PROVA D'ESAME • SESSIONE ORDINARIA 2015

Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

PROBLEMA 1

La funzione derivabile $y = f(x)$ ha, per $x \in [-3; 3]$, il grafico Γ, disegnato in figura. Γ presenta tangenti orizzontali per $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Le aree delle regioni A, B, C e D sono rispettivamente 2, 3, 3 e 1. Sia $g(x)$ una primitiva di $f(x)$ tale che $g(3) = -5$.

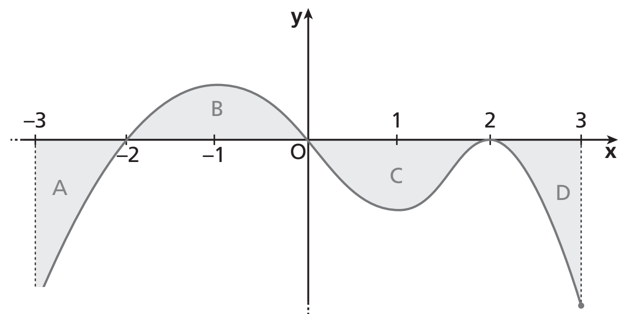


Figura 1

1. Nel caso $f(x)$ fosse esprimibile con un polinomio, quale potrebbe essere il suo grado minimo? Illustra il ragionamento seguito.
2. Individua i valori di $x \in [-3; 3]$ per cui $g(x)$ ha un massimo relativo e determina i valori di x per i quali $g(x)$ volge la concavità verso l'alto.
3. Calcola $g(0)$ e, se esiste, il $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + g(x)}{2x}$.
4. Sia $h(x) = 3 \cdot f(2x + 1)$, determina il valore di $\int_{-2}^{1} h(x)dx$.

PROBLEMA 2

Assegnate le funzioni reali $f(x) = \ln(x)$ e $g(x) = e^{x-2}$, e indicati con F e G i loro grafici in un riferimento cartesiano Oxy:

1. stabilisci dominio e codominio delle funzioni f e g, e traccia quindi i grafici relativi alle funzioni $a(x) = f(g(x))$ e $b(x) = g(f(x))$;
2. determina l'equazione della retta r, tangente a F nel suo punto di ascissa e^2. Stabilisci inoltre se esiste una retta s, parallela a r, che sia tangente a G;
3. determina l'equazione della retta t, parallela alla bisettrice del primo quadrante, che sia tangente a F. Dimostra che t risulta essere tangente anche a G;
4. detta A la regione piana finita delimitata dall'asse y, dalla retta di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G, calcola l'area di A e il volume del solido generato ruotando A intorno all'asse y.

QUESTIONARIO

1 Determinare l'espressione analitica della funzione $y = f(x)$ sapendo che la retta $y = -2x + 5$ è tangente al grafico di f nel secondo quadrante e che $f'(x) = -2x^2 + 6$.

2 Dimostrare che il volume del tronco di cono è espresso dalla formula,

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + r^2 + R \cdot r),$$

dove R ed r sono i raggi e h l'altezza.

3 Risolvere l'equazione: $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.

4 Un solido ha per base la regione R del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $y = \frac{1}{x^2+1}$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0; 3]$. Per ogni punto P di R, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $3x$. Calcolare il volume del solido.

5 Calcolare $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})$.

6 Sia f la funzione, definita per tutti gli x reali, da

$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + (x-4)^2 + (x-5)^2,$$

determinare il minimo di f.

7 Detta $A(n)$ l'area del poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio C di raggio r, verificare che $A(n) = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ e calcolarne il limite per $n \to \infty$.

8 I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo?

9 Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - kx + k & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

determinare il parametro k in modo che nell'intervallo $[0; 2]$ sia applicabile il teorema di Lagrange e trovare il punto di cui la tesi del teorema assicura l'esistenza.

10 Il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}\,(x \in \mathbb{R}, x \geq 0)$ divide in due porzioni il rettangolo $ABCD$ avente i vertici $A(1; 0)$, $B(4; 0)$, $C(4; 2)$ e $D(1; 2)$. Calcolare il rapporto tra le aree delle due porzioni.

Liceo scientifico comunicazione opzione sportiva

PROBLEMA 1

Vedi lo svolgimento del problema 2 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico – Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = \ln x$ ha dominio $]0; +\infty[$ e codominio $\mathbb{R}$.
La funzione $g(x) = e^{x-2}$ ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $]0; +\infty[$.
Il codominio di $g(x)$ è contenuto in quello di $f(x)$ e quindi è possibile la composizione:

$$a(x) = f(g(x)) = \ln e^{x-2} = x - 2,$$

che ha dominio $\mathbb{R}$ e codominio $\mathbb{R}$.
Anche il codominio di $f(x)$ è contenuto in quello di $g(x)$, quindi è possibile la composizione:

$$b(x) = g(f(x)) = e^{\ln x - 2} = \frac{e^{\ln x}}{e^2} = \frac{x}{e^2},$$

che consideriamo con dominio $]0; +\infty[$, quello di $f(x)$, anche se il suo dominio naturale è $\mathbb{R}$, e che ha codominio $]0; +\infty[$.
Disegniamo i grafici delle quattro funzioni $f(x)$, $g(x)$, $a(x)$, $b(x)$.

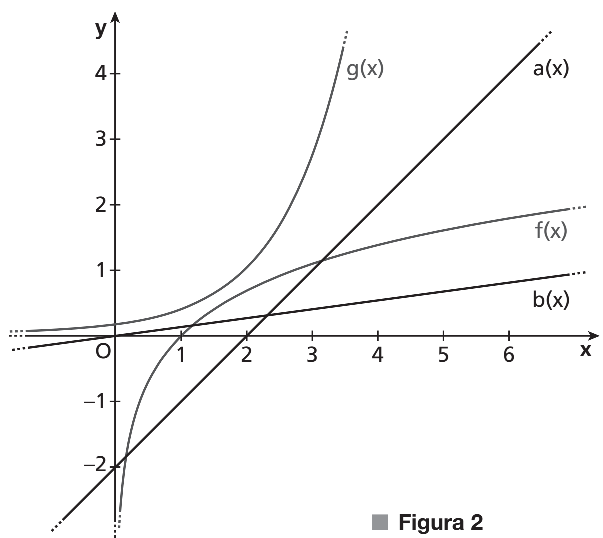


Figura 2

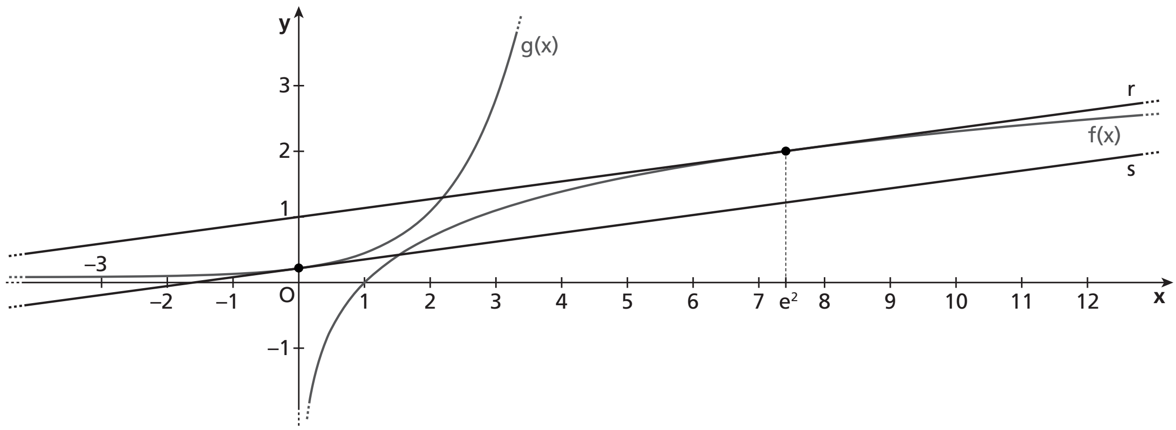
2. Determiniamo l'equazione della retta r tangente al grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa e^2:

$$r: y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2) \quad \to \quad r: y = \frac{1}{e^2}(x - e^2) + 2 \quad \to \quad r: y = \frac{x}{e^2} + 1.$$

Le rette parallele a r hanno equazione: $y = \frac{1}{e^2}x + q$.
Una di queste risulta tangente a G se esiste un punto x_0 tale che $g'(x_0) = \frac{1}{e^2}$. Poiché $g'(x) = e^{x-2}$ assume tutti i valori in $]0; +\infty[$, esisterà sicuramente un x_0 tale che $g'(x_0) = \frac{1}{e^2}$, quindi la retta s parallela a r e tangente a G esiste.
Anche se non richiesto, determiniamo l'equazione di tale retta r:

$$g'(x) = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad e^{x-2} = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \quad \to \quad x_0 = 0,$$

$$s: y = g'(0)(x - 0) + g(0) \quad \to \quad s: y = \frac{1}{e^2}x + \frac{1}{e^2}.$$



■ **Figura 3**

3. Le rette parallele alla bisettrice del primo quadrante hanno equazione del tipo $y = x + q$, e hanno quindi coefficiente angolare 1.
Cerchiamo il punto del grafico F che ha retta tangente con coefficiente angolare 1:

$$f'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x} = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

La retta t parallela alla bisettrice del primo quadrante e tangente a F ha dunque equazione:

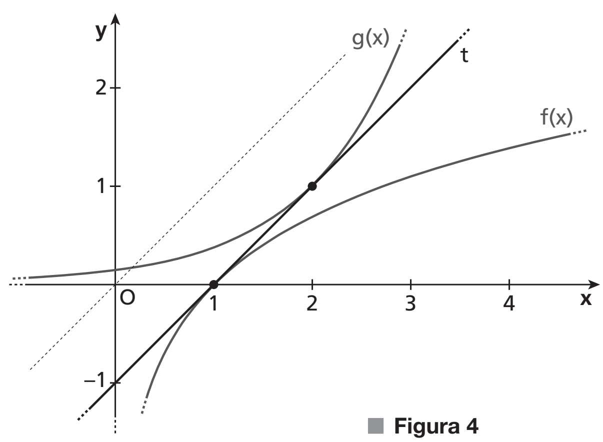
$$t\colon y = f'(1)(x-1) + f(1) \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{1}(x-1) + 0 \quad \rightarrow \quad y = x - 1.$$

Per verificare che t è tangente anche a G, individuiamo il punto di G nel quale la retta tangente ha coefficiente angolare 1 e mostriamo che t passa anche per tale punto di G.

$$g'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad e^{x-2} = 1 \quad \rightarrow$$

$$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2.$$

Il punto $(2; g(2)) = (2; 1)$ di G appartiene alla retta t, che risulta quindi tangente anche a G.

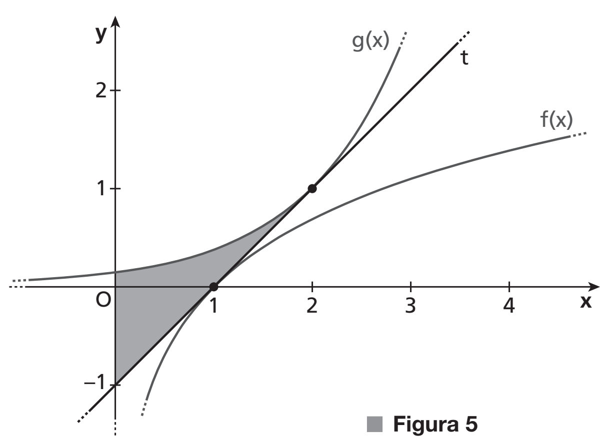


■ **Figura 4**

4. La regione delimitata dall'asse y, dalla retta t di equazione $y = x - 1$ e dal grafico G è evidenziata in figura.
Calcoliamo la sua area A mediante l'integrale:

$$A = \int_0^2 (e^{x-2} - x + 1)dx = \left[e^{x-2} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 =$$

$$(1 - 2 + 2) - (e^{-2}) = 1 - \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}865.$$



■ **Figura 5**

Per calcolare il volume del solido ottenuto ruotando tale regione intorno all'asse y ricorriamo invece al metodo dei gusci cilindrici:

$$V = 2\pi\int_0^2 x(e^{x-2} - x + 1)dx.$$

Calcoliamo per parti l'integrale indefinito

$$\int xe^{x-2}dx = \int x\mathrm{D}[e^{x-2}]dx = xe^{x-2} - \int 1 \cdot e^{x-2}dx = xe^{x-2} - e^{x-2}.$$

Quindi $A = 2\pi\left[xe^{x-2} - e^{x-2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2\pi\left[\left(2 - 1 - \frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{e^2}\right)\right] = 2\pi\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{e^2}\right) \simeq 2{,}945.$

QUESTIONARIO

1 Vedi lo svolgimento del quesito 1 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

2 Vedi lo svolgimento del quesito 2 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

3 Le condizioni di esistenza dei coefficienti binomiali dell'equazione data:

$$5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$$

sono:

$$\begin{cases} n+1 \geq 5 \\ n-1 \geq 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} n \geq 4 \\ n \geq 5 \end{cases} \rightarrow n \geq 5, \text{ con } n \text{ naturale.}$$

Ricordiamo che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ si può calcolare con la formula:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Applichiamo tale formula all'equazione data:

$$5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4} \rightarrow 5\frac{(n+1)!}{5!(n+1-5)!} = 21\frac{(n-1)!}{4!(n-1-4)!} \rightarrow$$

$$\frac{(n+1)n(n-1)!}{4!(n-4)(n-5)!} = 21\frac{(n-1)!}{4!(n-5)!} \rightarrow \frac{(n+1)n}{n-4} = 21 \rightarrow$$

$$n(n+1) = 21(n-4) \rightarrow n^2 + n - 21n + 84 = 0 \rightarrow n^2 - 20n + 84 = 0 \rightarrow$$

$$n = 10 \pm \sqrt{100-84} = 10 \pm 4 \rightarrow n_1 = 6 \vee n_2 = 14.$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

4 Rappresentiamo nel disegno la regione piana R sottesa al grafico di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nell'intervallo [0; 3].

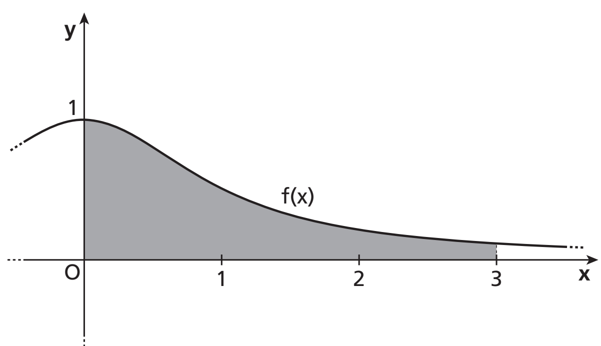


Figura 6

Il volume del solido che ha per base R e la cui intersezione con piani perpendicolari all'asse delle ascisse, in punti di ascissa x, sono rettangoli alti $3x$, è dato dall'integrale:

$$V = \int_0^3 f(x) \cdot 3x dx = \int_0^3 \frac{3x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2}\int_0^3 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{3}{2}[\ln(1+x^2)]_0^3 =$$

$$\frac{3}{2}[\ln(1+3^2) - \ln(1+0^2)] = \frac{3}{2}\ln 10 \simeq 3{,}454.$$

5 Il limite assegnato

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})$$

si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Poiché entrambi i radicali, per x che tende a $+\infty$, si comportano come $\sqrt{3x}$, il risultato del limite sarà 0. Verifichiamo tale deduzione:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2})(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5-3x+2}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{7}{(\sqrt{3x+5} + \sqrt{3x-2})} = \frac{7}{+\infty+\infty} = 0.$$

Più precisamente, la funzione $y = \sqrt{3x+5} - \sqrt{3x-2}$ si avvicina a 0 rimanendo sempre positiva, in quanto $\sqrt{3x+5} > \sqrt{3x-2}$.

6 Vedi lo svolgimento del quesito 6 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

7 Vedi lo svolgimento del quesito 7 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

8 Vedi lo svolgimento del quesito 8 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

9 Vedi lo svolgimento del quesito 9 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.

10 Vedi lo svolgimento del quesito 10 della prova per il Liceo Scientifico e per il Liceo Scientifico - Opzione Scienze Applicate, sessione ordinaria 2015.