagoni.

3 Nello sviluppo di $(2a^2 - 3b^3)^n$ compare il termine $-1080a^4b^9$. Qual è il valore di n?

4 Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2; -1]$.

In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.

5 Dei numeri 1, 2, 3, …, 6000, quanti non sono divisibili né per 2, né per 3, né per 5?

6 Un'azienda commercializza il suo prodotto in lattine da 5 litri a forma di parallelepipedo a base quadrata. Le lattine hanno dimensioni tali da richiedere la minima quantità di latta per realizzarle. Quali sono le dimensioni, arrotondate ai mm, di una lattina?

7 Il valor medio della funzione $f(x) = x^3$ sull'intervallo chiuso $[0; k]$ è 9. Si determini k.

8 Del polinomio di quarto grado $P(x)$ si sa che assume il suo massimo valore 3 per $x = 2$ e $x = 3$ e, ancora, che $P(1) = 0$. Si calcoli $P(4)$.

9 Si determini il dominio della funzione:

$$f(x) = \sqrt{3 - \log_2(x+5)}.$$

10 Si determinino i valori reali di x per cui:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2 - 10x + 26)\right)^{x^2 - 6x + 1} = 1.$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2014

PROBLEMA 1

1. Consideriamo la funzione $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Poiché f è definita continua nell'intervallo $[0; w]$ possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale: per ogni punto x dell'intervallo la funzione $g(x)$ è derivabile e risulta $g'(x) = f(x)$. Inoltre per ipotesi $f(x)$ è derivabile, pertanto $g''(x) = f'(x)$.

Osserviamo il grafico Γ di $g(x)$ (figura 4a):

- nel punto $x = 0$ la funzione $g(x)$ è tangente all'asse x, pertanto la derivata destra $g'_+(0)$ è nulla e, tenendo conto che $g'(x) = f(x)$, vale $f(0) = 0$;
- nel punto $x = k$ la funzione $g(x)$ ha un massimo relativo e sono soddisfatte le condizioni $g'(k) = 0$ e $g''(k) < 0$, ne deriva allora che $f(k) = 0$ e $f'(k) < 0$;
- nel punto $x = h$ la funzione $g(x)$ presenta un flesso discendente, per la condizione necessaria per i flessi, la derivata seconda in tale punto risulta $g''(h) = 0$ e quindi $f'(h) = 0$.

In conclusione $f(0) = f(k) = 0$.

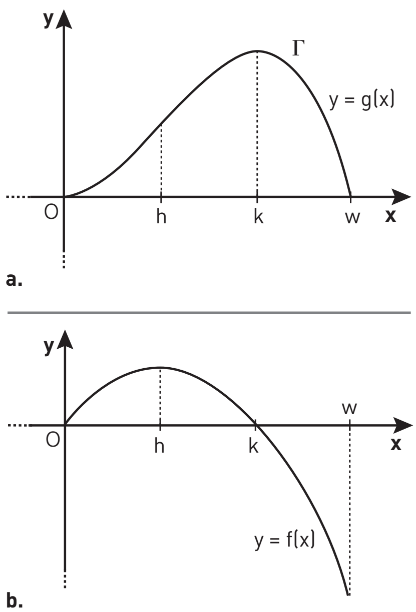


Figura 4.

Valutiamo ora il possibile andamento del grafico della funzione $f(x)$.

- Intersezione con gli assi cartesiani: per quanto visto nella dimostrazione precedente $f(0) = f(k) = 0$, pertanto il grafico di f interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = 0$ e $x = k$.
- Segno della funzione:
  - nell'intervallo $0 < x < k$, $g(x)$ è crescente, ovvero $g'(x) > 0$, pertanto $f(x) > 0$;
  - nell'intervallo $k < x < w$, $g(x)$ è decrescente, cioè $g'(x) < 0$, quindi $f(x) < 0$.
- Studio della derivata prima ed estremanti:
  - nell'intervallo $0 < x < h$, $g(x)$ ha concavità verso l'alto, ovvero $g''(x) > 0$, pertanto $f'(x) > 0$ e f è crescente;
  - per $x = h$, $g''(h) = 0$ e quindi $f'(h) = 0$, $x = h$ è un punto stazionario per f;
  - nell'intervallo $h < x < w$, $g(x)$ ha concavità verso il basso, cioè $g''(x) < 0$, quindi $f'(x) < 0$ e f è decrescente.

  La funzione f ha allora un solo massimo relativo e quindi assoluto in $x = h$; ha due minimi relativi in $x = 0$ e $x = w$, con $f(0) = 0$ e $f(w) = g'(w) < 0$.

In figura 4b è rappresentato un possibile andamento della funzione $f(x)$.

2. Assumiamo per ipotesi che $g(x)$ sia, nell'intervallo considerato, esprimibile come funzione polinomiale di terzo grado $g(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Tenendo conto che $g(0)=0$, possiamo scrivere:

$$g(x)=ax^3+bx^2+cx.$$

Calcoliamo la derivata prima $g'(x)$ e seconda $g''(x)$:

$$g'(x)=3ax^2+2bx+c,$$
$$g''(x)=6ax+2b.$$

Imponiamo le condizioni trovate al punto 1 e raccogliamole a sistema:

$$\begin{cases} g'_+(0)=0 \\ g'(k)=0 \\ g''(h)=0 \\ g(w)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 3ak^2+2bk+c=0 \\ 6ah+2b=0 \\ aw^3+bw^2+2cw=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c=0 \\ k(3ak+2b)=0 \\ 6ah+2b=0 \\ w^2(aw+b)=0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} k=-\dfrac{2b}{3a}=-2\dfrac{b}{3a} \\ h=-\dfrac{1b}{3a}=-\dfrac{b}{3a} \\ w=-\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Poiché i valori h, k, w sono dati positivi, i coefficienti a e b hanno necessariamente segno discorde e i numeri h e k dividono l'intervallo $[0;\ w]$ in tre parti uguali. Inoltre la funzione ha equazione $g(x)=ax^3+bx^2$.

3. Consideriamo $g(x)=ax^3+bx^2$ e poniamo a sistema le condizioni $g(3)=0$ e $g(1)=\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{cases} 27a+9b=0 \\ a+b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-3a \\ a+b=\dfrac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=-3a \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

L'espressione di $g(x)$ cercata è pertanto $g(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2$.

Troviamo le coordinate dei punti di intersezione A e B tra la retta $y=\dfrac{2}{3}$ e il grafico Γ, risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2 \end{cases} \rightarrow \quad x^3-3x^2+2=0$$

Risolviamo l'equazione scomponendo il polinomio $P(x)=x^3-3x^2+2$ con la regola di Ruffini:

$$P(1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

Risulta allora:

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Tenuto conto del dominio della funzione, le coordinate dei punti di intersezione A e B tra la retta $y = \frac{2}{3}$ e il grafico Γ sono: $A\left(1; \frac{2}{3}\right)$ e $B\left(1+\sqrt{3}; \frac{2}{3}\right)$.

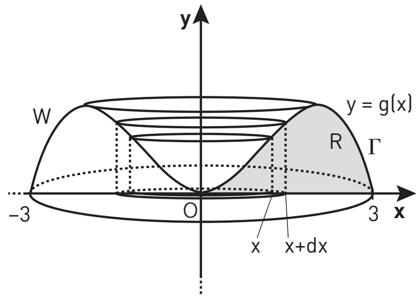
Scriviamo le equazioni delle rette n_A e n_B normali a Γ in tali punti, sfruttando il significato geometrico di derivata prima di una funzione e la proprietà di antireciprocità tra i coefficienti angolari di rette perpendicolari:

$$g'(x) = -x^2 + 2x \quad \rightarrow \quad g'(1) = 1,\ g'(1+\sqrt{3}) = -2$$

$$n_A\colon y - y_A = -\frac{1}{g'(x_A)}(x - x_A) \quad \rightarrow \quad y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{1}(x-1) \quad \rightarrow \quad y = -x + \frac{5}{3}$$

$$n_B\colon y - y_B = -\frac{1}{g'(x_B)}(x - x_B) \quad \rightarrow \quad y - \frac{2}{3} = -\frac{1}{-2}(x - 1 - \sqrt{3}) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1-3\sqrt{3}}{6}$$

4. Indicata con R la regione che Γ delimita con l'asse x, si compie una rotazione completa intorno all'asse y ottenendo il solido W (figura 5).



▲ **Figura 5.**

Tale solido si può vedere composto da infiniti cilindri cavi (metodo detto spesso dei "gusci cilindrici"): ogni cilindro cavo ha volume infinitesimo dV calcolabile come differenza tra volumi di due cilindri:

$$dV = \pi(x+dx)^2 g(x) - \pi x^2 g(x) = 2\pi x g(x) dx + \pi g(x)(dx)^2 \simeq 2\pi x g(x) dx,$$

con il termine $\pi g(x)(dx)^2$ trascurabile perché $(dx)^2$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a dx.
Pertanto il volume del solido è ottenibile dalla sommatoria dei volumi dei cilindri cavi, ovvero:

$$V_w = \int dV = \int_0^3 (2\pi x) g(x) dx = \int_0^3 (2\pi x)\left(-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right)dx = 2\pi \int_0^3 \left(-\frac{1}{3}x^4 + x^3\right)dx =$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = 2\pi\left(-\frac{243}{15} + \frac{81}{4}\right) = 2\pi\left(-\frac{81}{5} + \frac{81}{4}\right) = \frac{81}{10}\pi.$$

Supposte fissate in decimetri le unità del sistema monometrico Oxy, la capacità in litri di W è:

$$V_w = \left(\frac{81}{10}\pi\right)\mathrm{dm}^3 \simeq 25{,}45\ \mathrm{dm}^3 = 25{,}45\ \mathrm{L}.$$

PROBLEMA 2

1. Il dominio della funzione $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ è l'intervallo $[-2;\,2]$; per determinare i suoi massimo e minimo assoluti dobbiamo calcolarne la derivata prima e studiarne il segno:

$$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}=2\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}}\quad \text{con } -2<x<2.$$

Essa risulta:

- positiva per $-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente;
- nulla per $x=-\sqrt{2}\ \vee\ x=\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $f(x)$ ha punti stazionari;
- negativa per $-2<x<-\sqrt{2}\ \vee\ \sqrt{2}<x<2$ $\rightarrow$ $f(x)$ decrescente.

In figura 6 è riportato il quadro della funzione e della sua derivata prima.

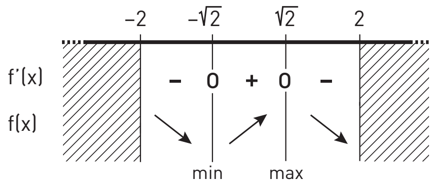


Figura 6.

Osservando che $f(-2)=f(2)=0$ la funzione $f(x)$ ha minimo assoluto in $x=-\sqrt{2}$ con $f(-\sqrt{2})=-2$ e massimo assoluto in $x=\sqrt{2}$ con $f(\sqrt{2})=2$.

2. Una funzione ha grafico simmetrico rispetto all'origine di riferimento O se la funzione è dispari ovvero se $f(-x)=-f(x)$; verifichiamo se vale tale uguaglianza:

$$f(-x)=-x\sqrt{4-x^2}=-f(x),$$

pertanto la funzione $f(x)$ ha grafico Γ simmetrico rispetto a O.
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto $x=0$, ricordando che equivale alla derivata prima della funzione calcolata in quel punto:

$$f'(x)=2\frac{2-x^2}{\sqrt{4-x^2}},\quad \rightarrow\quad f'(0)=m=2.$$

L'angolo α che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x è rappresentata dall'arcotangente del valore di m ovvero:

$$\alpha=\operatorname{arctg} m=\operatorname{arctg} 2=63{,}43\ldots^\circ\simeq 63^\circ\ 26'.$$

3. L'equazione di quarto grado in due variabili $y^2=x^2(4-x^2)$ non rappresenta una funzione, ma la non negatività del primo membro impone al dominio della variabile x la condizione

$$4-x^2\geq 0\quad \text{ovvero}\quad -2\leq x\leq 2.$$

Ricaviamo la y dall'equazione di partenza:

$$y=\pm|x|\sqrt{4-x^2}.$$

Il grafico dell'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ corrisponde all'unione dei grafici delle funzioni:

$$y = |x|\sqrt{4 - x^2} \quad \vee \quad y = -|x|\sqrt{4 - x^2}$$

cioè all'unione del grafico di $|f(x)|$ e del suo simmetrico rispetto all'asse x, $-|f(x)|$.
Noto il grafico Γ di $f(x)$, rappresentiamo in figura 7 i grafici di $|f(x)|$ e $-|f(x)|$.

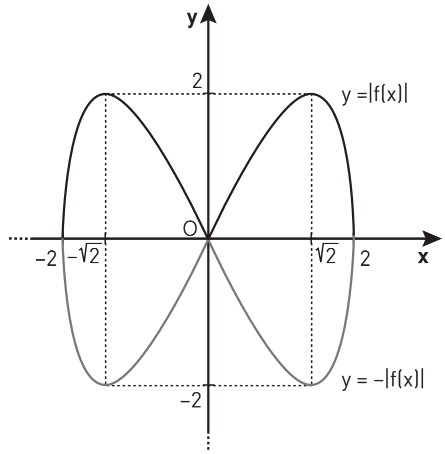


Figura 7.

Sfruttando la simmetria centrale del grafico della funzione $f(x)$, l'area della parte di piano racchiusa dall'equazione $y^2 = x^2(4 - x^2)$ è uguale a 4 volte l'area compresa tra Γ e l'asse delle ascisse nell'intervallo [0; 2]:

$$\mathscr{A} = 4\int_0^2 f(x)dx = 4\int_0^2 x\sqrt{4 - x^2}\,dx = -2\int_0^2 -2x(4 - x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = -2\left[\frac{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= -\frac{4}{3}\left[0 - 4^{\frac{3}{2}}\right] = -\frac{4}{3}\cdot(-8) = \frac{32}{3}.$$

4. Sia $h(x) = \operatorname{sen}(x\sqrt{4 - x^2})$ con $0 \leq x \leq 2$. Per determinare quanti punti del grafico di $h(x)$ hanno ordinata 1 osserviamo (figura 8) che in tale intervallo la funzione $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ assume valori compresi tra 0 e 2 e in particolare acquista il valore $\frac{\pi}{2}$ in due punti x_1 e x_2, per cui $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Quindi i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1 sono due.

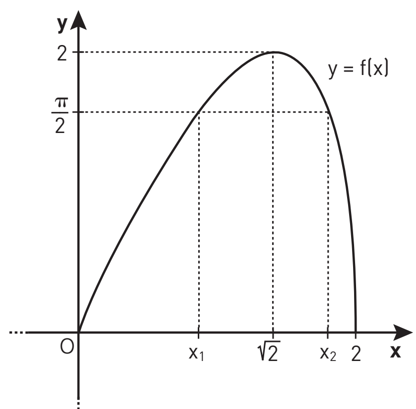


Figura 8.

Deduciamo l'andamento della funzione $h(x) = \operatorname{sen}(f(x))$ basandoci sulle conoscenze della funzione goniometrica e valutando il grafico Γ di $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$:

– agli estremi dell'intervallo $h(0) = h(2) = 0$;

– per $0 < x < x_1$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow$ $h(x)$ crescente e $0 < h(x) < 1$;

– per $x = x_1$, $f(x_1) = \frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $h(x_1) = 1$;

– per $x_1 < x < \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow$ $h(x)$ decrescente e $\operatorname{sen} 2 < h(x) < 1$;

– per $x = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{2}) = 2 \rightarrow h(\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$;

– per $\sqrt{2} < x < x_2$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $h(x)$ crescente e $\operatorname{sen} 2 < h(x) < 1$;

– per $x = x_2$, $f(x_2) = \frac{\pi}{2} \rightarrow h(x_2) = 1$;

– per $x_2 < x < 2$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $h(x)$ decrescente e $0 < h(x) < 1$.

Rappresentiamo in figura 9 l'andamento di $f(x)$ e di $h(x)$. La funzione $h(x)$ presenta:

– due massimi assoluti nei punti x_1 e x_2, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
– due minimi assoluti in $x = 0$ e $x = 2$ con $h(0) = h(2) = 0$;
– un minimo relativo in $x = \sqrt{2}$, con $h(\sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$.

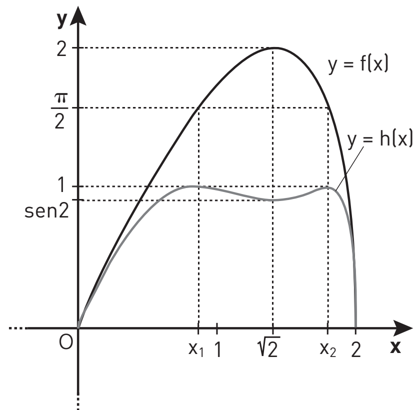


Figura 9.

Osservando il grafico di $h(x)$, l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte quando una retta $y = k$ interseca il grafico in quattro punti distinti ovvero per $\operatorname{sen} 2 < k < 1$.

QUESTIONARIO

1 Applichiamo al triangolo in figura 10 il teorema trigonometrico dei seni:

$$\frac{4}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{3}{\operatorname{sen} 30°}.$$

Ricaviamo $\operatorname{sen}\alpha$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{3}\operatorname{sen} 30° = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

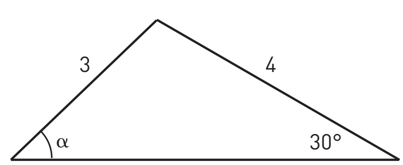


Figura 10.

L'equazione $\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$ ammette due soluzioni:

$$\alpha_1 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) = 41{,}81\ldots° \simeq 41°\ 49'' \ \vee\ \alpha_2 = 180° - \operatorname{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) = 138{,}18\ldots° \simeq 138°\ 12''.$$

Se si tiene conto della figura in cui α appare acuto il valore $\alpha_1 \simeq 41°\ 49''$ è l'unico accettabile.

2 Consideriamo l'enunciato: «Non esistono poliedri regolari le cui facce sono esagoni».
Dimostriamo per assurdo l'enunciato supponendo che esista un poliedro regolare con esagoni regolari come facce. Ogni esagono ha angoli al vertice di 120°. Consideriamo un vertice del poliedro: al corrispondente angoloide concorrono almeno tre facce la cui somma Σ degli angoli è:

$$\Sigma \geq 3 \cdot 120° = 360°.$$

Tale risultato va a negare il teorema sugli angoloidi che afferma che la somma degli angoli al vertice delle facce è minore di un angolo giro, ovvero di 360°. Pertanto è vero che non esistono poliedri regolari le cui facce sono esagoni.

3 Nello sviluppo newtoniano della potenza di un binomio risulta:

$$(2a^2 - 3b^3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2a^2)^{n-k}(-3b^3)^k.$$

Consideriamo il termine $-1080a^4b^9$ e imponiamo la seguente uguaglianza:

$$\binom{n}{k}(2a^2)^{n-k}(-3b^3)^k = -1080a^4b^9 \rightarrow \begin{cases} (a^2)^{n-k} = a^4 \\ (b^3)^k = b^9 \\ \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k = -1080 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ 2(n-3) = 4 \\ \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k = -1080 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 5 \\ \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^k = -1080 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 5 \\ \binom{5}{3} 2^2(-3)^3 = -1080 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 5 \\ 10 \cdot 4(-27) = -1080 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ n = 5 \\ -1080 = -1080 \quad \text{identità} \end{cases}$$

Quindi il valore di n è 5.

4 La funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ è definita positiva nell'intervallo $[-2; -1]$ e la derivata prima $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ è sempre negativa: pertanto la funzione è decrescente. La derivata seconda $f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(1 + 2x)$ è sempre negativa nell'intervallo di definizione e la funzione ha concavità rivolta verso il basso.

Rappresentiamo in figura 11 la regione R delimitata dal grafico e dall'asse x sull'intervallo $[-2; -1]$. Consideriamo il solido Ω che ha per base la regione R e per ogni punto di ascissa x l'altezza $h(x) = \frac{1}{x^2}$.

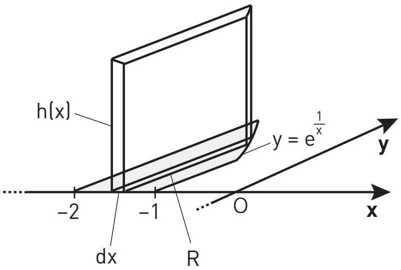


Figura 11.

Determiniamo il volume del solido Ω come la somma integrale dei parallelepipedi di area di base $e^{\frac{1}{x}}\,dx$ e altezza $\frac{1}{x^2}$:

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = -\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e}-1}{e}.$$

5 Consideriamo l'insieme universo U formato dai numeri naturali da 1 a 6000 (figura 12) e consideriamo gli insiemi M_2, M_3, M_5, rispettivamente dei numeri multipli di 2, 3, 5.

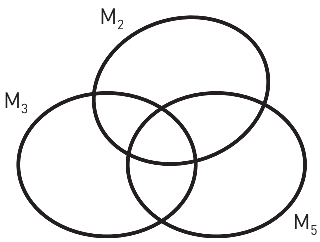


Figura 12.

L'insieme dei numeri non divisibili né per 2, né per 3, né per 5 è l'insieme complementare dell'insieme unione $M_2 \cup M_3 \cup M_5$:

$$\overline{M_2 \cup M_3 \cup M_5}.$$

Determiniamo il numero n degli elementi dei vari insiemi:

$$n(M_2) = \frac{6000}{2} = 3000;$$

$$n(M_3) = \frac{6000}{3} = 2000;$$

$$n(M_5) = \frac{6000}{5} = 1200;$$

$$n(M_2 \cap M_3) = \text{numero dei multipli del } 6 = \frac{6000}{6} = 1000;$$

$$n(M_2 \cap M_5) = \text{numero dei multipli del } 10 = \frac{6000}{10} = 600;$$

$$n(M_3 \cap M_5) = \text{numero dei multipli del } 15 = \frac{6000}{15} = 400;$$

$n(M_2 \cap M_3 \cap M_5) =$ numero dei multipli del $30 = \dfrac{6000}{30} = 200.$

Pertanto il numero degli elementi dell'insieme unione $M_2 \cup M_3 \cup M_5$ è:

$$n(M_2 \cup M_3 \cup M_5) =$$

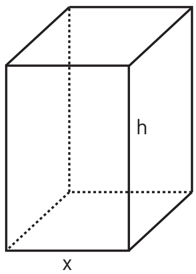
$$= n(M_2) + n(M_3) + n(M_5) - n(M_2 \cap M_3) - n(M_2 \cap M_5) - n(M_3 \cap M_5) +$$

$$+\ n(M_2 \cap M_3 \cap M_5) = 3000 + 2000 + 1200 - 1000 - 600 - 400 + 200 = 4400.$$

Ne segue allora che l'insieme dei numeri non divisibili né per 2, né per 3, né per 5 ha il seguente numero di elementi:

$$n(\overline{M_2 \cup M_3 \cup M_5}) = 6000 - 4400 = 1600.$$

6 Consideriamo un parallelepipedo con base quadrata di lato x e con altezza h (figura 13).



◀ **Figura 13.**

Calcoliamo il volume del parallelepipedo e poniamolo uguale a 5 L:

$$x^2h = 5\text{L} = 5\ \text{dm}^3.$$

Ricaviamo h e ommettiamo le unità di misura:

$$h = \frac{5}{x^2},\ \text{con } x > 0.$$

Determiniamo la funzione S della superficie totale della lattina:

$$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{5}{x^2} = 2x^2 + \frac{20}{x}.$$

Calcoliamo la derivata prima e studiamone il segno:

$$S'(x) = 4x - \frac{20}{x^2} = 4\frac{x^3 - 5}{x^2},$$

$$S'(x) > 0 \ \rightarrow\ x > \sqrt[3]{5}.$$

Pertanto la funzione:
- è decrescente per $0 < x < \sqrt[3]{5}$;
- è crescente per $x > \sqrt[3]{5}$;
- ha un minimo per $x = \sqrt[3]{5}$.

In conclusione, le dimensioni di una lattina arrotondate ai mm sono:

$$x = \sqrt[3]{5} \simeq 1{,}71\ \text{dm} = 171\ \text{mm}; \qquad h = \frac{5}{(\sqrt[3]{5})^2} = \sqrt[3]{5} \simeq 1{,}71\ \text{dm} = 171\ \text{mm}.$$

Se ne deduce che, a parità di volume, il parallelepipedo che ha superficie totale minima è un cubo.

7 Si intende per valore medio di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a;\ b]$ il valore:

$$f(z)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \quad \text{con } z\in[a;\ b].$$

Imponiamo la seguente uguaglianza con $k>0$:

$$\frac{\int_0^k x^3\,dx}{k}=9 \ \to\ \frac{1}{k}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^k=9 \ \to\ k^3=36 \ \to\ k=\sqrt[3]{36}.$$

8 È dato il polinomio di quarto grado $P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e,$ con $a\neq 0$.
Imponiamo il passaggio per il punto (1; 0)

$$a+b+c+d+e=0;$$

per il punto (2; 3)

$$16a+8b+4c+2d+e=3;$$

per il punto (3; 3)

$$81a+27b+9c+3d+e=3.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$P'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$$

e imponiamo le condizioni di stazionarietà per $x=2$ e $x=3$:

$$32a+12b+4c+d=0,$$
$$108a+27b+6c+d=0.$$

Raccogliamo le cinque equazioni in un sistema e risolviamolo applicando più volte il metodo di riduzione:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 16a+8b+4c+2d+e=3\\ 81a+27b+9c+3d+e=3\\ 32a+12b+4c+d=0\\ 108a+27b+6c+d=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 15a+7b+3c+d=3\\ 65a+19b+5c+d=0\\ 32a+12b+4c+d=0\\ 76a+15b+2c=0 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 15a+7b+3c+d=3\\ 50a+12b+2c=-3\\ 33a+7b+c=0\\ 76a+15b+2c=0 \end{cases} \to \begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 15a+7b+3c+d=3\\ 50a+12b+2c=-3\\ 33a+7b+c=0\\ 26a+3b=3 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 15a+7b+3c+d=3\\ 33a+7b+c=0\\ 16a+2b=3\\ 26a+3b=3 \end{cases} \to \begin{cases} a+b+c+d+e=0\\ 15a+7b+3c+d=3\\ 33a+7b+c=0\\ 16a+2b=3\\ 10a+b=0 \end{cases} \to$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=-10a \\ 16a-20a=3 \\ -37a+c=0 \\ 15a+7b+3c+d=3 \\ a+b+c+d+e=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{15}{2} \\ c=-\dfrac{111}{4} \\ d=45 \\ e=-24 \end{cases}$$

Il polinomio di quarto grado ha quindi equazione: $P(x)=-\dfrac{3}{4}x^4+\dfrac{15}{2}x^3-\dfrac{111}{4}x^2+45x-24$.

Calcoliamo $P(4)$:

$$P(4)=-\frac{3}{4}4^4+\frac{15}{2}4^3-\frac{111}{4}4^2+45\cdot 4-24=-192+480-444+180-24=0.$$

9 Il dominio della funzione $f(x)=\sqrt{3-\log_2(x+5)}$ richiede la condizione di realtà della radice quadrata e la positività dell'argomento del logaritmo:

$$\begin{cases} 3-\log_2(x+5)\geq 0 \\ x+5>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_2(x+5)\leq 3 \\ x>-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_2(x+5)\leq \log_2 8 \\ x>-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+5\leq 8 \\ x>-5 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x\leq 3 \\ x>-5 \end{cases} \rightarrow -5<x\leq 3.$$

Il dominio della funzione è quindi l'intervallo $]-5;3]$.

10 Consideriamo l'equazione esponenziale $\left(\dfrac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1}=1$.

Il primo membro ha significato quando:

$$x^2-10x+26>0 \rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2-10x+26=0 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases} \rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}.$$

Quindi la condizione di esistenza del primo membro è: $\forall x\in\mathbb{R}$.

Risolviamo l'equazione riscrivendola nel seguente modo:

$$\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^{x^2-6x+1}=\left(\frac{1}{5}(x^2-10x+26)\right)^0.$$

Tale uguaglianza è vera se

$$x^2-6x+1=0 \rightarrow x=3\pm 2\sqrt{2}$$

oppure se

$$\frac{1}{5}(x^2-10x+26)=1 \rightarrow x^2-10x+21=0 \rightarrow x=5\pm 2 \rightarrow x=7 \vee x=3.$$

L'insieme S delle soluzioni è: $S=\{3-2\sqrt{2};\ 3;\ 3+\sqrt{2};\ 7\}$.

- Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nei problemi e nei quesiti vai sul sito **www.online.zanichelli.it/provamatematica**