Liceo scientifico e opzione scienze applicate

Lo studente deve svolgere un solo problema a sua scelta e 5 quesiti a sua scelta.
Durata massima della prova: 6 ore.

PROBLEMA 1: il porta scarpe da viaggio

Un artigiano vuole realizzare contenitori da viaggio per scarpe e ipotizza contenitori con una base piana e un'altezza variabile sagomata che si adatti alla forma della scarpa. L'artigiano procede alla progettazione del profilo e stabilisce che tali contenitori debbano essere a base rettangolare di dimensioni 20 cm per 30 cm e che l'altezza, procedendo in senso longitudinale da 0 a 30 cm, segua l'andamento così descritto: ad un estremo, corrispondente alla punta della scarpa, l'altezza è 4 cm, a 10 cm da questo estremo la sagoma flette e l'altezza raggiunge 8 cm, a 20 cm dall'estremo l'altezza raggiunge 12 cm, mentre all'altro estremo l'altezza è zero. Prima di procedere alla produzione di un prototipo, l'artigiano vuole essere sicuro del suo progetto. Pensa che occorra una competenza in matematica per avere la certezza che il contenitore realizzato in base al profilo da lui progettato possa contenere vari tipi di scarpe. Ti chiede quindi di procedere alla modellizzazione del profilo del prototipo.

1. Scelto un riferimento cartesiano Oxy in cui l'unità di misura corrisponda a un decimetro, individua, tra le seguenti funzioni, quella che possa meglio corrispondere al profilo descritto, e giustifica la risposta:

$$y = e^{ax^2+bx+c} + (x+d)^2 \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

$$y = \frac{\sin^2(ax+b) + \cos^2(ax+b)}{cx+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, x \in [0; 3]$$

2. dopo aver scelto la funzione che meglio rappresenta il profilo determina i valori dei parametri a, b, c, e d in base alle dimensioni definite dall'artigiano;

3. studia la funzione che hai individuato e rappresentala graficamente nel riferimento cartesiano Oxy; verifica se il contenitore possa essere adoperato con una scarpa alta 14 cm.

L'artigiano decide di valutare anche le condizioni di vendita del prodotto. Il costo di produzione è pari a 5 € per ogni contenitore, più un costo fisso mensile di 500 €; in base alla sua conoscenza del mercato, ritiene di poter vendere ciascun contenitore a 15 € e immagina che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo possa crescere indefinitamente;

4. mostra che ciò non è vero e per illustrare all'artigiano il risultato matematico disegna l'andamento del rapporto ricavo/costo al crescere del numero di contenitori prodotti in un mese.

PROBLEMA 2: il ghiaccio

Il tuo liceo, nell'ambito dell'alternanza scuola lavoro, ha organizzato per gli studenti del quinto anno un'attività presso lo stabilimento ICE ON DEMAND sito nella tua regione. All'arrivo siete stati divisi in vari gruppi. Il tuo, dopo aver visitato lo stabilimento e i laboratori, partecipa ad una riunione legata ai processi di produzione. Un cliente ha richiesto una fornitura di blocchi di ghiaccio a forma di prisma retto a base quadrata di volume 10 dm^3, che abbiano il minimo scambio termico con l'ambiente esterno, in modo da resistere più a lungo possibile prima di liquefarsi. Al tuo gruppo viene richiesto di determinare le caratteristiche geometriche dei blocchi da produrre, sapendo che gli scambi termici tra questi e l'ambiente avvengono attraverso la superficie dei blocchi stessi.

1. Studia la funzione che rappresenta la superficie del parallelepipedo in funzione del lato b della base quadrata e rappresentala graficamente;
2. determina il valore di b che consente di minimizzare lo scambio termico e il corrispondente valore dell'altezza h, e commenta il risultato trovato.

Il blocco di ghiaccio al termine del processo produttivo si trova alla temperatura di −18 °C, uniformemente distribuita al suo interno. Esso viene posto su un nastro trasportatore che lo porta a un camion frigorifero, attraversando per due minuti un ambiente che viene mantenuto alla temperatura di 10 °C; esso pertanto tende a riscaldarsi, con velocità progressivamente decrescente, in funzione della differenza di temperatura rispetto all'ambiente;

3. scegli una delle seguenti funzioni per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione (T_a = temperatura ambiente, T_g = temperatura iniziale del ghiaccio, $T(t)$ = temperatura del ghiaccio all'istante t, dove t = tempo trascorso dall'inizio del riscaldamento, in minuti):

$$T(t) = (T_g - T_a)e^{-kt},$$

$$T(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g,$$

$$T(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a,$$

e determina il valore che deve avere il parametro k, che dipende anche dai processi produttivi, perché il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero.

L'azienda solitamente adopera, per contenere l'acqua necessaria a produrre un singolo blocco di ghiaccio, un recipiente avente la forma di un tronco di cono, con raggio della base minore eguale a 1 dm, raggio della base maggiore eguale a 1,5 dm, e altezza eguale a 2 dm;

4. sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%, stabilisci se il suddetto recipiente è in grado di contenere l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto e, in tal caso, a quale altezza dal fondo del recipiente arriverà l'acqua.

QUESTIONARIO

1 Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte?

2 Considerata la parabola di equazione $y = 4 - x^2$ determina le equazioni delle rette tangenti alla parabola nel punto di ascissa 2 e nel suo simmetrico rispetto all'asse di simmetria della parabola.

3 Determinare un'espressione analitica della retta perpendicolare nel punto [1; 1; 1] al piano di equazione $2x - 3y + z = 0$.

4 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - kx + h & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

determinare i parametri h e k in modo che $f(x)$ sia derivabile in tutto l'intervallo [0; 4].

5 Determinare l'equazione dell'asintoto obliquo del grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{2^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

6 Risolvere la seguente equazione:

$$6 \cdot \binom{x}{5} = \binom{x+2}{5}.$$

7 Data la funzione $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$, dopo aver determinato il campo di esistenza, ricerca l'eventuale asintoto verticale.

8 Determina, utilizzando la definizione, la derivata prima della seguente funzione: $y = \sin 2x$ e generalizza il risultato per $y = \sin nx$ con $n \in \mathbb{N}$.

9 Un oggetto viene lanciato verso l'alto; supponendo che $h(t) = 40t - 2t^2$ sia la legge oraria del suo moto espressa in metri, determina la funzione velocità e la quota massima raggiunta dall'oggetto.

10 Analizza il grafico della funzione $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ e studiane i punti di discontinuità.
Dopo aver individuato il tipo di discontinuità scrivi l'espressione della funzione che può essere ottenuta con un prolungamento per continuità.

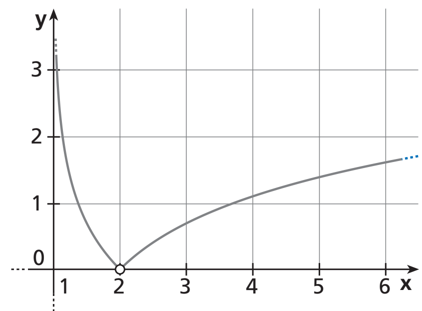


Figura 1

Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1: il porta scarpe da viaggio

1. Consideriamo una funzione $y = f(x)$ definita in un intervallo limitato e chiuso il cui grafico deve rappresentare il profilo progettato dall'artigiano. Una delle condizioni richieste è che tale funzione deve avere uno zero in corrispondenza di $x = 3$. Se consideriamo la funzione $y = e^{ax^2+bx+c} + (x+d)^2$, essa è la somma di una funzione esponenziale (sempre positiva) con il quadrato di un binomio (sempre non negativo), pertanto non può avere uno zero. Ugualmente la funzione $y = \dfrac{\sin^2(ax+b) + \cos^2(ax+b)}{cx+d}$, che per l'identità fondamentale della goniometria può essere riscritta come $y = \dfrac{1}{cx+d}$, è una funzione omografica che non si annulla mai. La funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ è una funzione polinomiale che può annullarsi in $x = 3$ scegliendo opportunamente i parametri. È pertanto l'unica che può soddisfare le condizioni richieste.

2. Tenuto conto che l'unità di misura assunta per la lunghezza è il dm, consideriamo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $x \in [0; 3]$ e imponiamo al corrispondente grafico il passaggio per i punti del profilo $A\left(0; \frac{2}{5}\right)$, $F\left(1; \frac{4}{5}\right)$, $B\left(2; \frac{6}{5}\right)$, $C(3; 0)$:

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ a + b + c + d = \frac{4}{5} \\ 8a + 4b + 2c + d = \frac{6}{5} \\ 27a + 9b + 3c + d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ a + b + c = \frac{2}{5} \\ 4a + 2b + c = \frac{2}{5} \\ 27a + 9b + 3c + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Eq.3} - \text{Eq.2}} \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ 3a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = \frac{2}{5} \\ 27a + 9b + 3c + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ b = -3a \\ 4a - 6a + c = \frac{2}{5} \\ 27a - 27a + 3c + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d = \frac{2}{5} \\ c = -\frac{2}{15} \\ a = -\frac{4}{15} \\ b = \frac{4}{5} \end{cases}$$

L'equazione della funzione diventa quindi:

$$f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} \text{ con } 0 \le x \le 3.$$

3. Studiamo la funzione $f(x) = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5}$ nell'intervallo $x \in [0; 3]$. Trattandosi di una cubica essa è continua e derivabile sul dominio naturale $\mathbb{R}$ e quindi in particolare nell'intervallo.
   - Intersezione con gli assi cartesiani: per le condizioni del profilo vi sono i seguenti punti di intersezione: $\left(0; \frac{2}{5}\right)$, $(3; 0)$. Dato che il profilo rappresenta un contenitore per scarpe, non ci aspettiamo che la funzione abbia altri zeri, né che assuma valori negativi.

Verifichiamo che non vi siano altri punti di intersezione con l'asse delle ascisse risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{4}{15}x^3 + \frac{4}{5}x^2 - \frac{2}{15}x + \frac{2}{5} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6x^2 + x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} (x-3)(2x^2+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Quindi $f(x)$ si annulla solo in $x = 3$.

- Segno della funzione: poiché la funzione è fattorizzabile come $f(x) = -\frac{4}{15}(x-3)(2x^2+1)$, essa è non negativa nell'intervallo $[0; 3]$. In particolare $f(x)$ è positiva nell'intervallo $[0; 3[$, come previsto. Possiamo già dire che il punto $C(3; 0)$ è minimo assoluto.
- Studio della derivata prima ed estremanti: calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno:

$$f'(x) = -\frac{4}{5}x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{2}{15}.$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow -12x^2 + 24x - 2 > 0 \rightarrow 6x^2 - 12x + 1 < 0.$$

Le soluzioni dell'equazione associata sono: $x = \frac{6-\sqrt{30}}{6} \simeq 0{,}09$ e $x = \frac{6+\sqrt{30}}{6} \simeq 1{,}91$.

Pertanto:

per $0 < x < \frac{6-\sqrt{30}}{6} \quad \vee \quad \frac{6+\sqrt{30}}{6} < x < 3$, $f'(x) < 0$ e la funzione è decrescente;

per $\frac{6-\sqrt{30}}{6} < x < \frac{6+\sqrt{30}}{6}$, $f'(x) > 0$ e la funzione è crescente;

per $x = \frac{6-\sqrt{30}}{6}$ la funzione ha un minimo relativo, per $x = \frac{6+\sqrt{30}}{6}$ ha un massimo relativo, di coordinate rispettivamente $N\left(\frac{6-\sqrt{30}}{6}; \frac{4}{5} - \frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$ e $M\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}; \frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30}\right)$.

Confrontiamo $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right)$ con $f(0)$: $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right) = \frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30} \simeq 1{,}21$ mentre $f(0) = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Poiché $f\left(\frac{6+\sqrt{30}}{6}\right) > f(0)$, il massimo relativo M è anche massimo assoluto.

Nella figura 2 è riportato il quadro dei segni della derivata prima.

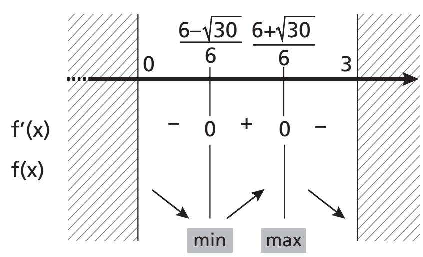


Figura 2

- Studio della derivata seconda, del suo segno ed eventuali flessi:

$$f''(x) = -\frac{8}{5}x + \frac{8}{5} = -\frac{8}{5}(x-1),$$

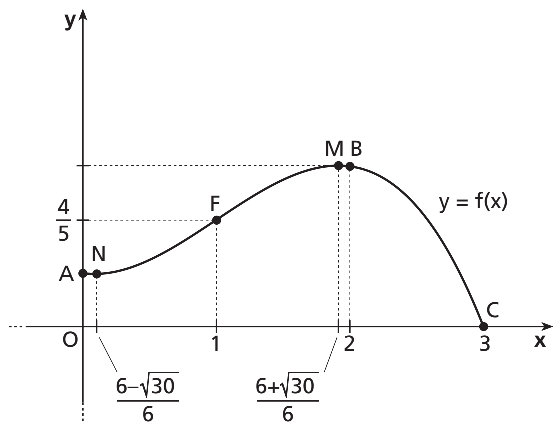
$f''(x) > 0$ se $x < 1$: il grafico ha la concavità rivolta verso l'alto per $0 < x < 1$;

$f''(x) > 0$ se $x > 1$: il grafico ha la concavità rivolta verso il basso per $1 < x < 3$;

$f''(x) = 0$ se $x = 1$: il grafico ha un flesso F di coordinate $\left(1; \frac{4}{5}\right)$ come richiesto dalla descrizione del profilo.

In figura 3 è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$ sul dominio $[0; 3]$.

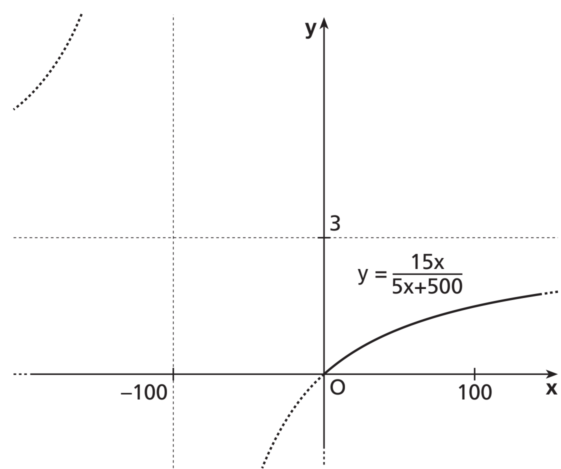
Il massimo M del grafico ha ordinata $y_M = \frac{4}{5} + \frac{2}{27}\sqrt{30} \simeq 1,2$ dm, pertanto il contenitore non potrà essere adoperato per una scarpa alta 14 cm.



■ **Figura 3**

4. Assunto come x il numero discreto dei contenitori prodotti e venduti in un mese e tenuto conto del costo di produzione di 5 € per ogni contenitore e di un costo fisso mensile di 500 €, il costo di produzione totale mensile è $5x + 500$ euro. Ritenendo poi di poter vendere ciascun oggetto a 15 €, il ricavo mensile risulta $15x$ euro. Il rapporto ricavo/costo è allora rappresentato dalla funzione a variabile discreta non negativa $f(x) = \frac{15x}{5x + 500}$ con $x \in \mathbb{N}$. I punti discreti del corrispondente grafico appartengono a una funzione omografica a variabile continua di centro di simmetria $(-100; 3)$, con asintoti $x = -100$ e $y = 3$ e passante per l'origine degli assi. Rappresentiamo in figura 4 tramite un sistema cartesiano dimetrico il corrispondente grafico.

Osserviamo che aumentando sempre più il numero di contenitori prodotti in un mese il rapporto ricavo/costo tende a stabilizzarsi a un valore pari a 3 e non cresce indefinitamente all'aumentare dei contenitori prodotti, come invece previsto dall'artigiano. Ciò significa che il ricavo tende a diventare il triplo della spesa pur rimanendone inferiore.



■ **Figura 4**

PROBLEMA 2: il ghiaccio

1. Consideriamo un parallelepipedo a base quadrata di lato b e volume 10 dm^3. Indicata con h l'altezza del solido, esplicitiamola in funzione di b, tenendo conto della formula del volume del parallelepipedo, $V = b^2 \cdot h$:

$$h(b) = \frac{10}{b^2}.$$

Calcoliamo la superficie totale S del parallelepipedo in funzione del lato b:

$$S = 4b \cdot h + 2b^2 \rightarrow S(b) = 4b \cdot \frac{10}{b^2} + 2b^2 \quad \rightarrow \quad S(b) = 2b^2 + \frac{40}{b}, \quad \text{con } b > 0.$$

Studiamo tale funzione.

- Dominio: $b > 0$, per limiti geometrici; in tale intervallo la funzione è continua e derivabile e non è né pari né dispari.
- Intersezione con gli assi cartesiani: poiché $b > 0$ e $S(b) > 0$ perché somma di due addendi sempre positivi, il grafico della funzione non interseca gli assi.

- Segno della funzione: nel dominio la funzione è positiva perché somma di quantità positive.
- Ricerca degli asintoti: valutiamo i limiti agli estremi del dominio.

$$\lim_{b \to 0^+}\left(2b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty \qquad \to \quad \text{la retta } b = 0 \text{ è asintoto verticale nell'intorno destro di } b = 0;$$

$$\lim_{b \to +\infty}\left(2b^2 + \frac{40}{b}\right) = +\infty \qquad \to \quad \text{non esistono asintoti orizzontali;}$$

$$\lim_{b \to +\infty}\frac{2b^2 + \frac{40}{b}}{b} = \lim_{b \to +\infty}\frac{2b^3 + 40}{b^2} = +\infty \qquad \to \quad \text{non esistono asintoti obliqui.}$$

- Studio della derivata prima ed estremanti: calcoliamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno:

$$S'(b) = 4b - \frac{40}{b^2} = \frac{4(b^3 - 10)}{b^2}, \quad S'(b) > 0 \;\to\; b > \sqrt[3]{10}.$$

Pertanto:

– per $0 < b < \sqrt[3]{10}$, $S'(b) < 0$ e la funzione è decrescente;

– per $b > \sqrt[3]{10}$, $S'(b) > 0$ e la funzione è crescente;

– per $b = \sqrt[3]{10} \simeq 2{,}2$ la funzione ha un minimo relativo di ordinata $S(\sqrt[3]{10}) = 2(\sqrt[3]{10})^2 + \frac{40}{\sqrt[3]{10}} =$ $= \frac{60}{\sqrt[3]{10}} \simeq 27{,}8$. Il grafico ha quindi un minimo relativo di coordinate $M\left(\sqrt[3]{10}; \frac{60}{\sqrt[3]{10}}\right)$ che è anche minimo assoluto.

- Studio della derivata seconda, del suo segno ed eventuali flessi:

$$S''(b) = 4 + \frac{80}{b^3},$$

essendo $S''(b) > 0$ in tutto il dominio, il grafico ha sempre concavità rivolta verso l'alto.
In figura 5 è rappresentato il grafico della funzione $S(b)$ nel riferimento cartesiano ObS.

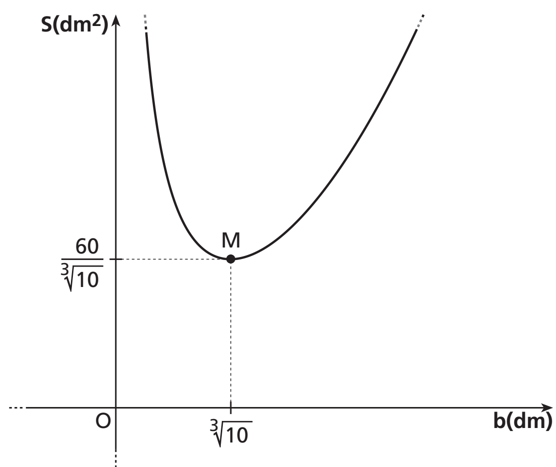


Figura 5

2. Assumiamo che il minimo scambio termico con l'esterno avvenga quando è minima la superficie del parallelepipedo di ghiaccio. Pertanto il valore di b che minimizza la funzione S, trovato al punto 1, è $b = \sqrt[3]{10}$. La corrispondente altezza risulta:

$$h(\sqrt[3]{10}) = \frac{10}{(\sqrt[3]{10})^2} = \sqrt[3]{10}.$$

Il parallelepipedo così ottenuto è un cubo di volume 10 dm^3 e di spigolo $\sqrt[3]{10}$ dm.

3. Il processo di riscaldamento, subito da un blocco di ghiaccio a temperatura iniziale $T_g = -18$ °C a contatto con l'ambiente circostante, che si trova a $T_a = 10$ °C, è regolato dalla legge fondamentale della calorimetria fino a quando la temperatura del blocco non raggiunge la temperatura di fusione di 0 °C. Assumiamo che tale temperatura nel tempo t di trasporto non venga mai raggiunta. Quindi deve essere $T \leq 0$.

Riscriviamo le funzioni proposte per modellizzare il processo di riscaldamento prima della liquefazione, sostituendo i valori numerici $T_g = -18$ °C e $Ta = 10$ °C:

$$T_1(t) = (T_g - T_a)e^{-kt} \quad \rightarrow \quad T_1(t) = -28e^{-kt},$$

$$T_2(t) = (T_a - T_g)(1 - e^{-kt}) + T_g \quad \rightarrow \quad T_2(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18 = 10 - 28e^{-kt},$$

$$T_3(t) = (T_a - T_g)e^{-kt} - T_a \quad \rightarrow \quad T_3(t) = 28e^{-kt} - 10.$$

La condizione iniziale che la funzione deve soddisfare è che all'istante $t = 0$ deve essere:

$$T(0) = -18.$$

Calcoliamo l'immagine per $t = 0$ delle tre funzioni:

$$T_1(0) = -28 \neq -18,$$

$$T_2(0) = -18$$

$$T_3(0) = 18 \neq -18.$$

Se ne conclude che solo la funzione $T_2(t) = 28(1 - e^{-kt}) - 18$ soddisfa la condizione iniziale.
Indichiamola genericamente come $T(t) = 10 - 28e^{-kt}$.
Stabiliamo ora le altre condizioni richieste: la funzione temperatura deve essere crescente, con velocità però decrescente nel tempo.
Calcoliamo per questo le funzioni derivata prima e derivata seconda della funzione T e imponiamo le corrispondenti condizioni $T'(t) > 0$ e $T''(t) < 0$:

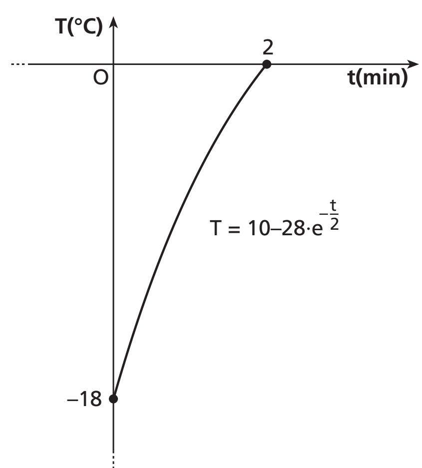
$$T'(t) = 28ke^{-kt}, \quad T'(t) > 0 \quad \rightarrow \quad k > 0,$$

$$T''(t) = -28k^2e^{-kt}, \quad T''(t) < 0 \quad \rightarrow \quad \text{qualsiasi } k.$$

Osserviamo anche che $\lim_{t \to +\infty} T(t) = \lim_{t \to +\infty} (10 - 28e^{-kt}) = 10$,
che corrisponde al valore asintotico della temperatura ambiente ed è indipendente dal valore di k.
Richiediamo per ultimo che il blocco di ghiaccio non inizi a fondere durante il percorso verso il camion frigorifero, stabilendo che la funzione T abbia dominio fisico $[0; 2 \text{ min}]$ e codominio $[-18 \text{ °C}; 0 \text{ °C}]$. Per questo imponiamo la condizione $T(2 \text{ min}) \leq 0$:

$$T(2) = 10 - 28e^{-2k} \leq 0 \quad \rightarrow \quad e^{-2k} \geq \frac{5}{14} \quad \rightarrow$$

$$2k \leq \ln\frac{14}{5} \quad \rightarrow \quad k \leq \ln\sqrt{\frac{14}{5}} \simeq 0{,}51.$$



■ Figura 6

Si conclude che deve essere $0 < k \leq \ln\sqrt{\frac{14}{5}}$.

In figura 6 è rappresentato il grafico della funzione $T(t) = 10 - 28e^{-kt}$ nel proprio dominio e codominio fisico per $k = \frac{1}{2}$.

4. Consideriamo il contenitore a tronco di cono di raggio di base minore uguale a $r = 1$ dm, raggio di base maggiore uguale $R = 1{,}5$ dm e altezza $h = 2$ dm. Il suo volume è:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR) = \frac{1}{3}\pi \cdot 2 \cdot (1^2 + 1{,}5^2 + 1 \cdot 1{,}5) = 9{,}948\ldots \simeq 9{,}95 \text{ dm}^3.$$

Calcoliamo il volume di acqua V_a necessaria a produrre un volume $V_g = 10$ dm^3 di ghiaccio sapendo che nel passaggio da acqua a ghiaccio il volume aumenta del 9,05%:

$$10 = V_a + 9{,}05\% \cdot V_a \quad \rightarrow \quad V_a = \frac{10}{1 + 0{,}0905} = \frac{20\,000}{2181} = 9{,}170\ldots \simeq 9{,}17 \text{ dm}^3.$$

Poiché $V_a < V$, il recipiente è in grado di contenere l'acqua per produrre il blocco di ghiaccio.
Immaginiamo ora di versare il volume V_a di acqua nel contenitore di volume V; indichiamo con r_a il raggio della superficie libera dell'acqua e con x l'altezza dal fondo del recipiente raggiunta dal liquido, con $0 < x < 2$ (si veda la figura 7 in semisezione).

Consideriamo la similitudine dei triangoli EDC e ABC:

$$ED : AB = DC : BC \quad \rightarrow \quad (R - r_a) : (R - r) = (h - x) : h \quad \rightarrow$$

$$(1{,}5 - r_a) : (1{,}5 - 1) = (2 - x) : 2 \quad \rightarrow \quad 1{,}5 - r_a = \frac{2 - x}{4} \quad \rightarrow$$

$$r_a = \frac{4 + x}{4} = 1 + \frac{x}{4}.$$

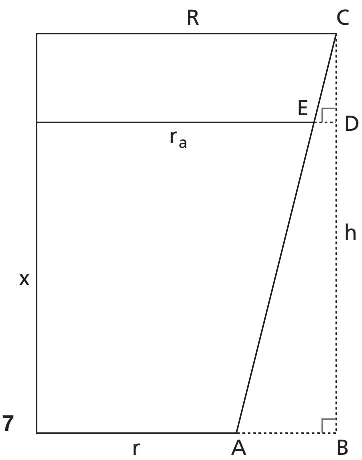


Figura 7

Calcoliamo il volume del tronco di cono di altezza x e imponiamolo uguale al valore $V_a = \dfrac{20\,000}{2181}$:

$$\frac{1}{3}\pi x(r^2 + r_a^2 + r r_a) = \frac{20\,000}{2181} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3}\pi x\left(1 + 1 + \frac{x^2}{16} + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4}\right) = \frac{20\,000}{2181} \quad \rightarrow$$

$$x^3 + 12x^2 + 48x = \frac{16 \cdot 20\,000}{727\pi}.$$

Risolviamo l'equazione con un completamento del cubo:

$$(x + 4)^3 - 64 = \frac{16 \cdot 20\,000}{727\pi} \rightarrow (x + 4)^3 = \frac{16 \cdot 20\,000}{727\pi} + 64 \rightarrow x + 4 = \sqrt[3]{\frac{320\,000 + 46\,528\pi}{727\pi}} \rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{320\,000 + 46\,528\pi}{727\pi}} - 4 = 1{,}88781\ldots \simeq 1{,}89 \text{ dm}.$$

Si conclude che l'altezza dal fondo del recipiente a cui arriva l'acqua necessaria a produrre il blocco richiesto è circa 1,89 dm.
In alternativa si può trovare tale altezza considerando il cono di vertice V e raggio di base R, generatore del tronco di cono del recipiente (figura 8).

Ricaviamo VO per similitudine dei triangoli VOA e $VO''C$:

$$VO'' : VO = O''C : OA \quad \rightarrow \quad VO'' : VO = R : r.C$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(VO'' - VO) \colon VO = (R - r) \colon r \;\rightarrow\; h \colon VO = (R - r) \colon r \;\rightarrow$$

$$VO = \frac{hr}{(R - r)} \;\rightarrow\; VO = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ dm}.$$

Calcoliamo il volume V_r del cono di raggio di base OA e altezza VO:

$$V_r = \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{OA}^2 \cdot \overline{VO} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 4 = \frac{4}{3}\pi \text{ dm}^3.$$

Determiniamo il volume V_{r_a} del cono di raggio di base $O'E$ e altezza VO' come somma tra V_r e V_a:

$$V_{r_a} = V_r + V_a = \frac{4}{3}\pi + \frac{20\,000}{2181}.$$

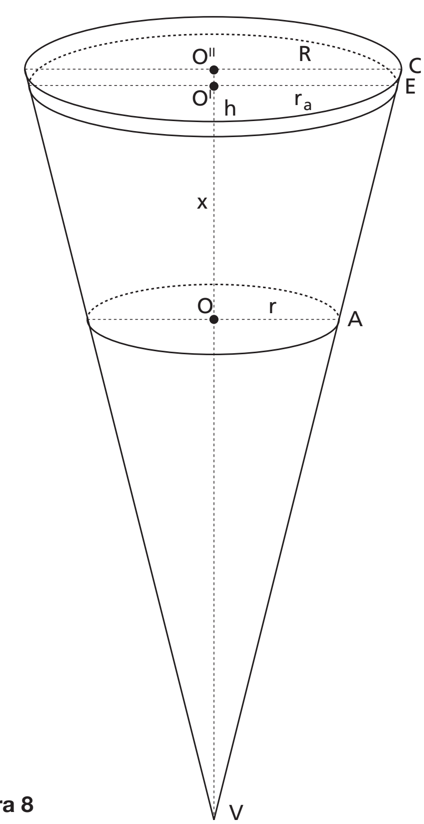


Figura 8

Applichiamo il teorema che stabilisce la proporzione tra volumi di coni simili e i cubi delle corrispondenti altezze:

$$V_{r_a} : V_r = \overline{O'V}^{\,3} : \overline{OV}^{\,3} \quad \to \quad \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{20000}{2181}\right) : \frac{4}{3}\pi = (x+4)^3 : 64 \quad \to$$

$$(x+4)^3 = \frac{64\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{20000}{2181}\right)}{\frac{4}{3}\pi} \quad \to \quad (x+4)^3 = 64 + \frac{16 \cdot 20000}{727\pi} \quad \to$$

$$x + 4 = \sqrt[3]{\frac{46528\pi + 320000}{727\pi}} \quad \to \quad x = \sqrt[3]{\frac{46528\pi + 320000}{727\pi}} - 4 =$$

$$1{,}88781\ldots \simeq 1{,}89 \text{ dm}.$$

QUESTIONARIO

1 Consideriamo l'evento E = «lanciando una coppia di dadi si ottiene un punteggio totale maggiore di sette». Tale evento si verifica quando l'esito del lancio è una delle seguenti combinazioni di numeri:

somma delle facce = 8:	(2, 6), (3, 5), (6, 2), (5, 3), (4, 4),
somma delle facce = 9:	(3, 6), (4, 5), (6, 3), (5, 4),
somma delle facce = 10:	(4, 6), (6, 4), (5, 5),
somma delle facce = 11:	(5, 6), (6, 5),
somma delle facce = 12:	(6, 6).

Pertanto i casi favorevoli sono 15.
I casi possibili sono 36, cioè tutte le disposizioni con ripetizione di 6 numeri in gruppi di 2. La probabilità dell'evento E è quindi:

$$p(E) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{15}{D'_{6,2}} = \frac{15}{6^2} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Consideriamo ora il lancio dei due dadi per cinque volte. L'evento E può verificarsi da 0 a 5 volte. Si tratta di una distribuzione binomiale (o di Bernoulli) in cui la probabilità che su n prove indipendenti un evento abbia k successi è:

$$p_{(k)} = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \text{ con } q = 1 - p \text{ e } 0 \le k \le n.$$

Nel nostro caso $n = 5$, $p = \frac{5}{12}$, $q = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$, e sostituendo otteniamo:

$$p_k = \binom{5}{k}\left(\frac{5}{12}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{5-k}.$$

La probabilità che su 5 prove, l'evento E si verifichi almeno due volte si può calcolare come:

$$p = 1 - p_{(0)} - p_{(1)}.$$

$$p_{(0)} = \binom{5}{0}\left(\frac{5}{12}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{16807}{248832} = \frac{16807}{248832}.$$

$$p_{(1)} = \binom{5}{1}\left(\frac{5}{12}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^4 = 5 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{2401}{20736} = \frac{60025}{248832}.$$

Quindi la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte è:

$$1 - p_{(0)} - p_{(1)} = 1 - \frac{16807}{248832} - \frac{60025}{248832} = \frac{17200}{248832} = \frac{5375}{7776} \simeq 0{,}691.$$

2 La parabola $y = 4 - x^2$ ha vertice $V(0; 4)$ e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate, pertanto il punto di ascissa 2 che indichiamo con A e il suo simmetrico A' hanno coordinate $A(2; 0)$ e $A'(-2; 0)$. Sfruttando il significato geometrico di coefficiente angolare di una retta calcoliamo la funzione derivata nei punti $x = 2$ e $x = -2$:

$$y' = -2x \quad \to \quad y'(2) = -4,\ y'(-2) = 4.$$

Le equazioni delle rette tangenti rispettivamente nei punti A e A' sono quindi:

$$t_A: \quad y - 0 = -4(x-2) \quad \to \quad y = -4x + 8.$$
$$t_{A'}: \quad y - 0 = 4(x+2) \quad \to \quad y = 4x + 8.$$

Osserviamo che, essendo la parabola e i punti A e A' simmetrici rispetto all'asse delle y, anche le rette tangenti in tali punti sono simmetriche rispetto a tale asse. Le equazioni della simmetria rispetto all'asse y sono:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Quindi avremmo potuto ricavare l'equazione della tangente $t_{A'}$ dall'equazione di t_A.
Verifichiamolo:

$$t_A: y = -4x + 8 \quad \to \quad y' = +4x' + 8 \qquad \text{che corrisponde all'equazione della retta } t_{A'}.$$

Le equazioni delle rette tangenti nei due punti appartenenti alla parabola possono essere ricavate anche con la formula dello sdoppiamento:

$$\frac{y + y_0}{2} = axx_0 + b\frac{x + x_0}{2} + c,$$

dove a, b, c sono i coefficienti della parabola e $(x_0; y_0)$ è un punto della parabola.
Per $A(2; 0)$ e $A'(-2; 0)$ e $y = 4 - x^2$ risulta:

$$t_A: \frac{y+0}{2} = -2x + 0 \cdot \frac{x+2}{2} + 4 \quad \to \quad y = -4x + 8,$$

$$t_{A'}: \frac{y+0}{2} = +2x + 0 \cdot \frac{x-2}{2} + 4 \quad \to \quad y = 4x + 8.$$

3 Dato un piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$, il vettore $(a; b; c)$ è la direzione perpendicolare al piano, quindi una retta perpendicolare al piano ha gli stessi coefficienti direttivi del piano. Le equazioni parametriche di una retta passante per $P\ (x_P; y_P; z_P)$ e perpendicolare al piano $ax + by + cz + d = 0$ sono quindi:

$$\begin{cases} x = x_P + at \\ y = y_P + bt \\ z = z_P + ct \end{cases}.$$

Nel nostro caso, il piano ha equazione $2x - 3y + z = 0$, con $a = 2$, $b = -3$ e $c = 1$, P ha coordinate $(1; 1; 1)$. Le equazioni parametriche della retta cercata sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} t = \dfrac{x-1}{2} \\ y = 1 - 3 \cdot \dfrac{x-1}{2} \\ z = 1 + \dfrac{x-1}{2} \end{cases}.$$

Un'equazione analitica della retta è allora:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

4 Consideriamo la funzione a tratti:

$$f(x)=\begin{cases} x^3 & 0 \le x \le 2 \\ x^2-kx+h & 2 < x \le 4 \end{cases}.$$

Le funzioni componenti sono polinomiali. Pertanto la funzione $f(x)$ è continua e derivabile nei punti interni dei due intervalli $[0;2]$ e $]2;4]$ su cui è definita, è continua e derivabile a destra nell'estremo $x=0$ ed è continua e derivabile a sinistra nell'estremo $x=4$. L'unico punto da considerare è quindi $x=2$.
Imponiamo la condizione di continuità nel punto $x=2$ in cui si ha $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)=8$:

$$\lim_{x\to 2^+}(x^2-kx+h)=8 \to 4-2k+h=8.$$

Calcoliamo la derivata sinistra e destra in $x=2$.

$$f'_-(x)=3x^2 \;\to\; f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}3x^2=12;$$

$$f'_+(x)=2x-k \;\to\; f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}(2x-k)=4-k.$$

Imponiamo la condizione di derivabilità nel punto $x=2$:

$$12=4-k \;\to\; k=-8.$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} 4-2k+h=8 \\ k=-8 \end{cases} \to \begin{cases} h=-12 \\ k=-8 \end{cases}.$$

La funzione è quindi derivabile in tutto l'intervallo $[0;4]$ per $h=-12$ e $k=-8$.

5 La funzione $f(x)=\dfrac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ ha dominio $\mathbb{R}-\{0\}$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}=+\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}=-\infty.$$

Pertanto la funzione può ammettere asintoto obliquo.

Calcoliamo, se esistono finiti, i limiti $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ e $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)$

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2},$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{2^{\frac{1}{x}}+1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x\left(\frac{2}{2^{\frac{1}{x}}+1}-1\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x\left(\frac{2-2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}\right)=$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}+1}\cdot\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=-\frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}.$$

Poniamo $t=\dfrac{1}{x}$, allora $t\to 0$ per $x\to\pm\infty$ e il limite diventa:

$$q=-\frac{1}{4}\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=-\frac{1}{4}\ln 2,$$

utilizzando il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.
Esiste pertanto l'asintoto obliquo di equazione:

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln 2.$$

6 Data l'equazione $6\cdot\binom{x}{5}=\binom{x+2}{5}$, le condizioni di esistenza con $x\in\mathbb{N}$ per i coefficienti binomiali sono:

$$\begin{cases}x\geq 5\\ x+2\geq 5\end{cases}\quad\to\quad x\geq 5.$$

Sviluppando i coefficienti binomiali l'equazione diventa:

$$6\cdot\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!}=\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!}$$

$$x(x-1)(x-2)[6(x-3)(x-4)-(x+2)(x+1)]=0$$

Per la legge dell'annullamento del prodotto risulta:

$x=0$, $x=1$, $x=2$ non accettabili per le condizioni di esistenza,

$$6(x-3)(x-4)-(x+2)(x+1)=0\quad\to\quad 5x^2-45x+70=0\quad\to$$

$$x^2-9x+14=0\quad\to\quad x=\frac{9\pm 5}{2}\quad\to\quad x=7\ \text{(accettabile)}\ \vee x=2,\ \text{(non accettabile)}.$$

La soluzione dell'equazione è quindi $x=7$.

7 La funzione $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2$ è definita per $x>0$. Potrebbe ammettere asintoto verticale nell'intorno destro di 0. Valutiamo pertanto il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}x^2\ln x=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Applichiamo, quindi, il teorema di De l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=0.$$

Allora la funzione non ha asintoto verticale.

8 Data una funzione $f(x)$, per definizione la derivata prima della funzione nel punto x è il limite del rapporto incrementale:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Calcoliamo tale limite per la funzione $f(x)=\sin 2x$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin 2(x+h)-\sin 2x}{h}.$$

Applichiamo al numeratore la formula di prostaferesi: $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin h\cos(2x+h)}{h}=2\lim_{h\to 0}\cdot\frac{\sin h}{h}\cdot\cos(2x+h)=2\cos 2x.$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$.

Pertanto la derivata di $y=\sin 2x$ è $y'=2\cos 2x$.

Generalizziamo considerando $y=\sin nx$ con $n\in\mathbb{N}$:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin n(x+h)-\sin nx}{h}.$$

Applichiamo la formula di prostaferesi applicata al numeratore:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2\sin\frac{nh}{2}\cos\left(nx + \frac{nh}{2}\right)}{h} = n \lim_{h \to 0} \cdot \frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}} \cdot \cos\left(nx + \frac{nh}{2}\right) = n\cos nx.$$

Osserviamo che nell'ultimo passaggio abbiamo usato il limite notevole $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$, posto $t = \frac{nh}{2}$.
Allora la derivata di $y = \sin nx$ è $y' = n\cos nx$.

9 L'oggetto lanciato verso l'alto con traiettoria rettilinea ha equazione oraria $h(t) = 40t - 2t^2$. Poiché non è specificata l'unità del tempo la indicheremo con u. Pertanto il coefficiente 40 ha unità m/u, mentre -2 ha unità m/u^2.
La velocità si ottiene come derivata prima della posizione h in funzione del tempo t:

$$v(t) = h'(t) = 40 - 4t.$$

Il moto è rettilineo uniformemente decelerato con velocità iniziale 40 m/u e decelerazione -4 m/u^2.
Il corpo raggiunge la quota massima nell'istante in cui la velocità si annulla, ossia quando è verificata l'equazione:

$$0 = 40 - 4t \quad \to \quad t = 10 \text{ u}.$$

Sostituiamo tale valore all'equazione oraria:

$$h_{\text{MAX}} = h(10) = 40 \cdot 10 - 2(10)^2 = 200 \text{ m}.$$

La quota massima raggiunta dall'oggetto è 200 m.
In alternativa si può determinare la quota massima raggiunta dal corpo calcolando il valore massimo della funzione $h(t)$, che, in un diagramma cartesiano t-h, ha come grafico una parabola con concavità rivolta verso il basso. Il valore massimo corrisponde all'ordinata del suo vertice V:

$$t_V = 10 \to h(10) = 40 \cdot 10 - 2(10)^2 = 200 \text{ m}.$$

10 La funzione $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2} \cdot \ln(x-1)$ è definita per $1 < x < 2 \lor x > 2$ e può essere riscritta come funzione a tratti:

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(x-1) & 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & x > 2 \end{cases}.$$

La funzione $f(x)$ è continua nei punti interni degli intervalli su cui è definita.
Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [-\ln(x-1)] = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} [-\ln(x-1)] = 0,$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \ln(x-1) = 0,$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(x-1) = +\infty.$$

Il grafico corrispondente alla funzione ha asintoto verticale $x = 1$; ha pertanto in tale punto una discontinuità di seconda specie.
Diversamente, nel punto $x = 2$ limite destro e limite sinistro sono entrambi finiti e coincidenti tra loro. Quindi il grafico ha una discontinuità di terza specie eliminabile attraverso il seguente prolungamento continuo di f:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 1 < x < 2 \lor x > 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}.$$