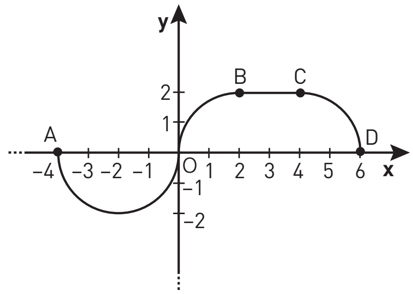
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4; 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B, del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x.

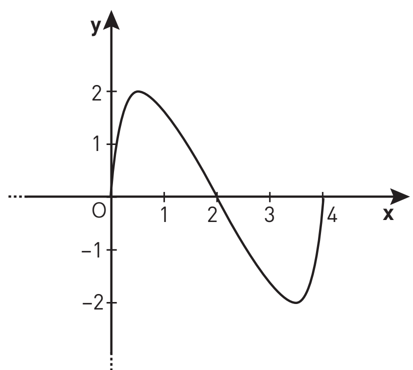


▲ **Figura 1.**

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A, O, B, C, D.
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4; 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

PROBLEMA 2

Sia $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$.



▲ **Figura 2.**

1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2; 0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x.
2. Si dimostri che, qualunque sia t, $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x.
4. Sia $h(x) = \operatorname{sen}(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $h(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $h(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 h(x)dx$?

QUESTIONARIO

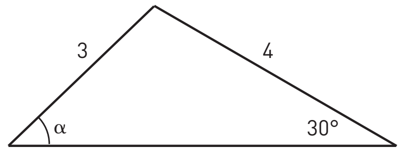


Figura 3.

1 Nel triangolo disegnato a lato, qual è la misura, in gradi e primi sessagesimali, di α?

2 Si spieghi perché non esistono poliedri regolari le cui facce sono esagoni.

3 Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

- esattamente una pallina è rossa;
- le tre palline sono di colori differenti.

4 Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2; -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.

5 In un contesto di geometria non euclidea si illustri un esempio di triangolo i cui angoli non hanno somma 180°.

6 Si calcoli l'altezza e il raggio del massimo cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $\sqrt{3}$.

7 Se $f'(x) = \ln x - x + 2$, per quale dei seguenti valori approssimati di x, f ha un minimo relativo?

A 5,146 **B** 3,146 **C** 1,000 **D** 0,159 **E** 0

8 La "zara" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10.

9 Le lettere $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ denotano, rispettivamente, gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali e reali mentre il simbolo $\aleph_0$ (*aleph-zero*) indica la cardinalità di $\mathbb{N}$. Gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ hanno anch'essi cardinalità $\aleph_0$? Si motivi la risposta.

10 Si stabilisca per quali valori reali di a e b, si ha:

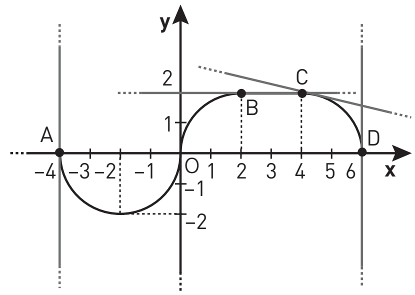
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{a + bx} - 2}{x} = 1.$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

PROBLEMA 1

1. Sia $g(x)$ la funzione continua nell'intervallo chiuso $[-4; 6]$ il cui grafico è rappresentato nella figura 4. Valutiamo se tale funzione è derivabile nei punti A, O, B, C, D, tenendo conto del significato geometrico della derivata prima di una funzione in un punto, ossia coincidente con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto.



▲ **Figura 4.**

- In $A(-4; 0)$: il grafico consiste a destra nella semicirconferenza di diametro AO; nel punto A la tangente è verticale, pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a destra;
- in $O(0; 0)$: il grafico è rappresentato a sinistra dalla semicirconferenza di diametro AO, mentre a destra dal quarto di circonferenza di estremi O e B; nel punto O la tangente è verticale pertanto in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $B(2; 2)$: il grafico consiste, a sinistra, nel quarto di circonferenza, di estremi O e B, mentre a destra, nel segmento orizzontale BC; nel punto B la tangente è $y=2$, pertanto in tale punto la funzione è derivabile, con valore $g'(2)=0$;
- in $C(4; 2)$ il grafico è rappresentato, a sinistra, dal segmento orizzontale BC, pertanto $g'_-(4)=0$, mentre, a destra, dall'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x; troviamo l'equazione di tale arco imponendo alla generica parabola con vertice in D, $x=-ay^2+6$, il passaggio per il punto $C(4; 2)$:

  $$x=-ay^2+6 \quad \rightarrow \quad 4=-a\cdot 2^2+6 \quad \rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad g(x)=\sqrt{12-2x},\ 4\leq x\leq 6.$$

  Calcoliamo la derivata prima:

  $$g'(x)=\frac{-1}{\sqrt{12-2x}} \quad \rightarrow \quad g'_+(4)=-\frac{1}{2},$$

  pertanto, essendo $g'_-(4)=0$ e $g'_+(4)=-\frac{1}{2}$, in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $D(6; 0)$: l'arco di parabola ha nel vertice tangente verticale; pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a sinistra.

2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)dt$, calcoliamo $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il calcolo di aree comprese tra una curva e l'asse x.

- $\boldsymbol{f(-4)}=\int_{-4}^{-4} g(t)dt=0.$
- $\boldsymbol{f(0)}$**.** Corrisponde all'opposto dell'area di metà cerchio di raggio 2:

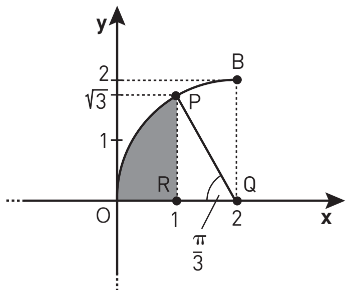
  $$f(0)=-\frac{1}{2}\pi\cdot 2^2=-2\pi.$$
- $\boldsymbol{f(1)}$**.** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

  $$f(1)=\int_{-4}^{1} g(t)dt=\int_{-4}^{0} g(t)dt+\int_{0}^{1} g(t)dt=f(0)+\int_{0}^{1} g(t)dt=-2\pi+\int_{0}^{1} g(t)dt;$$

l'integrale $\int_0^1 g(t)dt$ corrisponde all'area evidenziata in figura 5; il triangolo *PQR* risulta metà di un triangolo equilatero di lato 2 e altezza $\sqrt{3}$, mentre il settore circolare *OQP* ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio 2; si può ottenere tale area come differenza tra l'area del settore circolare e l'area del triangolo *PQR*:

$$f(1) = -2\pi + \int_0^1 g(t)dt = -2\pi + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3}\right) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



▲ **Figura 5.**

- ***f*(2).** Applichiamo l'additività integrale:

$$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)dt = \int_{-4}^{0} g(t)dt + \int_0^2 g(t)dt = f(0) + \int_0^2 g(t)dt.$$

Poiché l'integrale $\int_0^2 g(t)dt$ corrisponde a un quarto di cerchio di raggio 2, risulta:

$$f(2) = -2\pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = -\pi.$$

- ***f*(4).** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

$$f(4) = \int_{-4}^{4} g(t)dt = \int_{-4}^{2} g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt = f(2) + \int_2^4 g(t)dt.$$

L'integrale $\int_2^4 g(t)dt$ rappresenta l'area di un quadrato di lato 2, pertanto vale:

$$f(4) = -\pi + 2^2 = -\pi + 4.$$

- ***f*(6).** Applichiamo nuovamente l'additività:

$$f(6) = \int_{-4}^{6} g(t)dt = \int_{-4}^{4} g(t)dt + \int_4^6 g(t)dt = f(4) + \int_4^6 g(t)dt.$$

Calcoliamo l'integrale $\int_4^6 g(t)dt$ come metà del segmento parabolico inscritto in un rettangolo di dimensioni 2 e 4:

$$f(6) = -\pi + 4 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (2 \cdot 4)\right) = -\pi + 4 + \frac{8}{3} = -\pi + \frac{20}{3}.$$

3. Per valutare il segno della funzione $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$ ricordiamo che per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta $f'(x)=g(x)$, con $-4<x<6$; dal grafico di $g(x)$ di figura 4 e dai risultati al punto 2 ne segue che:

- per $-4<x<0$, $g(x)<0$ $\rightarrow$ $f'(x)<0$ $\rightarrow$ $f(x)$ decrescente con $f(-4)=0$ e $f(0)=-2\pi$;
- per $x=0$, $g(0)=0$ $\rightarrow$ $f'(0)=0$ $\rightarrow$ $f(x)$ ha punto stazionario per $x=0$;
- per $0<x\leq 2$, $g(x)>0$ $\rightarrow$ $f'(x)>0$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(0)=-2\pi$ e $f(2)=-\pi$;
- per $2<x\leq 4$, $g(x)=2$ $\rightarrow$ $f'(x)=2$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(2)=-\pi$ e $f(4)=-\pi+4$;
- per $4<x<6$, $g(x)>0$ $\rightarrow$ $f'(x)>0$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(4)=-\pi+4$ e $f(6)=-\pi+\dfrac{20}{3}$.

Dal quadro si deduce che esiste un $\overline{x}\in\,]2;4[$, zero della funzione ovvero:

$$f(\overline{x})=0 \rightarrow \int_{-4}^{2} g(t)dt+\int_{2}^{\overline{x}} g(t)dt=0 \rightarrow f(2)+\int_{2}^{\overline{x}} 2dt=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\pi+2(\overline{x}-2)=0 \rightarrow \overline{x}=2+\frac{\pi}{2}.$$

In sintesi:

- $f(x)>0$ per $2+\dfrac{\pi}{2}<x\leq 6$;
- $f(x)<0$ per $-4<x<2+\dfrac{\pi}{2}$;
- $f(x)=0$ per $x=-4 \vee x=2+\dfrac{\pi}{2}$.

Per valutare il segno della derivata seconda $f''(x)$ sfruttiamo nuovamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, ricavando che $f''(x)=g'(x)$, con $-4<x<6$. Osservando la crescenza e decrescenza del grafico di $g(x)$ di figura 4 si deduce che:

- $f''(x)>0$ per $-2<x<0 \vee 0<x<2$;
- $f''(x)<0$ per $-4<x<-2 \vee 4<x<6$;
- $f''(x)=0$ per $2\leq x<4 \vee x=-2$.

Si osserva che per il punto 1 la funzione $f''(x)=g'(x)$ non è definita per

$$x=-4 \wedge x=0 \wedge x=4 \wedge x=6.$$

4. Dai precedenti punti sintetizziamo le informazioni sulla funzione $f(x)$:

- è una funzione definita continua nell'intervallo $[-4.\ 6]$;
- passa per i punti:

  $$A'(-4;0),\ O'(0;-2\pi),\ B'(2;-\pi),\ C'(4;-\pi+4),\ D'\left(6;-\pi+\frac{20}{3}\right);$$

- ha segno:
  - $f(x)>0$ per $2+\dfrac{\pi}{2}<x\leq 6$;
  - $f(x)<0$ per $-4<x<2+\dfrac{\pi}{2}$;
  - $f(x)=0$ per $x=-4 \vee x=2+\dfrac{\pi}{2}$;
- ha derivata prima tale che:
  - $f(x)$ decrescente per $-4<x<0$,

– $f'(0)=0$ allora $x=0$ punto stazionario;

– $f(x)$ crescente per $0<x<6$,

pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione ha minimo assoluto nel punto $O'(0; -2\pi)$, massimo relativo per $x=6$ e $x=-4$ con $f(6)=-\pi+\frac{20}{3}$, $f(-4)=0$ e quindi massimo assoluto in $D'\left(6; -\pi+\frac{20}{3}\right)$;

- ha derivata seconda tale che la funzione ha:
  – concavità verso l'alto per $-2<x<0 \vee 0<x<2$;
  – concavità verso il basso per $-4<x<-2 \vee 4<x<6$;
  – un flesso per $x=-2$, $F(-2; -\pi)$, mentre $f''(x)=0$ per $2\leq x<4$, pertanto il grafico è un segmento $B'C'$, sorretto dalla retta di equazione $y=2x+\pi-4$.

In figura 6 è riportato l'andamento della funzione $f(x)$.

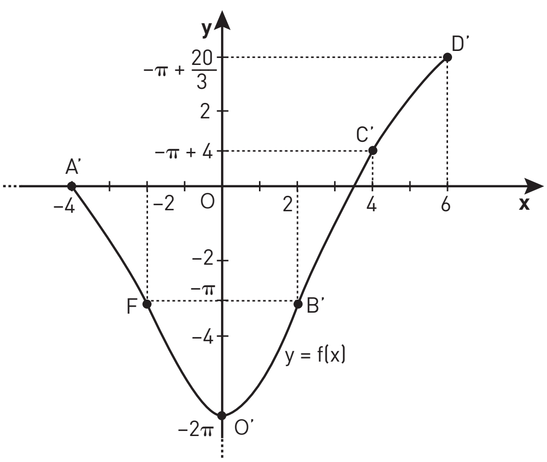


Figura 6.

PROBLEMA 2

1. Sia data la funzione $f(x)=(2-x)\sqrt{4x-x^2}$. Essa ha dominio [0; 4]. Per verificare che il corrispondente grafico Γ è simmetrico rispetto al punto (2; 0), applichiamo alla funzione la simmetria centrale di centro (2; 0), di equazioni:

$$\begin{cases} x'=4-x \\ y'=-y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4-x' \\ y=-y' \end{cases}$$

e verifichiamo come si comporta la curva rispetto a tale trasformazione:

$$y=(2-x)\sqrt{4x-x^2} \rightarrow -y'=[2-(4-x')]\sqrt{4(4-x')-(4-x')^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow y'=(2-x')\sqrt{16-4x'-16-x'^2+8x'} \rightarrow y'=(2-x')\sqrt{4x-x'^2}.$$

Si conclude che la curva è unita rispetto alla trasformazione e che pertanto il punto (2; 0) è centro di simmetria di Γ.
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto $x=2$ ricordando che equivale alla derivata prima della funzione calcolata in quel punto:

$$f'(x)=-\sqrt{4x-x^2}+\frac{(2-x)(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{-4x+x^2+4-4x+x^2}{\sqrt{4x-x^2}}=\frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

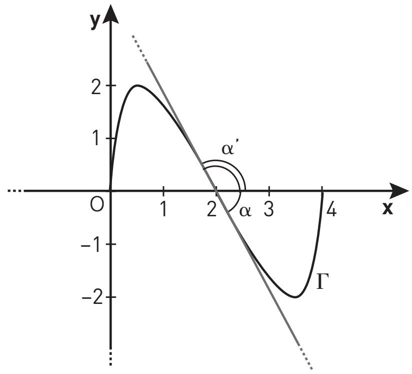
$$m = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{\sqrt{4 \cdot 2 - 2^2}} = -2.$$

L'angolo α che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x è rappresentato dall'arcotangente del valore di m ovvero:

$$\alpha = \text{arctg } m = \text{arctg}(-2) = -63{,}43\ldots°.$$

Si tratta di un angolo negativo ovvero il proprio secondo lato si trova in senso orario sotto il semiasse positivo delle x (figura 7). Il corrispondente angolo positivo α' è:

$$\alpha' = 180° + \text{arctg } m = 180° + \text{arctg}(-2) =$$
$$= 180° - 63{,}43\ldots° = 116{,}56\ldots° \simeq 116° 34'.$$



◀ **Figura 7.**

2. Considerato t, con $0 < t < 2$, calcoliamo i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$.

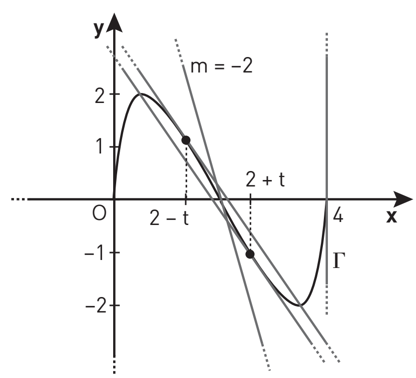
$$m(2+t) = f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2 - 8(2+t) + 4}{\sqrt{4(2+t) - (2+t)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}},$$

$$m(2-t) = f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2 - 8(2-t) + 4}{\sqrt{4(2-t) - (2-t)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}.$$

Poiché $m(2+t) = m(2-t)$, con $0 < t < 2$, allora le corrispondenti rette sono parallele (figura 8).
Osserviamo inoltre che agli estremi dell'intervallo del dominio risulta:

$$\lim_{t \to 2^-} m(2+t) = \lim_{t \to 2^-} \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}} = +\infty, \qquad \lim_{t \to 2^-} m(2-t) = \lim_{t \to 2^-} \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}} = +\infty.$$

Consideriamo le rette $21x + 10y + 31 = 0$ e $23x + 12y + 35 = 0$. Esse hanno coefficiente angolare rispettivamente $m = -\frac{21}{10} < -2$ e $m = -\frac{23}{12} > -2$. Per stabilire se esistono rette tangenti a Γ che siano parallele a queste, è necessario valutare i coefficienti angolari delle rette tangenti nel dominio. Per il punto 1 il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $x = 2$ vale -2. Per le considerazioni precedenti, cioè per $x \neq 2$ nei punti $(2 - t)$ e $(2 + t)$ il coefficiente angolare tende a $+\infty$, e osservando la figura 8 si deduce che $m \geq -2$.



▲ **Figura 8.**

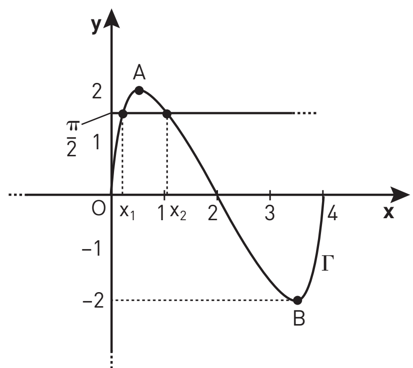
Pertanto non può esistere una retta tangente a Γ con coefficiente angolare uguale a $-\dfrac{21}{10}$, mentre esistono due rette tangenti e parallele con coefficiente angolare $m = -\dfrac{23}{12} > -2$.

3. Dimostrata la simmetria del grafico Γ nel punto 1, l'area $\mathscr{A}$ della regione compresa tra Γ e l'asse x è il doppio dell'integrale definito dalla funzione $f(x)$ calcolata in [0; 2]:

$$\mathscr{A} = 2 \cdot \int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2}\,dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{16}{3}.$$

4. Sia $h(x) = \mathrm{sen}((2-x)\sqrt{4x-x^2})$ con $0 \le x \le 4$.
Per determinare quanti punti del grafico di $h(x)$ hanno ordinata 1, osserviamo che la funzione $h(x) = \mathrm{sen}(f(x))$ assume valore 1 per $f(x) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.



▲ **Figura 9.**

Dal grafico (figura 9) si deduce che la funzione $f(x)$ assume valori compresi tra -2 e 2 e che pertanto acquista il valore $\dfrac{\pi}{2}$ in due punti x_1 e x_2, per cui $h(x_1) = h(x_2) = 1$. Quindi i punti del grafico di $h(x)$ di ordinata 1 sono due.
Per dedurre l'andamento della funzione $h(x) = \mathrm{sen}(f(x))$ studiamo puntualmente i massimi e i minimi della funzione $f(x)$ osservando il grafico Γ. Dal punto 1 è noto che $f'(x) = \dfrac{2(x^2-4x+2)}{\sqrt{4x-x^2}}$. Tale derivata si annulla per $x_A = 2-\sqrt{2}$, con $f(x_A) = 2$ (massimo assoluto) e per $x_B = 2+\sqrt{2}$, con $f(x_B) = -2$ (minimo assoluto).

Poiché Γ è simmetrica rispetto al punto (2; 0) e la funzione è dispari, il grafico di $h(x)$ risulta ancora simmetrico rispetto al punto (2; 0), pertanto studiamo l'andamento della funzione $h(x) = \mathrm{sen}(f(x))$ nell'intervallo [0; 2].

- $h(0) = h(2) = 0$;
- per $0 < x < x_1$, $0 < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow h(x)$ crescente e $0 < h(x) < 1$;
- per $x = x_1$, $f(x_1) = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow h(x_1) = 1$;
- per $x_1 < x < 2-\sqrt{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow h(x)$ decrescente e $\mathrm{sen}\,2 < h(x) < 1$;
- per $x = 2-\sqrt{2}$, $f(2-\sqrt{2}) = 2 \rightarrow h(2-\sqrt{2}) = \mathrm{sen}\,2$;
- per $2-\sqrt{2} < x < x_2$, $\dfrac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow h(x)$ crescente e $\mathrm{sen}\,2 < h(x) < 1$;

– per $x = x_2$, $f(x_2) = \frac{\pi}{2} \rightarrow h(x_2) = 1$;

– per $x_2 < x < 2$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow$ $h(x)$ decrescente e $0 < h(x) < 1$.

Rappresentiamo in figura 10 l'andamento di $h(x)$ tenendo conto della simmetria centrale in $(2; 0)$.

La funzione $h(x)$ presenta:

– due massimi assoluti nei punti x_1 e x_2, con $h(x_1) = h(x_2) = 1$;
– un massimo relativo per $x = 4 - (2 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$, con $h(2 + \sqrt{2}) = -\operatorname{sen} 2$;
– un massimo relativo in $x = 4$, con $h(4) = 0$;
– due minimi assoluti in $x = 4 - x_2$ e $x = 4 - x_1$ con $h(4 - x_2) = h(4 - x_1) = -1$;
– un minimo relativo per $x = 2 - \sqrt{2}$, con $h(2 - \sqrt{2}) = \operatorname{sen} 2$;
– un minimo relativo in $x = 0$, con $h(0) = 0$.

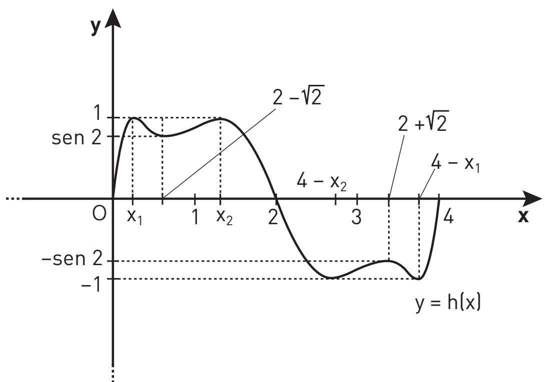


Figura 10.

Osservando il grafico di $h(x)$ vediamo che l'equazione $h(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte quando una retta $y = k$ interseca il grafico in quattro punti distinti, ovvero per $\operatorname{sen} 2 < k < 1$ e per $-1 < k < -\operatorname{sen} 2$.

L'integrale $\int_0^4 h(x)dx$ può essere calcolato per la proprietà additiva come

$$\int_0^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx + \int_2^4 h(x)dx.$$

Per la simmetria centrale del grafico di $h(x)$ rispetto al punto $(2; 0)$ e per il significato geometrico di integrale definito, risulta $\int_2^4 h(x)dx = -\int_0^2 h(x)dx$ e quindi:

$$\int_0^4 h(x)dx = \int_0^2 h(x)dx - \int_0^2 h(x)dx = 0.$$

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova del corso di ordinamento 2014.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova del corso di ordinamento 2014.

3 Considerata la composizione dell'urna (cinque palline rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche) e l'estrazione senza reimbussolamento di tre palline, calcoliamo la probabilità P_1 che vi sia solo una pallina rossa. Sfruttando il calcolo combinatorio, una pallina delle cinque disponibili è rossa, mentre le altre due, non rosse, si ottengono dalle combinazioni di 15 palline, in gruppi di due. I casi favorevoli sono quindi:

casi favorevoli $= 5 \cdot C_{15,2} = 5 \cdot 105 = 525$;

i casi possibili sono le combinazioni di 20 elementi a tre a tre:

casi possibili $= C_{20,3} = 1140$.

Pertanto risulta:

$$P_1 = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{525}{1140} = \frac{35}{76} \simeq 0{,}46 = 46\%.$$

Calcoliamo la probabilità P_2 che le tre palline siano di colori differenti. I quattro colori si possono combinare in gruppi di tre. Si tratta di quattro elementi distinti (i colori) a tre a tre ossia $C_{4,3} = 4$. In queste quattro combinazioni a gruppi di tre colori, ogni colore può essere rappresentato da cinque palline, pertanto i casi favorevoli sono:

casi favorevoli $= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot C_{4,3} = 5^3 \cdot 4 = 500$,

I casi possibili sono sempre 1140, pertanto risulta:

$$P_2 = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{500}{1140} = \frac{25}{57} \simeq 0{,}44 = 44\%.$$

4 Vedi lo svolgimento del quesito 4 della prova del corso di ordinamento 2014.

5 Ricordiamo il V Postulato della geometria euclidea: «data una retta e un punto esterno a essa, per il punto passa al più una retta parallela alla data».
Una delle conseguenze del postulato è che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due angoli retti, ovvero $2\hat{R}$. Nella geometria non euclidea di Lobacevskij e Bolyai, denominata iperbolica, il V postulato viene sostituito dalla sua negazione: per un punto passano almeno due rette parallele a quella data.
Il corrispondente modello di Poincaré fa riferimento a una porzione di piano euclideo formata da un cerchio detto *disco di Poincaré*. I concetti di punto, retta, angolo, hanno una loro nuova definizione:

– un punto è un punto interno al cerchio;
– una retta è un diametro della circonferenza di Poincaré oppure un arco di circonferenza, interno al cerchio di Poincaré e ortogonale a esso;
– un angolo è l'angolo tra due rette definite precedentemente.

Rappresentiamo in figura 11 un triangolo iperbolico *ABC* e i corrispondenti angoli interni. Ogni angolo è minore del corrispondente angolo euclideo, pertanto la loro somma è minore di $2\hat{R}$.

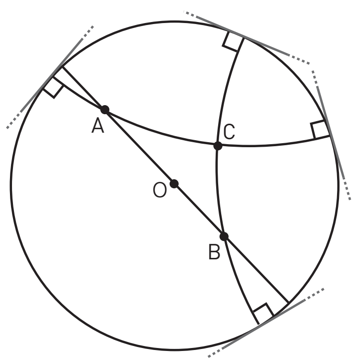


Figura 11.

Un altro esempio di geometria non euclidea è quella sferica; essa nega il V postulato assumendo che non esiste nessuna retta parallela a una data. Il corrispondente modello di Riemann considera una superficie sferica dove:

– un punto è un punto sulla superficie sferica;
– una retta è una circonferenza massima della sfera (intersezione tra superficie sferica e un piano passante per il centro);

– un angolo è l'angolo formato dai due piani che tagliano la superficie secondo le due rette.

Rappresentiamo un triangolo *ABC* nella geometria sferica, considerando i lati sulle rette *r*, *s*, *t* perpendicolari tra loro (figura 12).

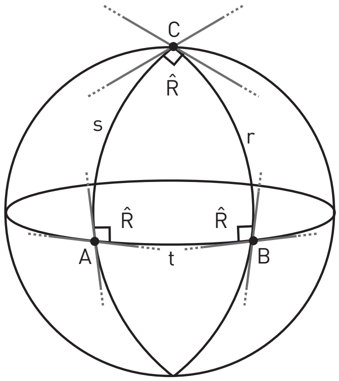


Figura 12.

La somma degli angoli interni di questo triangolo è $3\hat{R}$, ovvero maggiore di $2\hat{R}$.

6 Consideriamo un cilindro circolare retto inscritto in una sfera di raggio $PO = \sqrt{3}$ (figura 13).

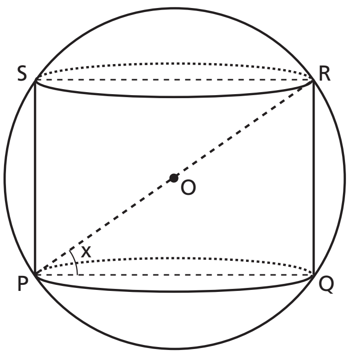


Figura 13.

Il segmento *PR* è un diametro della sfera e misura $2\sqrt{3}$. Indichiamo con x l'angolo $R\hat{P}Q$, dove $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Per i teoremi trigonometrici dei triangoli rettangoli risulta:

$$QR = 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x,\; PQ = 2\sqrt{3}\cos x.$$

Calcoliamo il volume $V(x)$ del cilindro inscritto:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \cdot QR.$$

Sostituiamo:

$$V(x) = \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}\cos x}{2}\right)^2 \cdot 2\sqrt{3}\,\text{sen}\,x \;\rightarrow\; V(x) = 6\sqrt{3}\pi\cos^2 x\,\text{sen}\,x \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; V(x) = 6\sqrt{3}\pi(\text{sen}\,x - \text{sen}^3 x),\; 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo la derivata prima $V'(x)$ e studiamone il segno nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, tenendo conto che in tale intervallo il seno e il coseno sono positivi e compresi tra 0 e 1:

$$V'(x) = 6\sqrt{3}\pi(\cos x - 3\cos x\,\text{sen}^2 x) \;\rightarrow\; V'(x) = 6\sqrt{3}\pi\cos x(1 - 3\,\text{sen}^2 x),$$

$$V'(x) > 0 \text{ per } 0 < x < \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{3},$$

– $V'(x) = 0$ per $x = \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

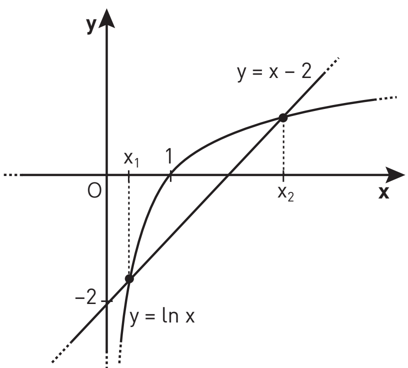
– $V'(x) < 0$ per $\operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Pertanto la funzione $V(x)$ è dotata di massimo assoluto nel punto $x = \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Determiniamo la corrispondente altezza e il raggio r di base:

$$QR = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 2,$$

$$r = \frac{PQ}{2} = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{3}}}{2} = \sqrt{2}.$$

7 La funzione derivata prima $f'(x) = \ln x - x + 2$ è definita continua e derivabile per $x > 0$. Pertanto la corrispondente $f(x)$ è continua e derivabile in tale intervallo. Studiamo il segno della derivata prima tenendo conto che si tratta di una funzione trascendente. Poniamo $y = \ln x$ e $y = x - 2$ e tracciamo i corrispondenti grafici (figura 14).



Dalla figura deduciamo che le funzioni $y = \ln x$ e $y = x - 2$ si intersecano in due punti di ascisse x_1, con $0 < x_1 < 1$, e x_2, con $x_2 > 1$.

Figura 14.

Pertanto risulta:

– $f'(x) > 0 \quad \to \ln x - x + 2 > 0 \to \ln x > x - 2 \to x_1 < x < x_2$, $f(x)$ crescente;

– $f'(x) < 0 \quad \to \ln x - x + 2 < 0 \to \ln x < x - 2, \to 0 < x < x_1 \vee x > x_2$, $f(x)$ decrescente;

– $f'(x) = 0 \quad \to \ln x - x + 2 = 0 \to \ln x = x - 2 \to x = x_1 \vee x = x_2$, punti stazionari.

La funzione $f(x)$ ha un minimo relativo in $x = x_1$ e un massimo relativo per $x = x_2$.
Osservato che $0 < x_1 < 1$, l'alternativa esatta è la D: un valore approssimato di x, dove f ha un minimo relativo, è 0,159.

8 Si consideri il lancio contemporaneo di tre dadi a sei facce: il numero di casi possibili si ottiene dalle disposizioni con ripetizione di 6 elementi (i numeri da 1 a 6) in gruppi di 3 elementi:

casi possibili $= D'_{6,3} = 6^3 = 216$.

Valutiamo i casi favorevoli in cui la somma dei tre numero usciti sia 9 ovvero le terne:

a) 1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4;
b) 1, 4, 4; 2, 2, 5;
c) 3, 3, 3.

I termini di ciascuna delle prime tre terne (caso *a*) possono essere permutati e le permutazioni sono $P_3 = 3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$. Il caso *a* conta quindi $3\cdot 6 = 18$ casi favorevoli.

I termini delle terne di tipo b possono essere permutate: si tratta di permutazione con ripetizione, ogni terna ha $P_3^{(2)} = \dfrac{3!}{2!} = 3$ possibilità di apparire. Il caso b conta quindi $2 \cdot 3 = 6$ casi favorevoli.
Il caso c ha solo una possibilità di apparire. I casi favorevoli totali sono:

casi favorevoli $= 18 + 6 + 1 = 25$.

La probabilità $P(9)$ che la somma dei tre numeri usciti dia 9 è allora:

$$P(9) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{25}{216} \simeq 0{,}116 = 11{,}6\%.$$

In maniera analoga valutiamo i casi favorevoli in cui la somma dei tre numero usciti sia 10 ovvero le terne:

a) 1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5;
b) 2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4.

I termini di ciascuna delle prime tre terne (caso a) possono essere permutati e le permutazioni sono $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Il caso a conta quindi $3 \cdot 6 = 18$ casi favorevoli.
I termini delle terne di tipo b possono essere permutate: si tratta di permutazione con ripetizione, ogni terna ha $P_3^{(2)} = \dfrac{3!}{2!} = 3$ possibilità di apparire. Il caso b conta quindi $3 \cdot 3 = 9$ casi favorevoli.
I casi favorevoli totali sono:

casi favorevoli $= 18 + 9 = 27$.

La probabilità $P(10)$ che la somma dei tre numeri usciti sia 10 è quindi:

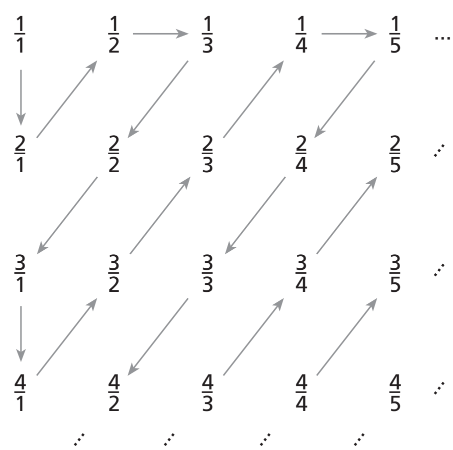
$$P(10) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}} = \frac{27}{216} = 0{,}125 = 12{,}5\%.$$

La probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 è minore rispetto a quella di ottenere la somma 10.

9 La cardinalità (o potenza) di un insieme è il numero degli elementi che lo costituiscono. Due insiemi hanno la stessa cardinalità se esiste una corrispondenza biunivoca tra gli elementi dei due insiemi; un insieme ha cardinalità minore di un altro se esiste una funzione iniettiva tra il primo insieme e il secondo, ma non viceversa. Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ e l'insieme $\mathbb{Z}$ e stabiliamo la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & -1 & +1 & -2 & +2 & -3 & +3 & -4 & \dots \end{array}$$

Pertanto l'insieme $\mathbb{Z}$ è numerabile ovvero ha la stessa cardinalità $\aleph_0$ di $\mathbb{N}$.
Consideriamo l'insieme $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. La numerabilità dell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ fu dimostrata da G Cantor (1845-1918). La sua dimostrazione si basa sul diagramma a fianco (figura 15) che stabilisce con il metodo della diagonalizzazione una corrispondenza biunivoca tra i razionali positivi $\mathbb{Q}^+$ e N.



▲ **Figura 15.**

Seguendo le frecce si possono ordinare i numeri razionali positivi, evidenziando le frazioni equivalenti che non rappresentano nuovi numeri razionali e che perciò non vanno contati.
Lo stesso procedimento può essere adottato per dimostrare la numerabilità di $\mathbb{Q}^-$.
Poiché $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ e l'unione di insiemi numerabili è numerabile, si deduce che $\mathbb{Q}$ è numerabile.

Si può dimostrare che l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, in particolare si dimostra che $\mathbb{N}$ ha cardinalità minore dei numeri reali compresi tra 0 e 1 e a maggior ragione l'avrà rispetto a tutto $\mathbb{R}$. Tale dimostrazione si basa sul cosiddetto *argomento diagonale*, proprio di G. Cantor, con quale il matematico dimostrò la non numerabilità di $\mathbb{R}$. Ipotizziamo per assurdo l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e i numeri reali appartenenti all'intervallo [0; 1]; ciò genera una successione x_i formata da tutti questi numeri che esprimeremo in forma decimale:

$$x_1 = 0,\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ \dots$$
$$x_2 = 0,\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ \dots$$
$$x_3 = 0,\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ \dots$$

dove a_{ij} è la cifra j-esima del numero i-esimo.
Osserviamo il numero formato dagli elementi della diagonale principale della matrice $\{a_{ij}\}$:

$$0,\ a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \dots$$

e costruiamo un nuovo numero $\bar{x} = 0,\ b_1\ b_2\ b_3\ \dots$, dove la cifra b_i è così generata:

$$b_i = \begin{cases} a_{ii} + 1 & \text{se } 0 \le a_{ii} < 9 \\ 0 & \text{se } a_{ii} = 9 \end{cases}$$

Si può dedurre che il numero $\bar{x}$, reale e appartenente all'intervallo [0; 1] non appare nella successione $\{x_i\}$. Pertanto non esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e i numeri reali dell'intervallo [0; 1] e, a maggior ragione, tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

10 Consideriamo il limite finito:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{a+bx}-2}{x} = 1, \text{ con } a,\ b \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che per $x \to 0$ la funzione tende alla forma $\frac{\sqrt{a}-2}{0}$. Pertanto se $\sqrt{a} - 2 \neq 0$ il limite è infinito. Ne segue che:

$$\sqrt{a} - 2 = 0 \ \to\ \sqrt{a} = 2 \ \to\ a = 4.$$

Il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+bx}-2}{x}$$

e ha forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Razionalizziamo il numeratore della funzione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4+bx}-2)(\sqrt{4+bx}+2)}{x(\sqrt{4+bx}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4+bx-4}{x(\sqrt{4+bx}+2)} = \lim_{x\to 0} \frac{b}{(\sqrt{4+bx}+2)} = \frac{b}{4}.$$

Poniamo il limite uguale a 1:

$$\frac{b}{4} = 1 \ \to\ b = 4.$$

Concludendo, il limite vale 1 se $a = 4$ e $b = 4$.

- Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nei problemi e nei quesiti vai sul sito **www.online.zanichelli.it/provamatematica**