PROVA D'ESAME • SESSIONE SUPPLETIVA 2019

Liceo scientifico, opzione scienze applicate e indirizzo sportivo

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 205 Art. 17 comma 9).

PROBLEMA 1

Al variare di $a \in \mathbb{R}$, si consideri la famiglia di funzioni:

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

- Discutere segno e continuità della funzione f_a al variare del parametro a. Dimostrare che, qualunque sia $a \in \mathbb{R}$, la funzione f_a ammette un punto di massimo assoluto di ascissa 1.
- Indicata con f la funzione ottenuta da f_a per $a = 2$, stabilire se f è derivabile in $x = 0$. Studiare l'andamento della funzione f specificandone gli asintoti, i punti di flesso e l'ampiezza in gradi dell'angolo formato dalle tangenti sinistra e destra nel punto di non derivabilità. Determinare i valori delle costanti positive h e k tali che, considerata la funzione

  $$g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$$

  si abbia $g(3 - x) = f(x)$ per $x \geq 0$.
- Con un acceleratore di particelle si prepara un fascio di protoni aventi energia cinetica pari a 42 MeV. Per indirizzare tale fascio verso un bersaglio desiderato, si utilizza un campo magnetico uniforme, ortogonale alla traiettoria dei protoni, di intensità 0,24 T. Trascurando gli effetti relativistici, descrivere il moto di ciascun protone all'interno del campo e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria.
- Il fascio di protoni, all'uscita della zona in cui è presente $\vec{B}$, viene fatto penetrare in acqua. Si indichi con $\varepsilon(x)$ l'energia del protone, espressa in megaelettronvolt (MeV), dopo x centimetri (cm) di cammino in acqua e sia $d\varepsilon$ l'energia ceduta all'acqua dal protone nel tratto dx. Supponendo che la funzione $y = -\frac{d\varepsilon}{dx}$ possa essere approssimata con la funzione $y = g(x)$, ponendo $h = \frac{9}{2}$ e $k = 1$, calcolare l'energia ε assorbita dall'acqua nei primi 3 centimetri di cammino del protone.

PROBLEMA 2

Due cariche elettriche puntiformi $Q_1 = q$ (con q positivo) e $Q_2 = -q$ sono collocate rispettivamente nei punti A e B, posti ad una distanza $2k$. Le cariche sono espresse in coulomb (C) e le distanze in metri (m). Si indichi con r la retta passante per i punti A e B.

- Determinare, in un punto C della retta r, l'intensità del campo elettrico generato dalle cariche Q_1 e Q_2, al variare di C su r. Esistono, su tale retta, dei punti nei quali il campo elettrico è nullo? Giustificare la risposta.
- Dimostrare che l'intensità del campo elettrico generato da Q_1 e Q_2 in un punto P posto sull'asse del segmento AB decresce quando P si allontana dal punto medio di AB. Indicata con x la distanza di P dal punto medio di AB, esprimere l'intensità del campo elettrico in P in funzione di x.
- Fissati i parametri reali positivi h e k, studiare l'andamento della funzione

  $$f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

individuandone, in particolare, simmetrie, asintoti, estremi e punti di flesso.

- Tra le funzioni del tipo

$$g(x) = \frac{bx}{(x^2 + k^2)^a}$$

con a, $b \in \mathbb{R}$, determinare le primitive di f.
Dimostrare che, se $h = k^2$, la funzione f rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty]$. Quali sono i valori della media e della mediana di tale variabile aleatoria?

QUESTIONARIO

1 Fissati i numeri reali positivi a e b, con $a \geq b$, provare che

$$\lim_{x \to +\infty} \log_x (x^a + x^b) = a.$$

2 È assegnata la funzione f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

Studiare il segno della funzione f e provare che essa è crescente. Determinare il valore di

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx.$$

3 Dimostrare che il quadrilatero avente per vertici i punti medi dei lati di un rombo è un rettangolo.

4 Considerati i punti $A(2; 3; 6)$, $B(6; 2; -3)$, $C(3; -6; 2)$ nello spazio tridimensionale, verificare che i segmenti OA, OB, OC (dove il punto O indica l'origine degli assi) costituiscono tre spigoli di un cubo.
Determinare il centro e il raggio della sfera S circoscritta a tale cubo.

5 Una persona lancia simultaneamente due dadi da gioco, con facce numerate da 1 a 6, poi trascrive su un foglio il massimo dei due numeri usciti. Ripetendo molte volte la procedura, quale ci si può attendere che sarà la media dei valori trascritti?

6 Consideriamo un'astronave in moto che viaggia rispetto alla terra a velocità $v = 0{,}90\ c$. Supponiamo che a bordo dell'astronave sia presente una scatola di dimensioni $a = 40$ cm, $b = 50$ cm e $h = 20$ cm, con il lato b disposto parallelamente alla direzione del moto dell'astronave. Per un osservatore posto sulla terra, che volume avrà la scatola? Se l'astronauta lancia la scatola con una velocità $v_s = 0{,}50\ c$ nella direzione del moto dell'astronave, quale velocità misura l'osservatore sulla terra?

7 Una bobina è costituita da N spire quadrate di lato l, ha una resistenza elettrica R ed è montata su un carrello che può muoversi con attrito trascurabile su un piano orizzontale. Il carrello viene tirato con velocità costante $\vec{v}$ ed entra in una zona in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$, uscente dalla pagina come in figura. Spiegare perché la bobina si riscalda e determinare l'espressione della potenza dissipata. Cosa accade se il carrello viene lanciato con velocità $\vec{v}$ verso la stessa regione?

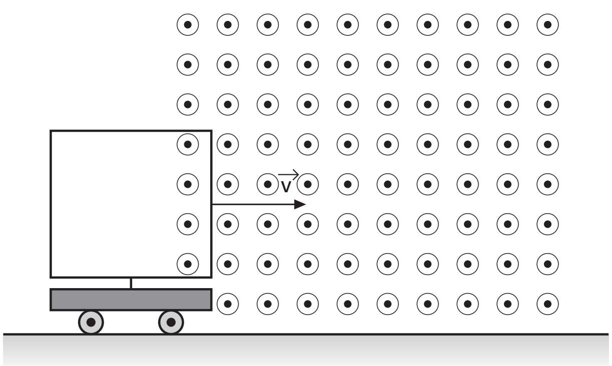
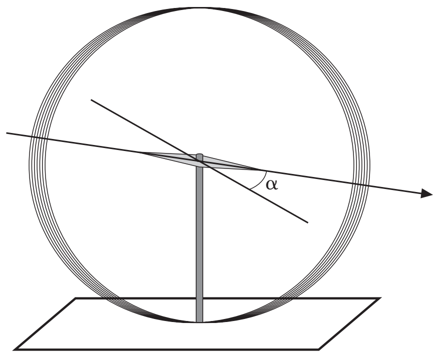


Figura 1

8 Una bobina compatta è costituita da 130 spire di raggio $R = 15$ cm.
Si pone un ago magnetico, le cui dimensioni sono trascurabili rispetto a R, al centro della bobina, come in figura.



■ **Figura 2**

Il piano della bobina viene orientato in modo da contenere l'ago che, a sua volta, è orientato nella direzione della componente orizzontale del campo magnetico terrestre. Quando la bobina è attraversata da corrente, l'ago devia di un angolo α. Spiegare la causa di questa deviazione.
In tabella sono riportati alcuni valori, misurati sperimentalmente, di α e della corrispondente corrente nella bobina. Utilizzando questi dati, misurare l'intensità della componente orizzontale del campo magnetico terrestre, con la relativa incertezza.

Deviazione α	10°	20°	30°	40°	50°
Intensità di corrente	11,4 mA	23,3 mA	36,8 mA	52,4 mA	73,9 mA

Costanti fisiche		
carica elementare	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
massa del protone	m_p	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A^2
velocità della luce nel vuoto	c	$2{,}998 \cdot 10^8$ m/s
elettronvolt	eV	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

PROBLEMA 1

- La funzione $f_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9a}{4(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $x \geq 0$, l'espressione $\frac{9}{2}(1 + xe^{a-x})$ è sempre positiva e quindi lo è anche la funzione $f_a(x)$, indipendentemente dal valore del parametro reale a.

Per $x < 0$, il segno dell'espressione $\frac{9a}{4(x-1)^4}$ dipende invece dal segno del parametro reale a, poiché il denominatore è sempre positivo. In particolare, per $x < 0$:
- $f_a(x)$ è positiva $\forall a > 0$;
- $f_a(x)$ è nulla per $a = 0$;
- $f_a(x)$ è negativa $\forall a < 0$.

Quindi:
- se $a > 0$, $f_a(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- se $a = 0$, $f_a(x) = 0$ per $x < 0$ e $f_a(x) > 0$ per $x \geq 0$;
- se $a < 0$, $f_a(x) < 0$ per $x < 0$ e $f_a(x) > 0$ per $x \geq 0$.

La funzione $f_a(x)$ è continua e infinitamente derivabile per $x \neq 0$. Studiamo la continuità in $x = 0$ calcolando i valori dei limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f_a(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{9}{2}(1 + xe^{a-x}) = \frac{9}{2} = f_a(0); \ \lim_{x \to 0^-} f_a(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{9a}{4(x-1)^4} = \frac{9a}{4}.$$

Affinché $f_a(x)$ sia continua anche in $x = 0$ deve risultare:

$$\frac{9a}{4} = \frac{9}{2} \ \to \ a = 2.$$

Se $a \neq 2$, la funzione presenta in $x = 0$ un punto di discontinuità di prima specie.

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi della funzione, calcoliamo la sua derivata prima:

$$f'_a(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 - x)e^{a-x} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{9a}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

Per $x > 0$, la derivata $f'_a(x)$ si annulla per $x = 1$ e il suo segno è positivo per $0 < x < 1$ e negativo per $x > 0$, per cui in corrispondenza di $x = 1$ esiste un punto di massimo relativo di coordinate $M\left(1; \frac{9}{2}(1 + e^{a-1})\right)$.

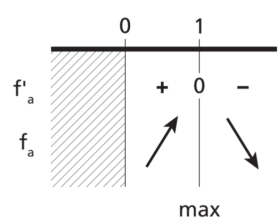


Figura 3

Il punto M risulta anche un punto di massimo assoluto per la funzione $f_a(x)$ in $[0; +\infty[$. Per verificare che M è un punto di massimo assoluto su tutto $\mathbb{R}$ dobbiamo valutare cosa succede per valori negativi di x.

Per $x < 0$, la derivata $f'_a(x)$ non si annulla mai e il suo segno dipende dal parametro a.
- Se $a > 0$, $f'_a(x)$ è positiva, quindi $f_a(x)$ è strettamente crescente e assume valori inferiori a $\lim_{x \to 0^-} f_a(x) = \frac{9a}{4}$. Per dimostrare che M è un massimo assoluto, basta verificare che $\frac{9a}{4} < \frac{9}{2}(1 + e^{a-1})$, cioè che $\frac{a}{2} - 1 < e^{a-1}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Tale disequazione si può risolvere graficamente, rappresentando le funzioni di equazioni: $y = \frac{a}{2} - 1$ e $y = e^{a-1}$ e confrontando i due grafici.
Come si deduce dal grafico a lato, la disequazione è soddisfatta per ogni $a \in \mathbb{R}$ e quindi in particolare per $a > 0$, che è il caso che stiamo esaminando.

- Se $a = 0$, $f_a(x)$ è costantemente nulla per cui il punto M, di ordinata positiva, è un punto di massimo assoluto per $f_a(x)$.
- Se $a < 0$, $f_a(x)$ è negativa per cui il punto M, di ordinata positiva, è un punto di massimo assoluto per $f_a(x)$.

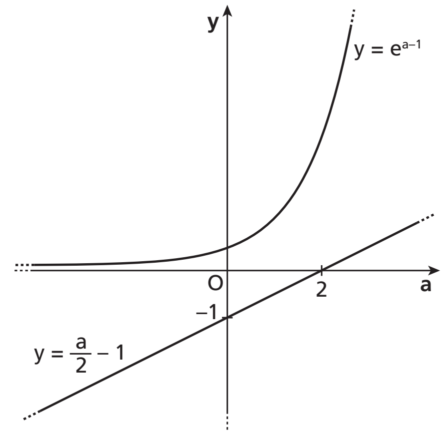


Figura 4

- La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) & \text{per } x \geq 0 \\ \frac{9}{2(x-1)^4} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

ottenuta per $a = 2$ è continua anche in $x = 0$, come verificato al punto precedente.
Per verificare se è anche derivabile in $x = 0$, consideriamo la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(1 - x)e^{2-x} & \text{per } x > 0 \\ -\frac{18}{(x-1)^5} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

Poiché i valori dei limiti:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{9}{2}(1 - x)e^{2-x} = \frac{9}{2}e^2 \text{ e } \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} -\frac{18}{(x-1)^5} = 18$$

sono finiti e diversi, la funzione $f(x)$ non è derivabile in $x = 0$, dove presenta un punto angoloso.
Studiamo l'andamento di $f(x)$.
Alcune caratteristiche le abbiamo già determinate al punto precedente.

- La funzione $f(x)$ esiste ed è continua per ogni $x \in \mathbb{R}$ e interseca l'asse y nel punto $A\left(0; \frac{9}{2}\right)$.
- La funzione $f(x)$ è sempre positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{9}{2}(1 + xe^{2-x}) = \frac{9}{2}$, per cui esiste un asintoto orizzontale destro di equazione $y = \frac{9}{2}$;

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{9}{2(x-1)^4} = 0$, per cui esiste un asintoto orizzontale sinistro di equazione $y = 0$.
- Dal segno della derivata prima abbiamo ricavato che la funzione è crescente per $x < 1$ e decrescente per $x > 1$ e presenta un punto di massimo assoluto in $M\left(1; \frac{9}{2}(1 + e)\right)$.
- Nel punto $x = 0$ la funzione non è derivabile e presenta un punto angoloso.
- Per determinare gli eventuali punti di flesso, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}(x - 2)e^{2-x} & \text{per } x > 0 \\ \frac{90}{(x-1)^6} & \text{per } x < 0 \end{cases}.$$

La funzione $f''(x)$ è positiva per $x < 0 \vee x > 2$, negativa per $0 < x < 2$ e si annulla per $x = 2$. In corrispondenza di questa ascissa è presente un punto di flesso di coordinate $F\left(2; \frac{27}{2}\right)$ per la funzione $f(x)$.

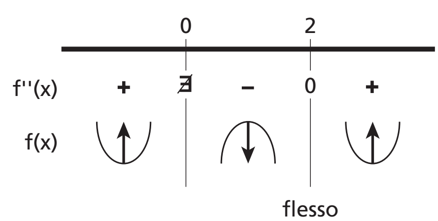


Figura 5

In $x = 0$ la derivata seconda non è definita, per cui non ci sono altri punti di flesso.

Si ricava quindi il seguente grafico della funzione $y = f(x)$.

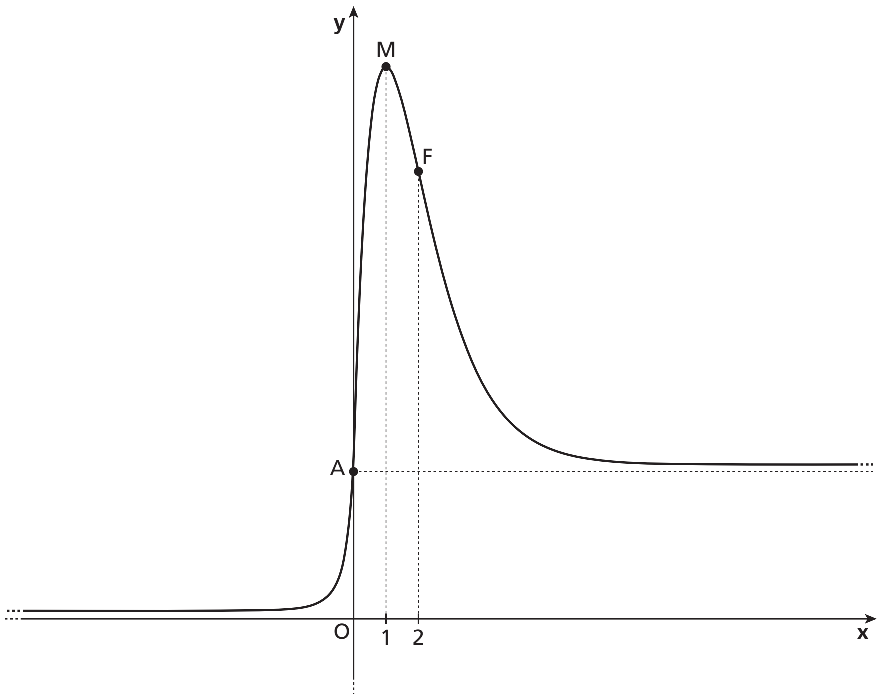


Figura 6

– Per calcolare l'ampiezza in gradi dell'angolo ottuso formato dalle semitangenti destra e sinistra nel punto di non derivabilità $x = 0$, ricordiamo che abbiamo già calcolato i valori della derivata destra e sinistra:

$$f'_+(0) = \frac{9}{2}e^2 \text{ e } f'_-(0) = 18.$$

Indicati con α e β gli angoli che le due semirette tangenti, rispettivamente destra e sinistra, formano con il semiasse positivo delle ascisse, si ha $\tan\alpha = \frac{9}{2}e^2 \simeq 33$ e $\tan\beta = 18$.

Disegniamo le due rette tangenti, senza preoccuparci delle unità di misura sugli assi ma solo della posizione reciproca delle due rette.

Applichiamo la formula di sottrazione della tangente e troviamo:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta} = \frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + 81e^2} \text{ da cui}$$

$$\alpha - \beta = \arctan\frac{\frac{9}{2}e^2 - 18}{1 + 81e^2} \simeq 1{,}5°.$$

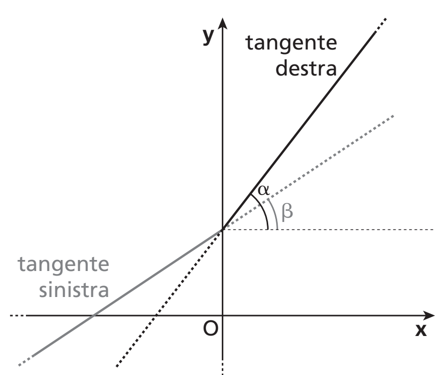


Figura 7

L'angolo richiesto è il supplementare di quello ricavato e vale circa 178,5°.

Esaminiamo ora la relazione tra le funzioni $g(x)$ e $f(x)$.

Per $x \geq 0$ è definita la funzione $g(x) = h[1 + (3 - kx)e^{kx-1}]$. Calcoliamo $g(3 - x)$ sostituendo i valori: $g(3 - x) = h[1 + (3 - k(3 - x))e^{k(3-x)-1}] = h[1 + (3 - 3k + kx)e^{3k-kx-1}]$.

Affinché risulti $g(3-x)=f(x)$ per ogni $x \geq 0$ occorre che sia $3k - kx - 1 = 2 - x$ per ogni x positivo, da cui $k = 1$, e $h = \frac{9}{2}$.

- Ogni protone possiede un'energia cinetica $K = 42$ MeV $= 42 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-13}$ J $= 6{,}728 \cdot 10^{-12}$ J e una massa $m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg; se trascuriamo gli effetti relativistici, possiamo determinare la velocità posseduta da ogni protone con la formula:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \text{ da cui } v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}728 \cdot 10^{-12}\ \text{J}}{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} \simeq 8{,}968 \cdot 10^7\ \text{m/s}.$$

All'interno del campo magnetico, ortogonale alla loro traiettoria, i protoni avvertono la forza di Lorentz il cui modulo è $F_L = qvB$, dove q è la carica del protone che è quella elementare e vale $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, v è la velocità del protone e B è l'intensità del campo magnetico; tale forza agisce da forza centripeta, per cui i protoni si muovono su una traiettoria circolare.
Per calcolare il raggio r di curvatura della traiettoria circolare descritta, occorre uguagliare il modulo della forza di Lorentz con quello della forza centripeta:

$$qvB = m\frac{v^2}{r} \rightarrow r = \frac{mv}{qB} = \frac{1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 8{,}968 \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}24\ \text{T}} \simeq 3{,}902\ \text{m}.$$

- La funzione $\varepsilon(x)$ rappresenta l'energia del protone dopo x cm di cammino nell'acqua, quindi l'energia assorbita dall'acqua nei primi x cm di cammino del protone è rappresentata dalla funzione $\varepsilon_a(x) = \varepsilon(0) - \varepsilon(x)$. Il problema propone la relazione $y = -\frac{d\varepsilon}{dx}$, dove $-d\varepsilon$ è l'energia assorbita dall'acqua nel tratto dx (in cm) e $y = g(x) = \frac{9}{2}[1 + (3-x)e^{x-1}]$.

Per calcolare l'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone, occorre risolvere l'equazione differenziale a variabili separabili:

$$g(x) = -\frac{d\varepsilon}{dx} \rightarrow -d\varepsilon = g(x)dx$$

e integrare in x sull'intervallo da 0 cm a 3 cm:

$$\int_0^3 \frac{9}{2}[1 + (3-x)e^{x-1}]dx = \int_0^3 \frac{9}{2}dx + \int_0^3 \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx.$$

Il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx = \frac{9}{2}\int (3-x)e^{x-1}dx$$

può essere effettuato per parti:

$$\frac{9}{2}\int \underbrace{(3-x)}_{\text{fattore finito}}\underbrace{e^{x-1}dx}_{\text{fattore differenziale}} = \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} - \frac{9}{2}\int(-1)e^{x-1}dx = \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} + \frac{9}{2}e^{x-1} + c.$$

L'energia richiesta vale quindi:

$$\int_0^3 \frac{9}{2}dx + \int_0^3 \frac{9}{2}(3-x)e^{x-1}dx = \left[\frac{9}{2}x\right]_0^3 + \left[\frac{9}{2}(3-x)e^{x-1} + \frac{9}{2}e^{x-1}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{2}e^{-1} - \frac{9}{2}e^{-1} + \frac{9}{2}e^2 =$$

$$\frac{27}{2} - 18e^{-1} + \frac{9}{2}e^2 \simeq 40{,}129\ \text{MeV}.$$

L'energia assorbita dall'acqua nei primi 3 cm di cammino del protone è 40,129 MeV.

PROBLEMA 2

- Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy in modo che il punto medio tra A e B sia l'origine $O(0; 0)$, la retta r passante per A e B coincida con l'asse x e l'asse del segmento AB coincida con l'asse y.
La carica positiva q è posta nel punto $A(-k; 0)$ e la carica negativa $-q$ nel punto $B(k; 0)$, con $k > 0$.

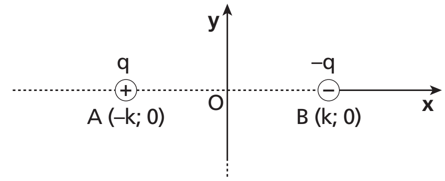


Figura 8

Un generico punto C sull'asse delle ascisse ha coordinate $C(x; 0)$; distinguiamo diversi casi per determinare il campo elettrico risultante in C.

– Se $x > k$, il vettore campo elettrico $\vec{E_C}$ risultante in C è un vettore diretto nel verso negativo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico $\vec{E_B}$ generato in C dalla carica $-q$ (nel verso negativo dell'asse x) e il campo elettrico $\vec{E_A}$ generato in C dalla carica q (nel verso positivo dell'asse x) e meno intenso del precedente perché il punto A è più lontano dal punto C rispetto al punto B.

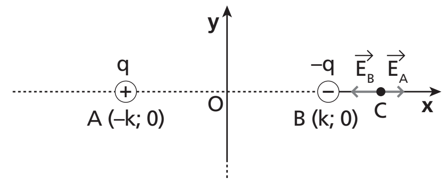


Figura 9

Indicata con K_0 la costante di Coulomb nel vuoto $\left(K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 8{,}9876 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}\right)$, il modulo del vettore campo elettrico in C vale:

$$E_C = K_0 \frac{q}{(x-k)^2} - K_0 \frac{q}{(x+k)^2} = K_0 q\left[\frac{1}{(x-k)^2} - \frac{1}{(x+k)^2}\right].$$

– Se $-k < x < k$, il vettore campo elettrico $\vec{E_C}$ risultante in C è un vettore diretto nel verso positivo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico $\vec{E_B}$ generato in C dalla carica $-q$ e il campo elettrico $\vec{E_A}$ generato in C dalla carica q (entrambi nel verso positivo dell'asse x).
In tal caso il modulo del vettore campo elettrico in C vale:

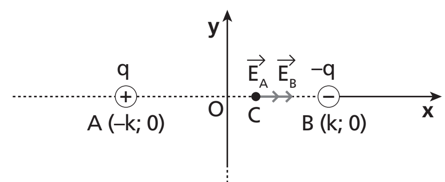


Figura 10

$$E_C = K_0 \frac{q}{(x-k)^2} + K_0 \frac{q}{(x+k)^2} = K_0 q\left[\frac{1}{(x-k)^2} + \frac{1}{(x+k)^2}\right].$$

– Se $x < -k$, il vettore campo elettrico $\vec{E_C}$ risultante in C è un vettore diretto nel verso negativo dell'asse x perché è la somma vettoriale tra il campo elettrico $\vec{E_B}$ generato in C dalla carica $-q$ (nel verso positivo dell'asse x) e il campo elettrico $\vec{E_A}$ generato in C dalla carica q (nel verso negativo dell'asse x) ma più intenso del precedente perché il punto C è più vicino al punto A rispetto al punto B.
In tal caso, il modulo del vettore campo elettrico in C vale:

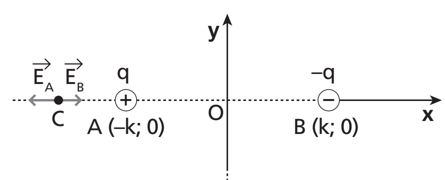


Figura 11

$$E_C = K_0 \frac{q}{(-x+k)^2} - K_0 \frac{q}{(-x-k)^2} = K_0 q\left[\frac{1}{(x-k)^2} - \frac{1}{(x+k)^2}\right].$$

– Se $x = k \vee x = -k$, cioè se il punto C coincidesse con il punto A oppure con il punto B, il campo elettrico non sarebbe definito; per valori di $x \to \pm k$ il modulo del campo elettrico tende a $+\infty$.

Dall'analisi dei casi precedenti si può dedurre anche che non esistono punti sulla retta r in cui il campo elettrico si annulla; infatti, in tal caso, in un punto C della retta AB dovrebbero esistere due campi elettrici opposti generati dalle cariche q e $-q$. Tale situazione non si può verificare in un punto compreso tra A e B perché in tale situazione i campi elettrici generati in C hanno verso concorde e non si possono annullare. Ma non si può verificare neppure nei punti esterni al segmento AB perché, anche se di verso opposto, i due vettori campi elettrici generati in C dalle due cariche hanno moduli diversi avendo C distanze diverse da A e B.

- Sia $P(0; y)$ un punto posto sull'asse delle ordinate, coincidente nel riferimento cartesiano da noi scelto con l'asse del segmento AB. Rappresentiamo graficamente i vettori campo elettrico $\overrightarrow{E_A}$ ed $\overrightarrow{E_B}$, generati rispettivamente nel punto P dalle cariche elettriche q e $-q$, e il loro vettore risultante $\overrightarrow{E_P}$.
Per simmetria, essendo P equidistante sia da A sia da B, i vettori $\overrightarrow{E_A}$ ed $\overrightarrow{E_B}$ hanno lo stesso modulo. Scomponendo tali vettori in componenti cartesiane, le componenti verticali sono opposte per cui si annullano. Il vettore risultante $\overrightarrow{E_P}$ è quindi un vettore orizzontale, parallelo all'asse x, avente il modulo doppio rispetto a quello della componente orizzontale del vettore $\overrightarrow{E_A}$ (oppure $\overrightarrow{E_B}$).

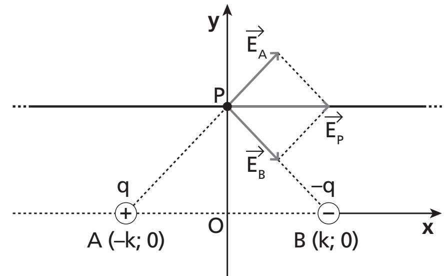


Figura 12

Il modulo del vettore $\overrightarrow{E_A}$ vale:

$$E_A = K_0 \frac{q}{\overline{AP}^2} = \frac{K_0 q}{y^2 + k^2}.$$

Considerato l'angolo $\alpha = P\widehat{A}B$, la componente orizzontale $E_{A,x}$ del vettore $\overrightarrow{E_A}$ vale $E_{A,x} = E_A \cos\alpha$.
Considerato poi il triangolo rettangolo AOP, per la definizione di coseno di un angolo si ha:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AO}}{\overline{AP}} = \frac{k}{\sqrt{y^2 + k^2}},$$

per cui:

$$E_{A,x} = \frac{K_0 q}{y^2 + k^2} \cdot \frac{k}{\sqrt{y^2 + k^2}} = \frac{K_0 kq}{\sqrt{(y^2 + k^2)^3}}$$

e quindi:

$$E_P = 2 \cdot E_{A,x} = \frac{2K_0 kq}{\sqrt{(y^2 + k^2)^3}}.$$

Sostituendo la variabile x alla y, così come richiesto nel problema, si ottiene che l'intensità del campo elettrico in P in funzione della distanza x dal punto medio di AB vale:

$$E_P = \frac{2K_0 kq}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = \frac{2K_0 kq}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Calcolando il limite $\lim_{x \to \infty} \frac{2K_0 kq}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = 0^+$, si dimostra formalmente anche che l'intensità del campo elettrico generato nel punto P dalle due cariche q e $-q$ decresce quando P si allontana dal punto medio di AB.

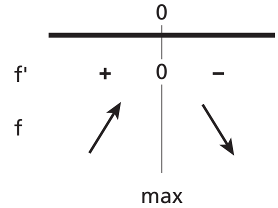
- Studiamo il grafico della funzione $f(x) = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = h(x^2 + k^2)^{-\frac{3}{2}}$, che ha dominio $\mathbb{R}$ per ogni h, k reali positivi, è continua e infinitamente derivabile.
Poiché $f(-x) = \frac{h}{[(-x)^2 + k^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{h}{(x^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x)$, la funzione $f(x)$ è una funzione pari e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
La funzione è sempre positiva e il suo grafico non interseca mai l'asse x.
Interseca invece l'asse y nel punto di coordinate $\left(0; \frac{h}{k^3}\right)$.
Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{h}{\sqrt{(x^2 + k^2)^3}} = 0^+,$$

per cui l'asse x di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale per la funzione.

Calcoliamo la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = \frac{-3hx}{(x^2+k^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

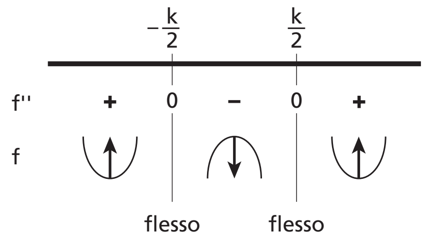


Il suo segno è positivo per $x < 0$, negativo per $x > 0$ e si annulla per $x = 0$, in corrispondenza del quale vi è un punto di massimo relativo assoluto di coordinate $M\left(0; \frac{h}{k^3}\right)$.

■ **Figura 13**

Calcoliamo la derivata seconda della funzione:

$$f''(x) = -3h(x^2+k^2)^{-\frac{5}{2}} - 3hx\left(-\frac{5}{2}\right)(x^2+k^2)^{-\frac{7}{2}} \cdot 2x = \frac{3h(4x^2-k^2)}{(x^2+k^2)^{\frac{7}{2}}}.$$

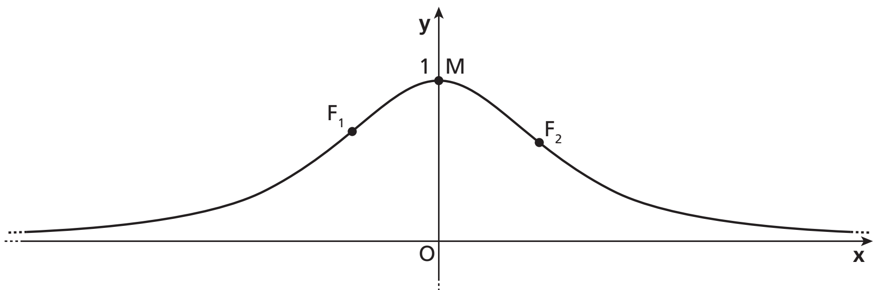


Il suo segno è positivo per $x < -\frac{k}{2} \vee x > \frac{k}{2}$, negativo per $-\frac{k}{2} < x < \frac{k}{2}$ e si annulla per $x = \pm\frac{k}{2}$, in corrispondenza dei quali vi sono due punti di flesso di coordinate:

$$F_1\left(-\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}\,h}{25k^3}\right) \text{ e } F_2\left(\frac{k}{2}; \frac{8\sqrt{5}\,h}{25k^3}\right).$$

■ **Figura 14**

La funzione $y = f(x)$ ha dunque un andamento «a campana»; in figura rappresentiamo il suo grafico relativo al caso $h = k = 1$.



■ **Figura 15**

- Affinché la funzione $g(x) = \frac{bx}{(x^2+k^2)^a}$ sia una primitiva di $f(x)$ deve risultare $g'(x) = f(x)$.
  Calcoliamo la derivata prima di $g(x)$:

$$g'(x) = b(x^2+k^2)^{-a} + (-a)(x^2+k^2)^{-a-1} \cdot 2x \cdot bx = \frac{b(x^2+k^2) - 2abx^2}{(x^2+k^2)^{a+1}} = \frac{b(1-2a)x^2 + bk^2}{(x^2+k^2)^{a+1}}.$$

Affinché $g'(x)$ coincida con $f(x)$ deve quindi risultare:

$$a + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } bk^2 = h \rightarrow b = \frac{h}{k^2}.$$

Posto ora $h = k^2$, la funzione $f(x)$ diventa:

$$f(x) = \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che ha come primitiva la funzione:

$$g(x) = \frac{x}{(x^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

La funzione $f(x)$, che è sempre positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$, rappresenta la densità di probabilità di una varia-

bile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty[$ se l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ vale 1.
Calcoliamo quindi l'integrale generalizzato:

$$\int_0^{+\infty} \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^a = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}-0\right]=$$

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{a}\right)^2}} = 1.$$

Quindi è vero che la funzione $f(x)$ rappresenta la densità di probabilità di una variabile aleatoria sull'intervallo $[0; +\infty[$.
Per calcolare la media della variabile aleatoria occorre calcolare il valore dell'integrale

$$M(X) = \int_0^{+\infty} x\cdot f(x)dx,$$

cioè:

$$M(X) = \int_0^{+\infty}\frac{xk^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a\frac{xk^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{k^2}{2}\int_0^a\frac{2x}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx =$$

$$\lim_{a\to+\infty}\left[\frac{-k^2}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^a = \lim_{a\to+\infty}\left[\frac{-k^2}{\sqrt{a^2+k^2}}+k\right] = k.$$

La media della variabile aleatoria vale quindi k.
Per calcolare la mediana della variabile aleatoria occorre determinare il valore m (positivo) tale che l'integrale $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$, cioè la metà del valore esteso a tutto l'intervallo di definizione $[0; +\infty[$.
Poiché risulta: $\int_0^m f(x)dx = \int_0^m \frac{k^2}{(x^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}\right]_0^m = \frac{m}{\sqrt{m^2+k^2}} - 0 = \frac{m}{\sqrt{m^2+k^2}}$, risolviamo la seguente equazione nell'incognita m elevando al quadrato entrambi i membri:

$$\frac{m}{\sqrt{m^2+k^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{m^2}{m^2+k^2} = \frac{1}{4} \to 4m^2 = m^2+k^2 \to m^2 = \frac{k^2}{3} \to m = \frac{k}{\sqrt{3}} = \frac{k}{3}\sqrt{3}.$$

La mediana della variabile aleatoria vale quindi $\frac{k}{3}\sqrt{3}$.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x) = \log_x(x^a + x^b)$ è definita per $x > 0 \wedge x \neq 1$.
All'interno dell'argomento del logaritmo si può raccogliere a fattor comune il monomio x^a; usando le proprietà dei logaritmi si ottiene:

$$f(x) = \log_x(x^a+x^b) = \log_x\left[x^a\left(1+\frac{x^b}{x^a}\right)\right] = \log_x x^a + \log_x\left(1+\frac{x^b}{x^a}\right) = a\log_x x + \log_x(1+x^{b-a}) =$$

$$a + \log_x(1+x^{b-a}).$$

- Se $a > b$ e $x \to +\infty$, il termine x^{b-a} tende a 0 per cui:

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b) = a + \lim_{x\to+\infty}\log_x(1+x^{b-a}) = a+0 = a.$$

- Se $a = b$, il termine x^{b-a} vale costantemente 1 per cui:

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x(x^a+x^b) = a + \lim_{x\to+\infty}\log_x(1+x^{b-a}) = a + \lim_{x\to+\infty}\log_x 2.$$

Usando la formula del cambiamento di base di un logaritmo otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\log_x 2 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2}{\ln x} = 0$$

per cui anche in questo caso si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} \log_x (x^a + x^b) = a.$$

2 La funzione integranda $y = e^{x^2}$ esiste per ogni $x \in \mathbb{R}$, è continua, infinitamente derivabile ed è sempre positiva, poiché la funzione esponenziale è sempre positiva.
Ricordando che il significato geometrico di integrale definito è la misura dell'area del trapezoide corrispondente, studiamo il segno della funzione integrale $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt$:

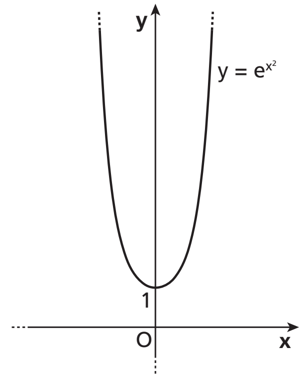


Figura 16

- se $x = 1$, $f(1) = \int_1^1 e^{t^2} dt = 0$;
- se $x > 1$, $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt > 0$;
- se $x < 1$, $f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt = -\int_x^1 e^{t^2} dt < 0$.

Per studiare la crescenza di $f(x)$ calcoliamo la sua derivata prima e studiamone il segno. Usando il teorema fondamentale del calcolo integrale si trova $f'(x) = e^{x^2}$ che, come abbiamo analizzato in precedenza, è una funzione sempre positiva; pertanto la funzione $f(x)$ è crescente per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Calcoliamo ora la derivata seconda di $f(x)$: $f''(x) = 2xe^{x^2}$.
L'integrale richiesto vale:

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \int_0^1 \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}} dx = \int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

In alternativa, per il calcolo dell'integrale si può usare una delle regole di integrazione per la funzione composta, evitando il calcolo di $f''(x)$:

$$\int_0^1 \frac{f''(x)}{f'(x)} dx = \left[\ln |f'(x)|\right]_0^1 = [\ln e^{x^2}]_0^1 = 1 - 0 = 1.$$

3 Per ipotesi $ABCD$ è un rombo e i punti E, F, G, H sono rispettivamente i punti medi dei lati AB, BC, CD, DA.
Quindi i segmenti AE, EB, BF, FC, CG, FC, GD, DH e HA sono tutti congruenti tra loro perché sono la metà dei lati del rombo, congruenti per ipotesi.
I triangoli AEH e CGF sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno $HA \cong GC$, $AE \cong CF$ e $H\widehat{A}E \cong G\widehat{C}F$ in quanto angoli opposti di un rombo; in particolare si ha $HE \cong GF$.

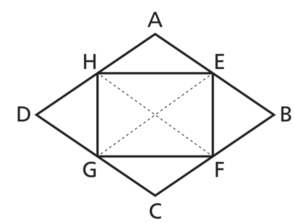


Figura 17

Analogamente i triangoli EBF e HGD sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno $EB \cong HD$, $BF \cong DG$ ed $E\widehat{B}F \cong H\widehat{D}G$ in quanto angoli opposti di un rombo; in particolare si ha $EF \cong HG$.
Il quadrilatero $HEFG$ è quindi un parallelogramma avendo i lati opposti congruenti.

I triangoli HGF ed EFG sono congruenti per il 1° criterio di congruenza dei triangoli perché hanno:

- GF in comune;
- $EF \cong HG$ per la precedente dimostrazione;
- $H\widehat{G}F \cong G\widehat{F}E$ perché differenza di angoli congruenti, infatti:

$$H\widehat{G}F \cong 180° - (D\widehat{G}H + C\widehat{G}F) \text{ e } G\widehat{F}E \cong 180° - (E\widehat{F}B + G\widehat{F}C).$$

In particolare si ha $HF \cong GE$.
Il quadrilatero $HEFG$ è quindi un rettangolo, essendo un parallelogramma con le diagonali congruenti.

Possiamo dimostrare che $HEFG$ è un rettangolo anche in un altro modo. Tracciamo la diagonale DB del rombo e consideriamo i triangoli ADB e DCB. Per il teorema del segmento congiungente i punti medi di due lati di un triangolo abbiamo:

- $HE \parallel DB$ e $HE \cong \frac{1}{2}DB$;
- $GF \parallel DB$ e $GF \cong \frac{1}{2}DB$.

Quindi $HE \parallel GF$ e $HE \cong GF$. Il quadrilatero $HEGF$ è allora un parallelogramma, perché ha una coppia di lati opposti paralleli e congruenti. In particolare, i lati HE e GF sono paralleli alla diagonale DB del rombo. Analogamente si dimostra che i lati congruenti e paralleli HG ed EF sono entrambi paralleli alla diagonale AC del rombo.

Dimostriamo ora che $HEFG$ è un rettangolo. Sappiamo che:

- $DB \perp AC$ per ipotesi, perché diagonali di un rombo;
- $HE \parallel GF \parallel DB$ per precedente dimostrazione;
- $HG \parallel EF \parallel AC$ per precedente dimostrazione.

Concludiamo che $HE \perp HG$, perché segmenti paralleli ai segmenti perpendicolari DB e AC. Quindi l'angolo $G\widehat{H}E$ è retto e il parallelogramma $HEGF$ è un rettangolo.

4 I segmenti OA, OB e OC sono gli spigoli di un cubo se sono tutti di ugual lunghezza e se sono a due a due perpendicolari.
Calcoliamo le lunghezze:

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7;$$
$$\overline{OB} = \sqrt{6^2+2^2+(-3)^2} = \sqrt{36+4+9} = \sqrt{49} = 7;$$
$$\overline{OC} = \sqrt{3^2+(-6)^2+2^2} = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7.$$

Per verificare la perpendicolarità è sufficiente provare che sono nulli i prodotti scalari tra le coppie dei rispettivi vettori, le cui componenti coincidono con le coordinate dei punti A, B e C avendo come primo estremo l'origine $O(0; 0; 0)$: $\overrightarrow{OA} = (2; 3; 6)$, $\overrightarrow{OB} = (6; 2; -3)$ e $\overrightarrow{OC} = (3; -6; 2)$.
Calcoliamo dunque i prodotti scalari:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 6\cdot(-3) = 12+6-18 = 0;$$
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2\cdot 3 + 3\cdot(-6) + 6\cdot 2 = 6-18+12 = 0;$$
$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 6\cdot 3 + 2\cdot(-6) + (-3)\cdot 2 = 18-12-6 = 0.$$

Quindi i segmenti OA, OB e OC sono gli spigoli di un cubo.
L'equazione di una superficie sferica è $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ e imponiamo il passaggio per i punti A, B, C e O:

$$\begin{cases} 4+9+36+2a+3b+6c+d=0 \\ 36+4+9+6a+2b-3c+d=0 \\ 9+36+4+3a-6b+2c+d=0 \\ d=0 \end{cases} \to \begin{cases} 4a-b-9c=0 \\ 3a+8b-5c=0 \\ 49+3a-6b+2c=0 \\ d=0 \end{cases} \to \begin{cases} b=4a-9c \\ 5a-11c=0 \\ 49-21a+56c=0 \\ d=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=-11 \\ b=1 \\ c=-5 \\ d=0 \end{cases}.$$

L'equazione della superficie sferica circoscritta al cubo è quindi $x^2+y^2+z^2-11x+y-5z=0$ che ha il centro nel punto $D\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

Determiniamo anche il raggio r della sfera calcolando:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2+\left(-\frac{c}{2}\right)^2-d} = \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{121+1+25}{4}} = \sqrt{\frac{147}{4}} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$

In alternativa, osserviamo che il centro della sfera circoscritta al cubo è il punto medio D della diagonale AE del cubo. D ha coordinate:

$$D\left(\frac{x_A+x_E}{2}; \frac{y_A+y_E}{2}; \frac{z_A+z_E}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{2+x_E}{2}; \frac{3+y_E}{2}; \frac{6+z_E}{2}\right).$$

Per trovare le coordinate di E, calcoliamo il punto medio M della diagonale CB della base del cubo:

$$M\left(\frac{x_C+x_B}{2}; \frac{y_C+y_B}{2}; \frac{z_C+z_B}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}; -2; -\frac{1}{2}\right)$$

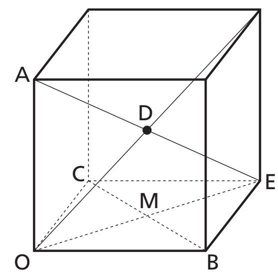


Figura 18

M è anche punto medio di OE, quindi:

- $\frac{x_E}{2} = \frac{9}{2} \rightarrow x_E = 9;$
- $\frac{y_E}{2} = -2 \rightarrow y_E = -4;$
- $\frac{z_E}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow z_E = -1.$

E ha coordinate $(9; -4; -1)$. Sostituiamo nelle coordinate di D:

$$D\left(\frac{2+9}{2}; \frac{3-4}{2}; \frac{6-1}{2}\right) \rightarrow D\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Determiniamo r calcolando $\frac{1}{2}\overline{AE}$:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(2-9)^2+(3+4)^2+(6+1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{49+49+49} = \frac{7}{2}\sqrt{3}.$$

5 Indichiamo con X la variabile casuale che rappresenta il massimo tra i due numeri usciti lanciando due dadi simultaneamente. Essa può assumere i valori: 1, 2, 3, 4, 5 e 6.
Il seguente schema riporta, sulla prima colonna e sulla prima riga, le possibili uscite per ciascun dado e, nelle caselle interne, il massimo dei due numeri usciti per ogni possibile esito del lancio.

Dado 1 \ Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

Le rispettive probabilità della variabile casuale X sono dunque quelle riportate nella seguente tabella.

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Il valore medio della variabile casuale X si ottiene calcolando:

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 3\cdot\frac{5}{36} + 4\cdot\frac{7}{36} + 5\cdot\frac{9}{36} + 6\cdot\frac{11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4,47.$$

Tale valore rappresenta quello atteso calcolando la media dei numeri trascritti dopo aver ripetuto molte volte la procedura di lancio.

6 Per un osservatore sulla Terra lo spigolo di lunghezza b risulterà contratto, con lunghezza

$$b' = b\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

dal momento che è parallelo alla direzione del moto, mentre gli altri due spigoli, perpendicolari alla direzione del moto, hanno le stesse misure che hanno rispetto all'astronave. Pertanto il volume della scatola, per un osservatore sulla Terra, è:

$$V' = ab'h = (0,40 \text{ m})(0,50 \text{ m})\sqrt{1-0,81}(0,20 \text{ m}) = 1,74 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.$$

La velocità $v_{s,T}$ della scatola lanciata, rispetto all'osservatore sulla Terra, si ottiene dalla legge relativistica di composizione delle velocità:

$$v_{s,T} = \frac{v+v_s}{1+\frac{vv_s}{c^2}} = \frac{(0,90c)+(0,50c)}{1+\frac{(0,90c)(0,50c)}{c^2}} = \frac{1,4c}{1+0,45} \simeq 0,97c.$$

7 Mentre la bobina entra nella zona in cui è presente il campo magnetico, il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B})$ attraverso la superficie che ha per contorno la bobina varia nel tempo. Per la legge di Faraday-Neumann, questo genera una forza elettromotrice indotta e, quindi, una corrente indotta. Il passaggio della corrente produce il riscaldamento della bobina per effetto Joule.
La bobina entra nella regione con il campo magnetico a velocità costante v al tempo iniziale $t_0 = 0$. L'area della superficie attraversata dalle linee di campo magnetico dipende dal tempo t trascorso secondo la legge

$$S = Nlvt$$

e quindi il flusso del campo magnetico attraverso la superficie è:

$$\Phi(\vec{B}) = BS = BNlvt.$$

Per la legge di Faraday-Neumann, il modulo della forza elettromotrice indotta è:

$$f_{em} = \frac{d}{dt}\Phi(\vec{B}) = \frac{d}{dt}(BNlvt) = BNlv.$$

La corrente indotta è

$$i = \frac{f_{em}}{R} = \frac{BNlv}{R}$$

e quindi la potenza dissipata è:

$$P = i^2R = \frac{B^2N^2l^2v^2}{R}.$$

Notiamo che la corrente fluisce in verso orario, per la legge di Lenz, in quanto il campo magnetico è uscente dal piano della figura. La corrente circola fino a quando la bobina non è entrata per intero nella regione con il campo magnetico. A quel punto, il flusso del campo magnetico attraverso la superficie che ha per contorno la bobina diventa costante e la forza elettromotrice indotta scompare. Durante il passaggio della corrente i 3 tratti della bobina immersi nel campo magnetico (parte dei due tratti orizzontali e il tratto verticale destro) subiscono una forza magnetica $\vec{F}_m = i\vec{a}\times\vec{B}$: in questa espressione $\vec{a}$ è un vettore parallelo al filo con verso concorde alla corrente elettrica e il suo modulo a è la lunghezza del tratto in cui $\vec{B}$ non è nullo.
In particolare, la forza magnetica sul tratto destro ha modulo:

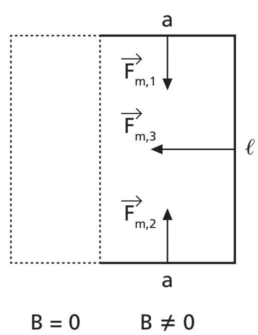


Figura 19

$$F_{m,3} = NilB$$

ed è diretta verso sinistra e quindi il carrello subisce una decelerazione che ne riduce la velocità.

Se la velocità iniziale v è sufficientemente piccola, il carrello può arrestarsi prima di entrare completamente nella regione in cui esiste il campo magnetico.
Se il carrello viene lanciato con velocità $\vec{v}$, la forza magnetica $\vec{F}_{m.3}$ fa rallentare il carrello, quindi la corrente indotta nella bobina non sarà più costante, ma decrescente nel tempo; appena il carrello entra per intero nella regione in cui è presente il campo magnetico, la corrente cessa di esistere. L'energia cinetica persa dal carrellino è uguale, in modulo, all'energia dissipata per effetto Joule dalla bobina.

8 Quando nella bobina non circola corrente, l'ago magnetico è allineato con la componente orizzontale del campo magnetico terrestre, che indichiamo con $\vec{B}_T$. La corrente che circola nella bobina crea invece un campo magnetico $\vec{B}_C$ di modulo

$$B_C = N\frac{\mu_0 i}{2R}$$

e perpendicolare al piano della bobina; l'ago si dispone nella direzione del campo magnetico totale $\vec{B}_{tot}$.

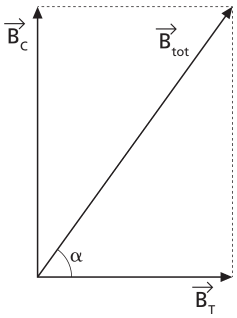


Figura 20

Dalle formule trigonometriche dei triangoli rettangoli otteniamo la relazione:

$$B_T = \frac{B_C}{\tan\alpha} = \frac{N\mu_0 i}{2R\tan\alpha} = \frac{130\cdot(4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2})}{(0{,}30\ \mathrm{m})}\cdot\frac{i}{\tan\alpha}.$$

Dai dati della tabella possiamo calcolare 5 valori per B_T:

α	10°	20°	30°	40°	50°
***i*(mA)**	11,4	23,3	36,8	52,4	73,9
B_T ($\cdot 10^{-5}$ T)	3,52	3,49	3,47	3,40	3,38

I valori sono molto simili tra loro, con dispersione (differenza tra valore massimo e valore minimo) pari a $1{,}44\cdot 10^{-6}$ T. La media dei 5 valori calcolati per la componente orizzontale del campo magnetico terrestre è:

$$B_{T,stima} = \frac{1}{5}[(3{,}52\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}) + (3{,}49\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}) + (3{,}47\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}) +$$
$$(3{,}40\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}) + (3{,}38\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T})] = 3{,}45\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

Dal momento che non abbiamo informazioni sulle incertezze delle misure fatte, usiamo la semidispersione $\delta B_T = 0{,}72\cdot 10^{-7}$ T come misura dell'incertezza: essa equivale a una incertezza percentuale del 2% circa. La stima del valore della componente orizzontale del campo magnetico e della sua incertezza è:

$$B_T = (3{,}45 \pm 0{,}07)\cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$