

---

# ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

## Svolgimento

---

A cura di Francesco Benvenuti, Lidia Ceresara, Elisa Garagnani,  
Gianni Melegari e Claudio Romeni

### Problema 1

- 1** La derivata prima della funzione  $q(t)$  è

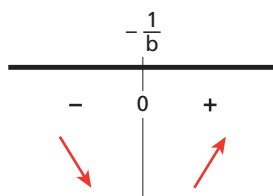
$$q'(t) = ae^{bt} + abte^{bt} = a(1 + bt)e^{bt}$$

Dallo studio del segno di  $q'(t)$  (sapendo che  $a > 0$  e  $e^{bt} > 0$ ) si ha

$$a(1 + bt)e^{bt} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad bt + 1 \geq 0$$

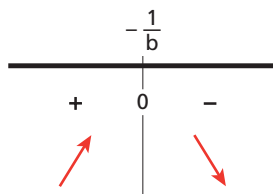
- Se  $b > 0 \quad \Rightarrow \quad t \geq -\frac{1}{b}$

In tal caso si ha un minimo relativo per  $t = -\frac{1}{b}$



- Se  $b = 0$  la funzione di partenza  $q(t) = at$  è lineare e  $q'(t) = a$  è costante. In tal caso non ci sono né punti di massimo né punti di minimo.
- Se  $b < 0 \quad \Rightarrow \quad t \leq -\frac{1}{b}$

In tal caso si ha un massimo relativo per  $x = -\frac{1}{b}$



Affinché la funzione  $q(t)$  ammetta un massimo in  $B$  deve risultare  $b < 0$  e

$$\begin{cases} q(2) = \frac{8}{e} \\ q'(2) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2ae^{2b} = \frac{8}{e} \\ a(2b + 1)e^{2b} = 0 \end{cases}$$

Per le condizioni imposte dal problema, la seconda equazione è risolta solo per  $b = -\frac{1}{2}$ , perciò

$$\begin{cases} \frac{2a}{e} = \frac{8}{e} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- 2** La funzione  $q(t) = 4te^{-\frac{t}{2}}$  esiste  $\forall t \in \mathbb{R}$ . I limiti per  $t \rightarrow +\infty$  e  $t \rightarrow -\infty$  valgono (applicando il teorema di de l'Hospital)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 4te^{-\frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4t}{e^{\frac{t}{2}}} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{4}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} 4te^{-\frac{t}{2}} = -\infty$$

Agli stessi risultati si poteva arrivare considerando la gerarchia degli infiniti.

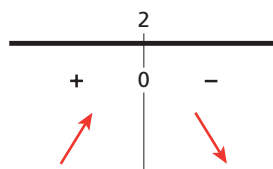
L'unico punto in cui la funzione interseca gli assi è l'origine  $O(0; 0)$ .

Il segno della funzione è  $q(t) > 0 \Rightarrow t > 0$  poiché il fattore  $e^{-\frac{t}{2}}$  è sempre positivo.

Utilizzando il risultato ottenuto al punto precedente, la derivata prima di  $q(t)$  è

$$q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

Il suo segno è indicato in figura

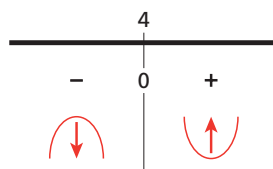


Si ha un massimo nel punto  $B\left(2; \frac{8}{e}\right)$ , coerentemente con il punto precedente.

La derivata seconda di  $q(t)$  è

$$q''(t) = -\frac{1}{2} \cdot 4e^{-\frac{t}{2}} \left(1 - \frac{t}{2}\right) + 4e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = (t - 4)e^{-\frac{t}{2}}$$

Il cui segno è indicato in figura



Per cui in  $t = 4$  vi è un punto di flesso a tangente obliqua di coordinate  $F\left(4; \frac{16}{e^2}\right)$ .

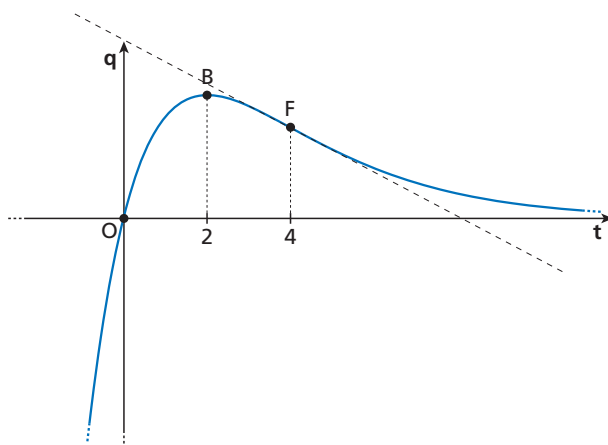
Il coefficiente angolare della tangente inflessionale è

$$q'(4) = -4e^{-2}$$

Quindi l'equazione della retta tangente è

$$y = -\frac{4}{e^2}t + \frac{32}{e^2}$$

E il suo grafico è



- 3** Il problema propone di interpretare la funzione  $q(t)$  come *la carica elettrica che attraversa all'istante di tempo  $t$  la sezione di un certo conduttore*. Questa interpretazione *non* ha significato fisico.

Infatti, in Fisica non è definita una grandezza “carica elettrica che attraversa all'istante di tempo  $t$  la sezione di un conduttore”. Si definisce invece la carica elettrica  $Q(t)$  presente all'istante  $t$  sulla superficie di un conduttore, ma non è questo il caso proposto dal problema.

Esistono altre due definizioni:

- a) la carica che attraversa una sezione di un conduttore in un dato intervallo di tempo;
- b) la corrente elettrica, cioè la rapidità di trasferimento della carica.

Sulla base di esse, proponiamo due possibili interpretazioni per il termine  $at \cdot e^{bt}$ .

### a) $at \cdot e^{bt}$ è una carica

**3a** Scegliendo l'impostazione usuale in cui  $q(t)$ , per  $t \geq 0$ , rappresenta la carica elettrica in coulomb che *ha attraversato* una sezione trasversale del conduttore dall'istante  $t = 0$  fino al generico istante  $t$ , allora le costanti  $a$  e  $b$  devono avere le seguenti dimensioni:

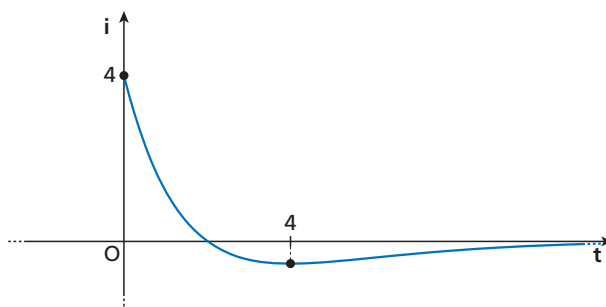
$$a \rightarrow \frac{[\text{carica}]}{[\text{tempo}]} = [\text{corrente}]$$

$$b \rightarrow \frac{1}{[\text{tempo}]}$$

La corrente è data dalla derivata della carica rispetto al tempo

$$i(t) = q'(t) = 4e^{-\frac{t}{2}} \left( 1 - \frac{t}{2} \right)$$

per cui il suo andamento corrisponde al grafico della funzione derivata prima  $q'(t)$ . Dovendo considerare solo  $t \geq 0$ , il grafico è



Il valore massimo della corrente si ha per  $t = 0$  s:

$$i(0) = 4 \text{ A}$$

Il valore minimo si ha in corrispondenza del punto di flesso di  $q(t)$  cioè per  $t = 4$  s:

$$i(4) = -4e^{-2} \text{ A}$$

Al trascorrere del tempo, per  $t \rightarrow +\infty$ , si ha (applicando il teorema di de l'Hospital):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2(2-t)}{e^{\frac{t}{2}}} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}} = 0^-$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare considerando la gerarchia degli infiniti.

**4a** In coerenza con l'interpretazione data, la carica  $Q(t_0)$  che attraversa una sezione trasversale del conduttore da  $t = 0$  fino a  $t = t_0$  si calcola con l'integrale definito

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t) dt = \left[ 4te^{-\frac{t}{2}} \right]_0^{t_0} = 4t_0e^{-\frac{t_0}{2}}$$

Ma è inutile ricavare la primitiva della derivata di una funzione, perché, a meno di una costante, è la funzione stessa.

Si ha

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} Q(t_0) = 0^+$$

come si vede anche nel grafico del punto 2.

La potenza è, per effetto Joule,  $P = Ri^2$  e l'energia dissipata nell'intervallo  $[0; t_0]$  vale (omettendo l'unità di misura di  $R$ )

$$E = \int_0^{t_0} Ri^2(t) dt = \int_0^{t_0} 3 \cdot \left[ 2(2-t)e^{-\frac{t}{2}} \right]^2 dt = \int_0^{t_0} 12 \cdot (2-t)^2 e^{-t} dt$$

ed è misurata in joule (J).

## b) $at \cdot e^{bt}$ è una corrente

**3b** In alternativa, la carica che attraversa una sezione di un conduttore in un istante di tempo è una *corrente elettrica*. Allora si può interpretare la formula del testo come la quantità infinitesima di carica  $dq$  che attraversa la sezione del conduttore in un intervallo di tempo  $dt$ :

$$dq(t) = i(t) dt = 4t e^{-\frac{t}{2}} dt$$

Secondo questa ipotesi le dimensioni fisiche dei parametri sono

$$\begin{aligned} a &\rightarrow \frac{[\text{carica}]}{[\text{tempo}]^2} = \frac{[\text{corrente}]}{[\text{tempo}]} \\ b &\rightarrow \frac{1}{[\text{tempo}]} \end{aligned}$$

In questo caso l'intensità di corrente è

$$i(t) = 4t e^{-\frac{t}{2}} \quad (t \geq 0)$$

Quindi la funzione  $4t e^{-\frac{t}{2}}$  è una corrente e *non* una carica.

Il valore massimo di questa funzione è  $\frac{8}{e}$  A e corrisponde alle coordinate  $\left(2; \frac{8}{e}\right)$  già individuate in precedenza, come è detto anche nel testo. Il suo valore minimo è  $i = 0$  e viene assunto solo all'istante  $t = 0$ .

Come già visto nel punto 2, la corrente tende a  $0^+$  per  $t \rightarrow +\infty$

**4b** In coerenza con l'interpretazione data, la carica  $Q(t_0)$  che attraversa una sezione trasversale del conduttore da  $t = 0$  fino a  $t = t_0$  si calcola con l'integrale definito

$$Q(t_0) = \int_0^{t_0} i(t) dt = 4 \int_0^{t_0} t e^{-\frac{t}{2}} dt$$

L'integrale indefinito associato si calcola per parti scegliendo  $t$  come fattore finito. In questo modo si ottiene

$$\int t e^{-\frac{t}{2}} dt = -2t e^{-\frac{t}{2}} + 2 \int e^{-\frac{t}{2}} dt = -2e^{-\frac{t}{2}}(t + 2) + c$$

Quindi

$$Q(t_0) = 4 \int_0^{t_0} t e^{-\frac{t}{2}} dt = \left[ -2e^{-\frac{t}{2}}(t + 2) \right]_0^{t_0} = 8 \left[ 2 - e^{-\frac{t_0}{2}}(t_0 + 2) \right]$$

Per cui il limite richiesto è

$$\lim_{t_0 \rightarrow +\infty} Q(t_0) = 8 \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \left[ 2 - e^{-\frac{t_0}{2}}(t_0 + 2) \right] = 16 - \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \frac{t_0 + 2}{e^{\frac{t_0}{2}}} = 16 \text{ C}$$

Con la resistenza data, e tralasciando ancora una volta l'unità di misura della resistenza nei passaggi intermedi, l'energia dissipata nell'intervallo di tempo  $[0, t_0]$  è data dall'integrale

$$E = \int_0^{t_0} Ri^2(t) dt = \int_0^{t_0} 3 \cdot \left[ 4t e^{-\frac{t}{2}} \right]^2 dt = \int_0^{t_0} 48 \cdot t^2 e^{-t} dt$$

ed è misurata in joule (J).

## In conclusione

- a)** Nel primo caso lo studente deve calcolare la funzione corrente  $i(t)$  come derivata rispetto al tempo della carica  $q(t)$ . Non deve calcolare l'integrale perché conosce già la forma di  $Q(t_0) = q(t_0)$ ;
- b)** nel secondo caso lo studente conosce dal testo la funzione corrente e quindi non deve calcolare la derivata. Gli è richiesto invece di calcolare un integrale definito per ottenere l'espressione  $Q(t_0)$ .

---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

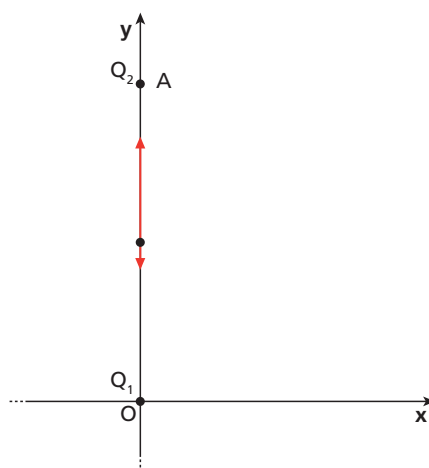
### Svolgimento

---

#### Problema 2

- 1** Visto che le due cariche sono poste entrambe sull'asse  $y$ , l'unica zona del piano cartesiano in cui il campo elettrico può essere nullo è lo stesso asse  $y$ . Infatti, in ogni punto del piano cartesiano posto al di fuori dell'asse  $y$  i due vettori campo elettrico hanno direzioni diverse tra loro e quindi la loro somma vettoriale non può essere nulla.

Sull'asse delle ordinate, il campo elettrico totale può essere nullo solo nel segmento compreso tra i punti  $O(0; 0)$  e  $A(0; 1)$ ; infatti entrambe le cariche sono positive, e, quindi, i loro campi elettrici hanno versi opposti solo all'interno di tale segmento. Negli altri punti dell'asse delle ordinate i due campi hanno la stessa direzione e lo stesso verso, per cui la loro somma non può essere nulla.



In un punto  $P(0; y)$  del segmento  $OA$  la componente lungo  $y$  del campo elettrico totale è

$$E_{\text{tot}, y} = E_{1, y} - E_{2, y} = k \frac{4q}{y^2} - k \frac{q}{(1-y)^2} = k q \left[ \frac{4}{y^2} - \frac{1}{(1-y)^2} \right] \quad (0 < y < 1)$$

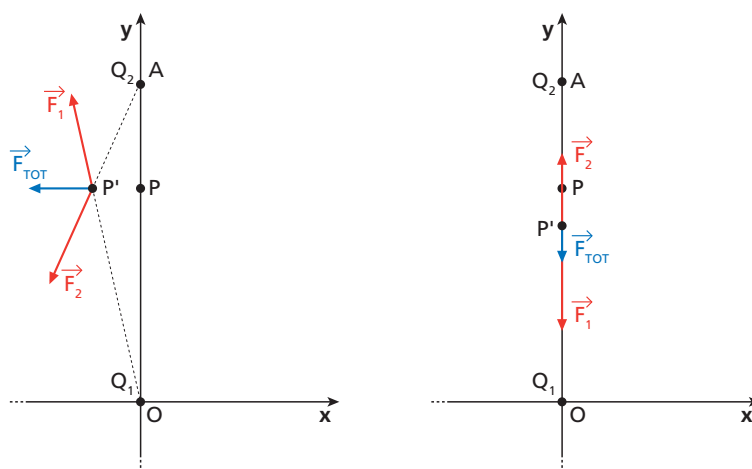
Ponendo uguale a zero l'espressione tra parentesi quadre si ottiene l'equazione di secondo grado

$$4(1-y)^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 - 8y + 4 = 0$$

che ha come soluzioni  $y_1 = 2/3$  e  $y_2 = 2$ . Di queste solo la prima soluzione è accettabile in quanto compresa tra 0 e 1. Quindi, come dice il testo del problema, è confermato che esiste solo un punto in cui il campo elettrico totale è nullo, ed è il punto  $P\left(0; \frac{2}{3}\right)$ .

Se poniamo in  $P$  una terza carica, essa si trova in una situazione di equilibrio instabile. Per esempio, spostando una terza carica positiva in direzione parallela all'asse  $x$ , su di essa agirebbe una forza obliqua che tenderebbe ad allontanarla da  $P$ .

Come secondo esempio, se si sposta una terza carica negativa verso il basso si ottiene che la forza attrattiva verso  $Q_1$  diviene più intensa di quella verso  $Q_2$ , per cui anche in questo caso la terza carica si allontana da  $P$ .



- 2** Indichiamo con  $B(x; 1)$  il generico punto in cui si trova la carica  $Q_2$ . La distanza tra le due cariche è, quindi,  $r = \overline{OB} = \sqrt{1 + x^2}$ .

Quindi l'energia potenziale del sistema di due cariche risulta

$$\mathcal{U}(x) = k \frac{Q_1 Q_2}{r} = k \frac{4q^2}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

In coerenza con il testo della prova, in tutta la trattazione è stata sottintesa l'unità di misura delle lunghezze, cioè il metro.

- 3** La funzione  $\mathcal{U} = \frac{4kq^2}{\sqrt{1+x^2}}$  è definita in tutto  $\mathbb{R}$  ed è pari, dunque il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse  $x$ . La funzione è sempre positiva e interseca l'asse  $y$  nel punto  $(0; 4kq^2)$ .

Il grafico ha come asintoto orizzontale sia destro, sia sinistro l'asse  $x$ : infatti,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4kq^2}{\sqrt{1+x^2}} = 0$ .

Studiamo ora la derivata prima di  $\mathcal{U}(x) = 4kq^2 (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ :

$$\mathcal{U}'(x) = -2kq^2 (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = \frac{-4kq^2 x}{\sqrt{(1 + x^2)^3}}$$

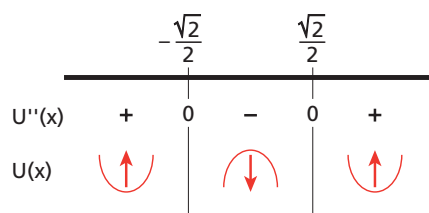
che ha lo stesso segno di  $-x$ : dunque la funzione è crescente per  $x < 0$ , decrescente per  $x > 0$  e ha il massimo assoluto in  $x = 0$ .

Studiamo la derivata seconda di  $\mathcal{U}(x)$ , derivando  $\mathcal{U}' = -4kq^2 x (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$ :

$$\mathcal{U}''(x) = -4kq^2 \left[ (1 + x^2)^{-\frac{3}{2}} + x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1 + x^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x \right] = \frac{4kq^2(2x^2 - 1)}{\sqrt{(1 + x^2)^5}}$$

Dunque  $\mathcal{U}''(x) > 0$  se  $2x^2 - 1 > 0$ , cioè se  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .





Dunque ci sono due punti di flesso per  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , di coordinate

$$F_1 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3} \right) \quad \text{e} \quad F_2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{4kq^2\sqrt{6}}{3} \right)$$

Determiniamo i coefficienti angolari delle tangenti in  $F_1$  e  $F_2$ :

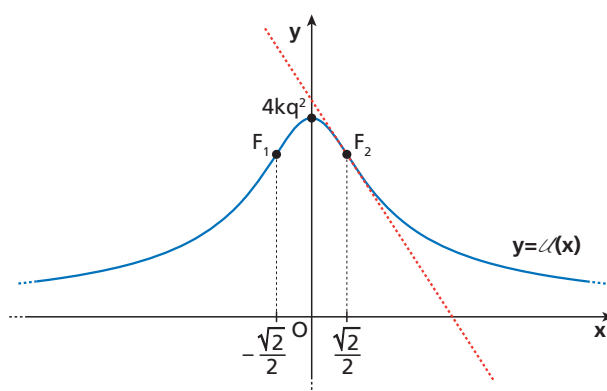
$$m_2 = \mathcal{U}' \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$$

che è la pendenza in  $F_2$ .

Per simmetria, il coefficiente angolare della tangente in  $F_1$  è

$$m_1 = -m_2 = \frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$$

Il grafico di  $\mathcal{U}(x)$  è dunque questo:



- 4** La funzione  $\mathcal{U}'(x) = -4kq^2 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$  è dispari nel dominio  $\mathbb{R}$ . Infatti si può dimostrare che la derivata di una funzione pari è dispari.

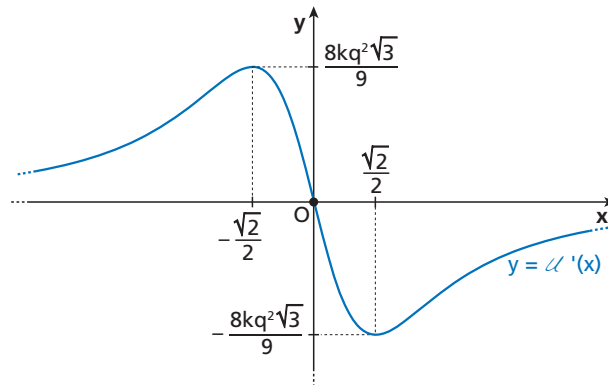
$\mathcal{U}'(x)$  interseca gli assi cartesiani solo nell'origine, è positiva per  $x < 0$  dove  $\mathcal{U}(x)$  è crescente, è negativo per  $x > 0$  dove  $\mathcal{U}(x)$  è decrescente.

Poiché  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( -4kq^2 \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \right) = 0$ ,  $\mathcal{U}'(x)$  ha per asintoto orizzontale sia destro, sia sinistro l'asse  $x$ .

$\mathcal{U}'(x)$  è crescente dove  $\mathcal{U}(x)$  ha la concavità verso l'alto, cioè per  $x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  ed è decrescente dove  $\mathcal{U}(x)$  ha la concavità rivolta verso il basso, cioè per  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Quindi ha massimo assoluto in  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , che vale  $M = \mathcal{U}'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{8kq^2\sqrt{3}}{9}$ , e un minimo assoluto nel punto simmetrico rispetto all'origine.

Il grafico di  $\mathcal{U}'(x)$  è dunque:



$\mathcal{U}'(x)$  è una funzione dispari e continua su tutta  $\mathbb{R}$  e quindi integrabile in tutto  $\mathbb{R}$ .

Ne segue che il suo integrale definito su qualunque intervallo del tipo  $[-a; a]$  è nullo, e in particolare

$$\int_{-m}^m \mathcal{U}'(x) dx = 0.$$

---

# ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

## Svolgimento

---

### Quesito 1

Imponiamo, innanzitutto, che la funzione  $g$  sia continua in  $x = 1$ , calcolando il limite destro e sinistro per  $x$  che tende a 1 e uguagliandoli tra loro e al valore della funzione in 1:

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3 - ax^2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b}{x-3} \Rightarrow 3 - a = -\frac{b}{2} \Rightarrow b = 2a - 6.$$

Studiamo ora la derivabilità di  $g(x)$ :

$$g'(x) = \begin{cases} -2ax, & x < 1 \\ -\frac{b}{(x-3)^2}, & x > 1. \end{cases}$$

Poniamo

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (-2ax) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( -\frac{b}{(x-3)^2} \right) \Rightarrow -2a = -\frac{b}{4} \Rightarrow b = 8a.$$

Mettiamo a sistema le due condizioni su  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} b = 2a - 6 \\ b = 8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 6 = 8a \\ b = 8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -8 \end{cases}$$

Per tali valori,

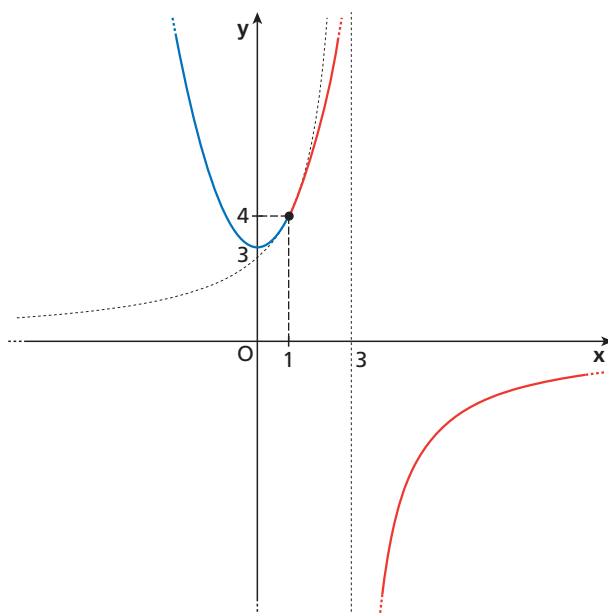
$$g(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \leq 1 \\ \frac{-8}{x-3}, & x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad g'(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 1 \\ \frac{8}{(x-3)^2}, & x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases}$$

Disegniamo il grafico di  $g(x)$ .

L'equazione  $y = 3 + x^2$  rappresenta una parabola con asse verticale, vertice  $V(0; 3)$  e passante per  $(1; 4)$ .

L'equazione  $y = -\frac{8}{x-3}$  è l'equazione di una funzione omografica che ha per grafico l'iperbole equilatera di centro  $C(3; 0)$ , asintoti di equazione  $x = 3$  e  $y = 0$  e passante per  $(1; 4)$ .

Il grafico di  $g$  è dunque questo:



Possiamo osservare dal grafico che la funzione  $g$  è continua e derivabile anche in  $x = 1$ .

Disegniamo il grafico di  $g'(x)$ .

La funzione di equazione  $y = 2x$  ha come grafico la retta passante per l'origine e per il punto  $(1; 2)$ .

La funzione di equazione  $y = \frac{8}{(x-3)^2}$  ha come asintoto verticale la retta  $x = 3$ , poiché

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{8}{(x-3)^2} = +\infty.$$

Inoltre è una funzione sempre positiva nel dominio.

Essa è crescente per  $x < 3$  e decrescente per  $x > 3$  poiché la sua derivata prima è la derivata seconda di  $y = -\frac{8}{x-3}$ , che è positiva per  $x < 3$  (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso l'alto) e negativa per  $x > 3$  (dove la concavità dell'iperbole è rivolta verso il basso).

La funzione definita per casi  $g'$  è continua anche in  $x = 1$ . Infatti

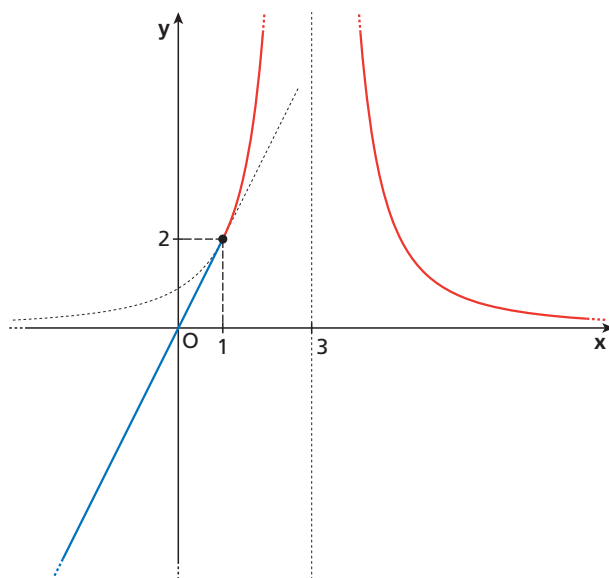
$$g'(1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8}{(x-3)^2}$$

$g'$  è anche derivabile in  $x = 1$ . Infatti:

$$g''(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -16 \\ (x-3)^3, & x > 1 \wedge x \neq 3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-16}{(x-3)^3} = 2$$

Dunque  $g''(1) = 2$ .

In conclusione, il grafico di  $g''$  è questo:



---

# ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

## Svolgimento

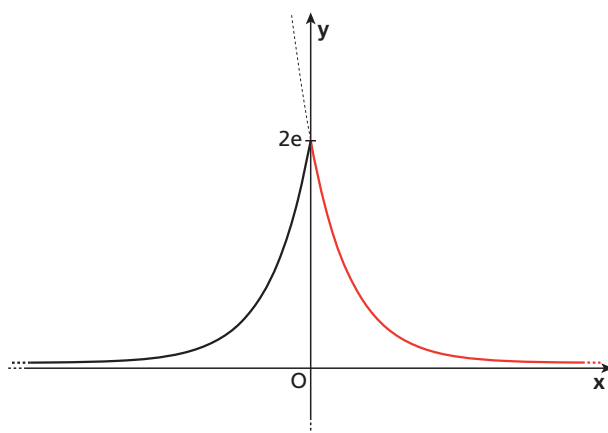
---

### Quesito 2

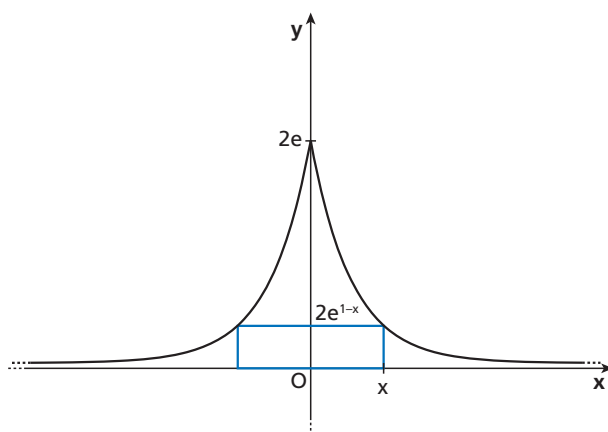
La funzione di equazione  $y = 2e^{1-|x|}$  è una funzione pari.

Per  $x \geq 0$ , si ottiene l'equazione  $y = 2e^{1-x} = 2e \cdot e^{-x}$ , il cui grafico è quello di un esponenziale decrescente dilatato verticalmente, passante per  $(0; 2e)$ , con asintoto orizzontale l'asse  $x$ .

Il grafico di  $y = 2e^{1-|x|}$  è dunque:



Inscriviamo un generico rettangolo nella regione considerata:

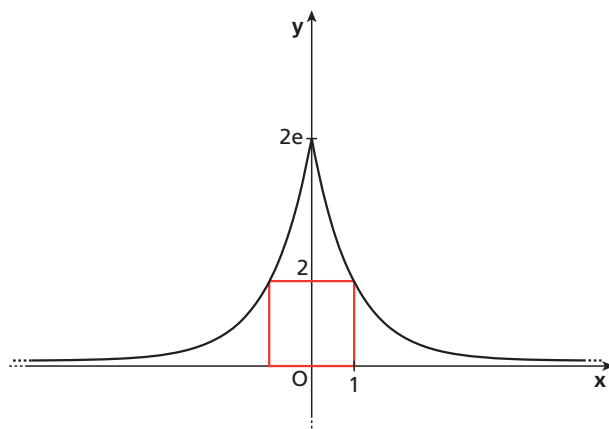


Sia  $x$  l'ascissa del vertice di coordinate  $(x; 0)$  con  $x \geq 0$ .

L'area del rettangolo vale  $A(x) = 2 \cdot x \cdot 2e^{1-x} = 4xe^{1-x}$ , con  $x > 0$ .

La derivata vale  $A'(x) = 4(e^{1-x} - xe^{1-x}) = 4e^{1-x}(1 - x)$ , che è positiva per  $x \in ]0; 1[$ , negativa per  $x > 1$  e si annulla in  $x = 1$ . Dunque l'area massima si ottiene per  $x = 1$ .

In questo caso la base del rettangolo vale 2 e l'altezza  $2e^{1-1} = 2$ , quindi si tratta di un quadrato:



Il perimetro del generico rettangolo inscritto vale

$$2p(x) = 4x + 2 \cdot 2e^{1-x} = 4(x + e^{1-x})$$

la cui derivata vale

$$2p'(x) = 4(1 - e^{1-x})$$

che è positiva se  $e^{1-x} < 1$ , cioè se  $1 - x < 0$ , cioè se  $x > 1$ .

In  $x = 1$  si annulla, per poi diventare negativa per  $x < 1$ .

Dunque il perimetro minimo si ottiene nella stessa situazione in cui si ha l'area massima, ossia nel caso in cui il rettangolo sia un quadrato.

---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

### Svolgimento

---

#### Quesito 3

La probabilità che la prima pallina estratta sia la numero 10 vale  $1/16$ , mentre la probabilità che venga estratta una pallina con un numero minore di 10 vale  $9/16$ . La probabilità richiesta è quindi

$$p_1 = \frac{1}{16} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{9}{16} = \frac{9^2}{16^3} = \frac{81}{4096} \approx 1,98\%$$

Un primo modo per calcolare la probabilità  $p_2$  richiesta è l'approccio classico, per cui le possibili cinque estratte contemporaneamente sono

$$C_{16,5} = \binom{16}{5} = \frac{16!}{11!5!} = 4368$$

Invece i casi favorevoli sono le cinque che contengono il numero 13 come numero massimo, e in cui le rimanenti quattro palline hanno numeri compresi tra 1 e 12. Tale numero è uguale al numero di quaterne scelte tra 12 palline, cioè

$$C_{12,4} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{8!4!} = 495$$

La probabilità richiesta vale dunque

$$p_2 = \frac{C_{12,4}}{C_{16,5}} = \frac{495}{4368} = \frac{165}{1456} \approx 11,3\%$$

Un secondo modo per calcolare  $p_2$  può essere quello di pensare di estrarre le 5 palline una alla volta, senza reimbussolamento e senza considerare l'ordine di estrazione.

In questo caso si ottiene

$$p_2 = \binom{5}{1} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{12}{15} \cdot \frac{11}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12} = \frac{165}{1456} \approx 11,3\%$$

dove il coefficiente  $\binom{5}{1}$  rappresenta le cinque possibili posizioni di uscita del numero 13 e gli altri fattori rappresentano le probabilità di uscita di altri 4 numeri inferiori al 13.



---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

### Svolgimento

---

#### Quesito 4

Il polinomio  $s(x)$  deve annullarsi per  $x = -1$  e per  $x = 2$ , e quest'ultima radice deve avere molteplicità almeno 2.

Il polinomio  $t(x)$  deve annullarsi per  $x = -3$  e  $x = 1$ .

La più semplice funzione che soddisfa le richieste del quesito è del tipo:

$$y = a \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

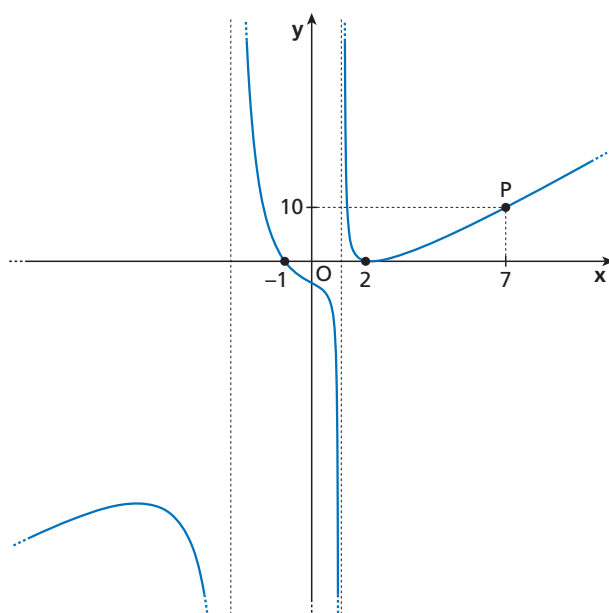
Ricaviamo il parametro  $a$  in modo che valga anche la terza condizione  $y(7) = 10$ :

$$10 = a \cdot \frac{8 \cdot 5^2}{6 \cdot 10} \Rightarrow a = 3$$

La funzione  $y = 3 \frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+3)}$  risponde a tutte le richieste del quesito.

Va sottolineato, naturalmente, che tale funzione non è l'unica possibile.

Il grafico della funzione è il seguente:



---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

### Svolgimento

---

#### **Quesito 5**

Riscriviamo l'equazione della superficie sferica completando i quadrati:

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 1+9 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 10$$

Il centro della superficie sferica è quindi  $C(1; 0; -3)$  e il raggio vale  $R = \sqrt{10}$ .

Calcoliamo la distanza tra il centro  $C$  e il piano  $\pi$ :

$$d(C; \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \frac{|-14|}{7} = 2$$

Poiché  $2 < \sqrt{10}$ , la superficie  $S$  e il piano  $\pi$  sono secanti in una circonferenza.

Tale circonferenza, per il teorema di Pitagora, ha raggio  $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{10 - 4} = \sqrt{6}$ .

---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

### Svolgimento

---

#### Quesito 6

Coerentemente con il testo del problema, si è scelto di non introdurre le unità di misura nelle formule, ma solo nei risultati finali.

Il punto materiale si muove secondo la legge oraria  $x(t)$  (con  $t \geq 0$ ):

$$x(t) = \frac{1}{9}t^2 \left( \frac{1}{3}t + 2 \right) \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{27}t^3 + \frac{2}{9}t^2$$

La velocità è data dalla derivata rispetto al tempo di  $x(t)$ :

$$v(t) = \frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{9}t$$

e l'accelerazione è data dalla derivata rispetto al tempo di  $v(t)$ :

$$a(t) = \frac{2}{9}t + \frac{4}{9}$$

L'accelerazione  $a(t)$  non è costante perciò non si tratta di un moto uniformemente accelerato.

La velocità media nei primi 9 secondi di moto è data da

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{45 \text{ m}}{9 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

L'istante in cui il punto si muove alla velocità  $v(t) = 5 \text{ m/s}$  è

$$5 = \frac{1}{9}t^2 + \frac{4}{9}t \quad \Rightarrow \quad t^2 + 4t - 45 = 0$$

che ammette le soluzioni

$$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 45} = -2 \pm 7 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -9 \text{ s}, \quad t_2 = 5 \text{ s}$$

La soluzione  $t_1 = -9 \text{ s}$  non è accettabile in quanto negativa, per cui l'istante in cui la velocità vale  $5 \text{ m/s}$  è  $t_2 = 5 \text{ s}$ .

---

## ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

### Svolgimento

---

#### Quesito 7

a) Nel caso di urto elastico, si conservano la quantità di moto totale e l'energia cinetica totale del sistema:

$$\begin{cases} mv_{1i} = mv_{1f} + 3mv_{2f} \\ \frac{1}{2}mv_{1i}^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2} \cdot 3mv_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1i} = v_{1f} + 3v_{2f} \\ v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + 3v_{2f}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{1f} = v_{1i} - 3v_{2f} \\ v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + 9v_{2f}^2 - 6v_{1i}v_{2f} + 3v_{2f}^2 \end{cases}$$

dove la velocità iniziale della prima sfera,  $v_{1i}$ , coincide con la velocità  $v$  indicata nel testo del quesito. La velocità finale della sfera 2 è data da

$$12v_{2f}^2 - 6v_{1i}v_{2f} = 0 \Rightarrow v_{2f}(2v_{2f} - v_{1i}) = 0 \Rightarrow v_{2f} = 0, \quad v_{2f} = \frac{v_{1i}}{2} = \frac{v}{2}$$

Di cui la soluzione  $v_{2f} = \frac{v}{2}$  è quella accettabile. La velocità finale della sfera 1 è

$$v_{1f} = v_{1i} - \frac{3}{2}v_{1i} = -\frac{1}{2}v_{1i} = -\frac{v}{2}$$

il segno “-” indica che la sfera 1 torna indietro.

b) Se l'urto è completamente anelastico non si conserva l'energia cinetica iniziale e le due sfere rimangono attaccate. Si conserva solo la quantità di moto totale. Indicando con  $v$  la velocità iniziale della sfera 1 e con  $V$  la velocità finale del sistema formato dalle due sfere, si ha:

$$mv = (m + 3m)V \Rightarrow mv = 4mV \Rightarrow V = \frac{v}{4}$$

L'energia cinetica finale del sistema è

$$E_f = \frac{1}{2} \cdot 4mV^2 = 2m \frac{v^2}{16} = \frac{1}{8}mv^2$$

mentre l'energia cinetica iniziale è

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2$$

L'energia dissipata è quindi

$$\Delta E = E_i - E_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{8}mv^2 = \frac{3}{8}mv^2$$

---

# ESEMPIO SECONDA PROVA DI MATEMATICA E FISICA

pubblicato dal MIUR il 28 febbraio 2019

---

## Svolgimento

---

### Quesito 8

Il campo magnetico considerato varia nel tempo secondo la legge

$$B(t) = B_0(2 + \sin(\omega t))$$

Il campo è perpendicolare al quadrato delimitato dal circuito di area  $l^2$ . Pertanto il flusso di campo magnetico attraverso la spira è

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = Bl^2 = B_0 l^2 (2 + \sin(\omega t))$$

La forza elettromotrice indotta è perciò

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 l^2 \omega \cos(\omega t)$$

L'intensità di corrente indotta nel circuito nell'istante  $t$  è

$$i = \frac{\text{fem}}{R} = -\frac{B_0 l^2 \omega}{R} \cos(\omega t)$$

Le unità di misura delle grandezze coinvolte sono

$B$	$\rightarrow$	tesla [T]
$\omega$	$\rightarrow$	radianti al secondo [rad/s]
$\Phi$	$\rightarrow$	weber [Wb]
fem	$\rightarrow$	volt [V]
$i$	$\rightarrow$	ampere [A]