I MODELLI E LE COMPETENZE

NELLA SECONDA PROVA DI MATEMATICA

Carlo Bertoni

COME FACCIAMO A TRATTARE SIA MODELLIZZAZIONE CHE CONTENUTI NEL TEMPO DISPONIBILE?

COME POSSIAMO PREPARARE GLI STUDENTI?

CHE PROBLEMI DOBBIAMO ASPETTARCI NEI PROSSIMI ANNI?

COME FACCIAMO A TRATTARE SIA MODELLIZZAZIONE CHE CONTENUTI NEL TEMPO DISPONIBILE?

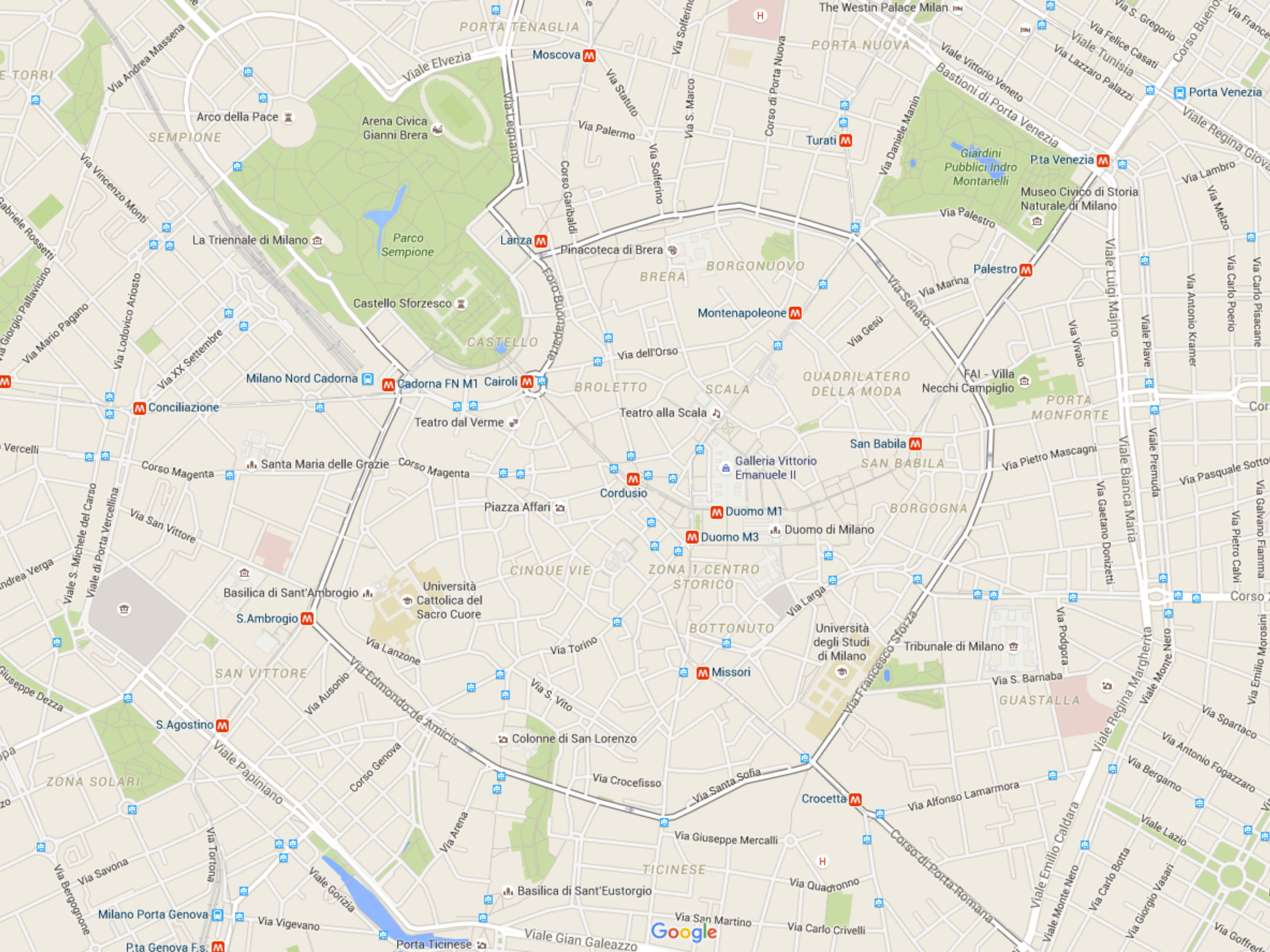
COME POSSIAMO PREPARARE GLI STUDENTI?

CHE PROBLEMI DOBBIAMO ASPETTARCI NEI PROSSIMI ANNI?

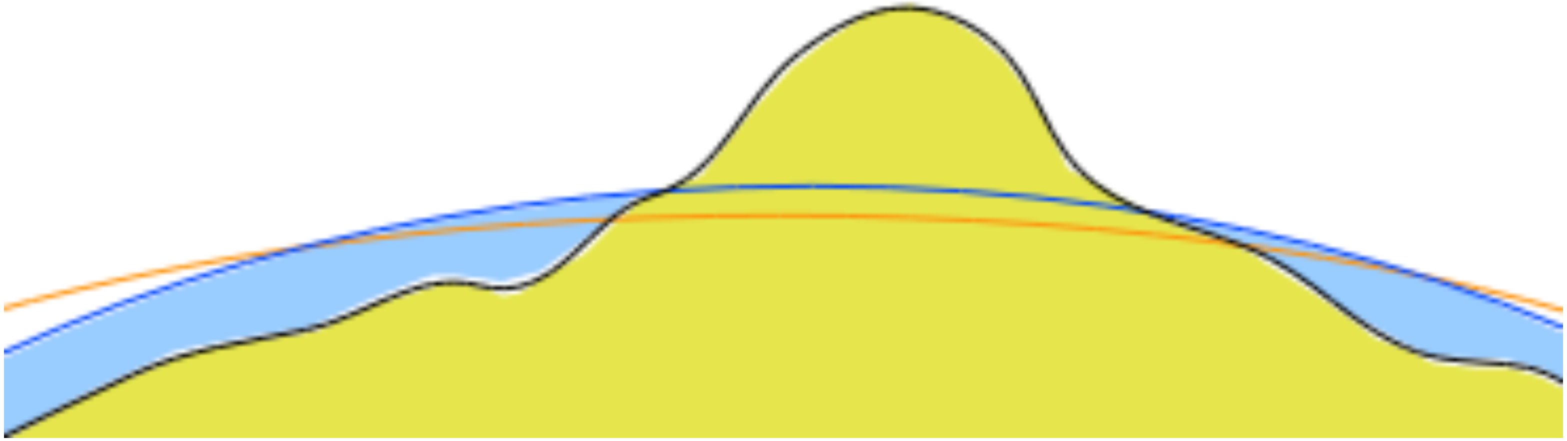

9

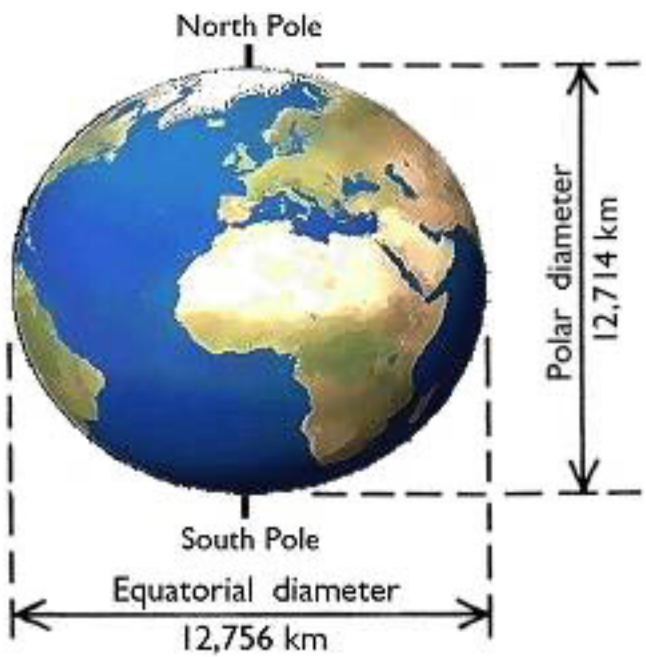
MODELLIZZAZIONE E CONTENUTI NELLA DIDATTICA

CHE FORMA HA LA TERRA?



PORTA TENAGLIA
Moscova
PORTA NUOVA
The Westin Palace Milan
Via Andrea Massena
Viale Elvezia
Via Legnano
Via Statuto
Via Solferino
Corso di Porta Nuova
Via S. Gregorio
Via Felice Casati
Viale Tunisia
Via Lazzaro Palazzi
Corso Buenos
Porta Venezia
Viale Vittorio Veneto
Bastioni di Porta Venezia
Viale Regina Giova
Arco della Pace
SEMPIONE
Arena Civica Gianni Brera
Via Palermo
Via S. Marco
Turati
Via Daniele Manin
Giardini Pubblici Indro Montanelli
P.ta Venezia
Via Lambro
Via Vincenzo Monti
Corso Garibaldi
Museo Civico di Storia Naturale di Milano
Via Melzo
Via Palestro
La Triennale di Milano
Parco Sempione
Lanza
Pinacoteca di Brera
BORGONUOVO
BRERA
Palestro
Via Marina
Viale Luigi Majno
Via Antonio Kramer
Via Carlo Poerio
Via Carlo Pisacane
Via Giorgio Pallavicino
Via Lodovico Ariosto
Via Mario Pagano
Castello Sforzesco
Foro Buonaparte
Montenapoleone
Via Senato
Via Gesù
Via Vivaio
Viale Piave
CASTELLO
Via XX Settembre
Via dell'Orso
QUADRILATERO DELLA MODA
Milano Nord Cadorna
Cadorna FN M1
Cairoli
BROLETTO
SCALA
FAI - Villa Necchi Campiglio
PORTA MONFORTE
Conciliazione
Teatro alla Scala
Teatro dal Verme
San Babila
SAN BABILA
Via Pietro Mascagni
Viale Premuda
Via Pasquale Sottocorni
Corso Magenta
Santa Maria delle Grazie
Galleria Vittorio Emanuele II
Cordusio
Viale Bianca Maria
Via Gaetano Donizetti
Via Galvano Fiamma
Via Pietro Calvi
Via San Vittore
Piazza Affari
Duomo M1
BORGOGNA
Duomo di Milano
Duomo M3
Viale S. Michele del Carso
Viale di Porta Vercellina
Via Andrea Verga
CINQUE VIE
ZONA 1 CENTRO STORICO
Basilica di Sant'Ambrogio
Università Cattolica del Sacro Cuore
Via Larga
S.Ambrogio
BOTTONUTO
Università degli Studi di Milano
Tribunale di Milano
Via Podgora
Via Lanzone
Via Torino
Via Francesco Sforza
Via S. Barnaba
Viale Regina Margherita
Viale Monte Nero
Via Emilio Morosini
SAN VITTORE
Via Edmondo de Amicis
Missori
Via Ausonio
GUASTALLA
Via S. Vito
Via Giuseppe Dezza
S.Agostino
Colonne di San Lorenzo
Via Spartaco
Via Antonio Fogazzaro
Viale Papiniano
Corso Genova
Via Crocefisso
Via Santa Sofia
Via Bergamo
ZONA SOLARI
Crocetta
Via Alfonso Lamarmora
Viale Emilio Caldara
Viale Lazio
Via Arena
Via Giuseppe Mercalli
Via Tortona
Via Savona
TICINESE
Corso di Porta Romana
Via Quadronno
Viale Gorizia
Basilica di Sant'Eustorgio
Via Carlo Botta
Viale Monte Nero
Via Giorgio Vasari
Via Bergognone
Milano Porta Genova
Via Vigevano
Via San Martino
Via Carlo Crivelli
P.ta Genova F.S.
Porta Ticinese
Viale Gian Galeazzo
Via Goffredo
Google




North Pole
Polar diameter
12,714 km
South Pole
Equatorial diameter
12,756 km


VOI SIETE QUI

COME FACCIAMO A TRATTARE SIA MODELLIZZAZIONE CHE CONTENUTI NEL TEMPO DISPONIBILE?

COME POSSIAMO PREPARARE GLI STUDENTI?

CHE PROBLEMI DOBBIAMO ASPETTARCI NEI PROSSIMI ANNI?

1

USCITE DI SICUREZZA

In un palazzo dello sport si deve valutare il numero di uscite di sicurezza necessarie in caso di evacuazione. Costruisci un modello matematico che metta in relazione il numero di uscite con il tempo necessario ad una evacuazione totale, cercando di utilizzare dati realistici.

Quante porte servirebbero, in base al modello, per evacuare il palazzo in tre minuti?

1

USCITE DI SICUREZZA

U.N. = Uscite necessarie

M = Minuti

p.t. = Persone totali

p.m. = Persone che al minuto possono uscire da ciascuna porta

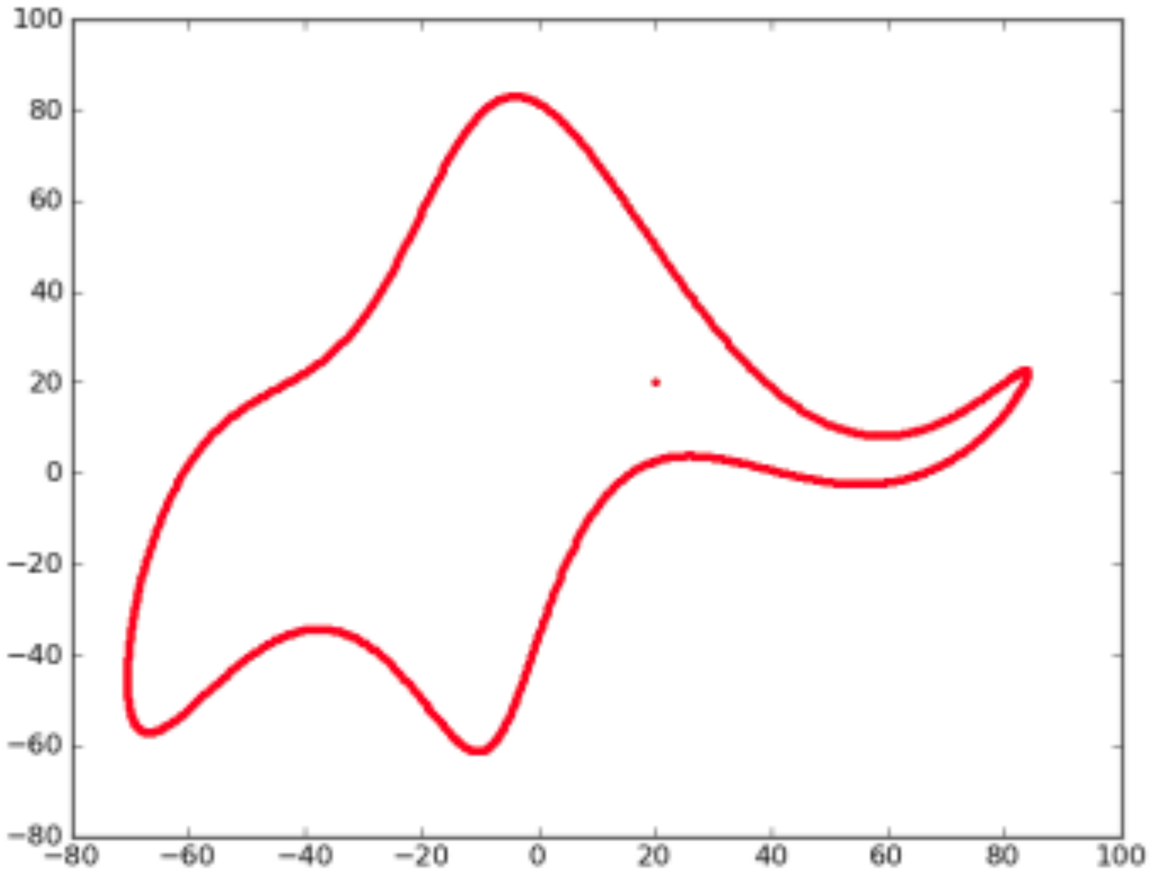
$$U.N. = \frac{(p.t.)}{\left[(p.m.)\cdot(M)\right]}$$

TROVARE UNA FUNZIONE CHE DESCRIVA UN INSIEME DI DATI SPERIMENTALI

- Si lega strettamente allo studio di funzione.
- Può essere reso più o meno semplice a piacimento.
- Lega i concetti matematici agli aspetti concreti del problema reale.

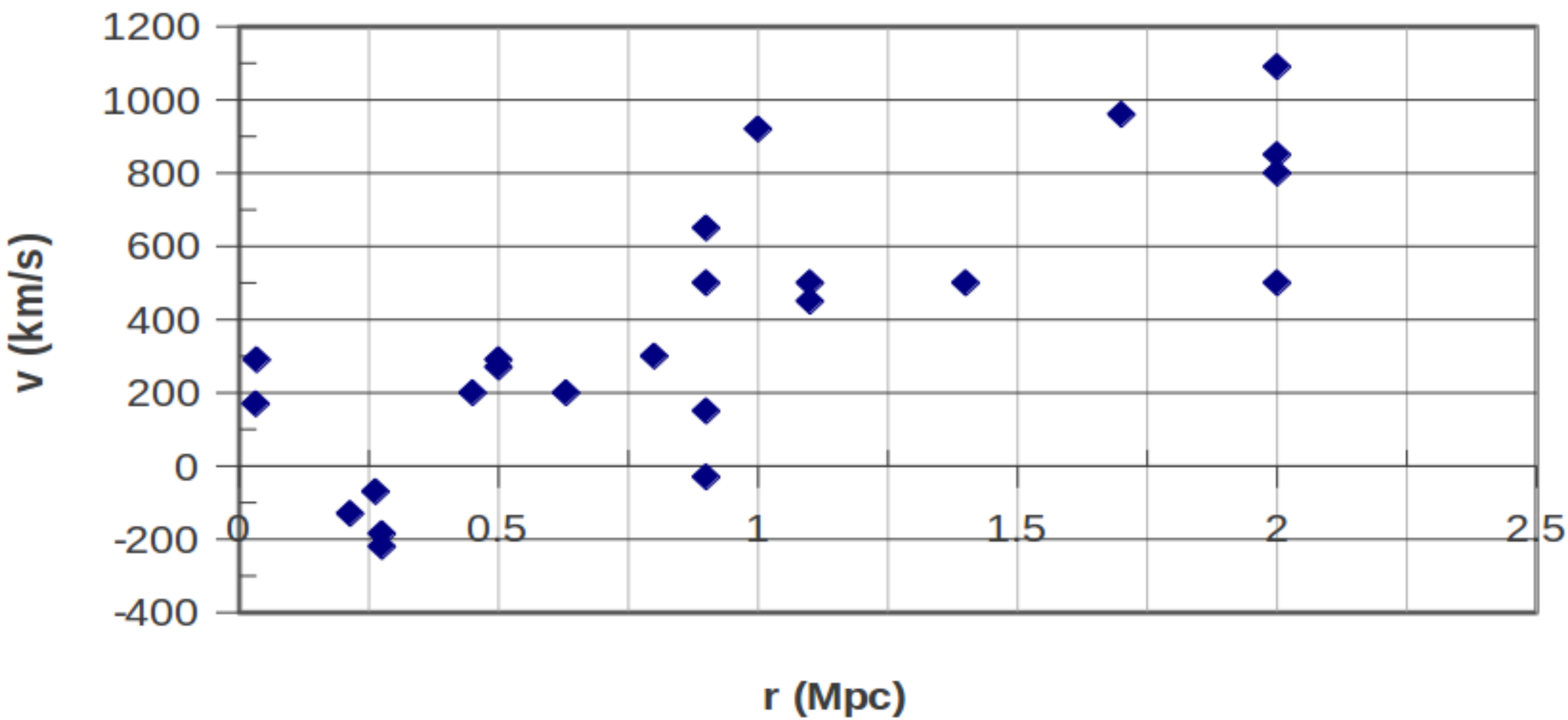
« [...] with five free parameters, a theorist could fit the profile of an elephant [...] »

– George Gamow



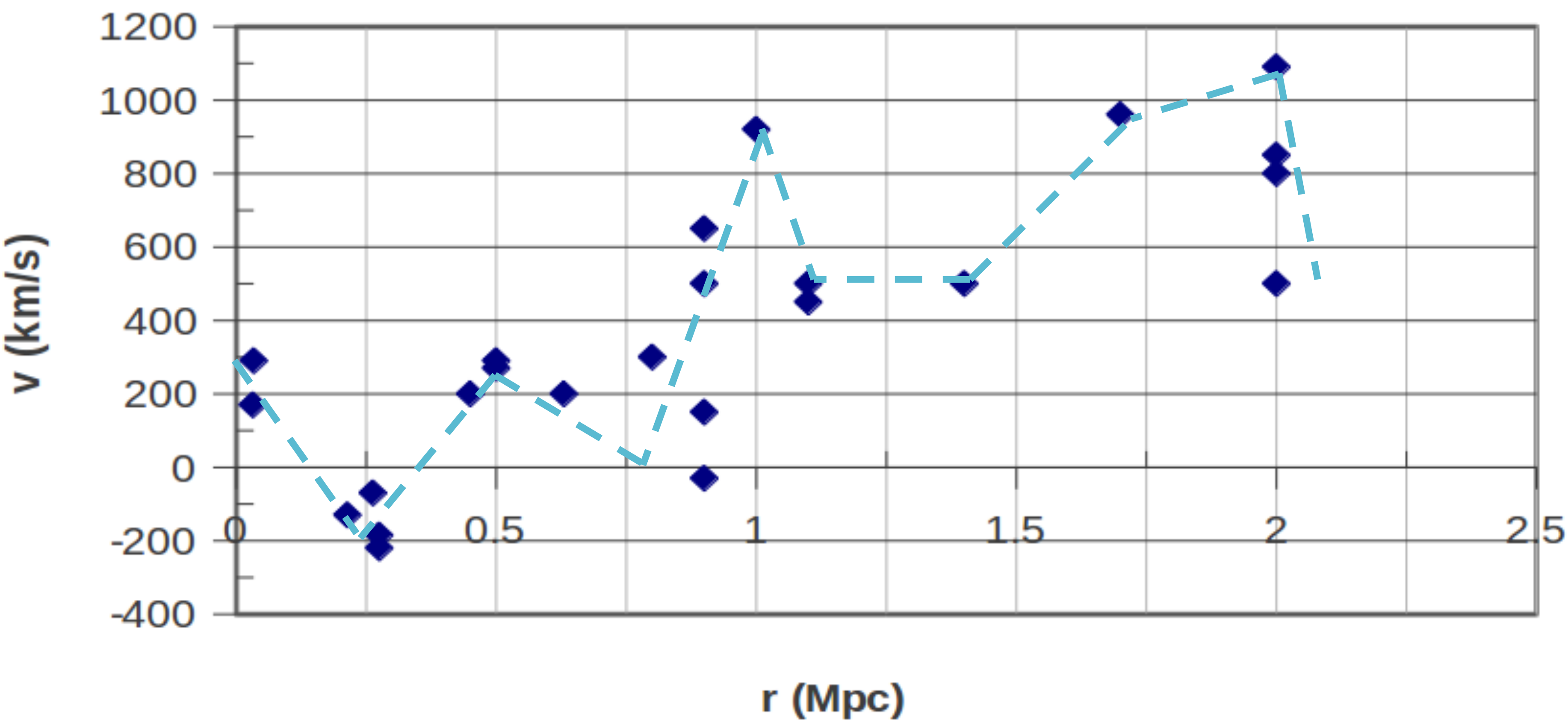
2

LEGGE DI HUBBLE



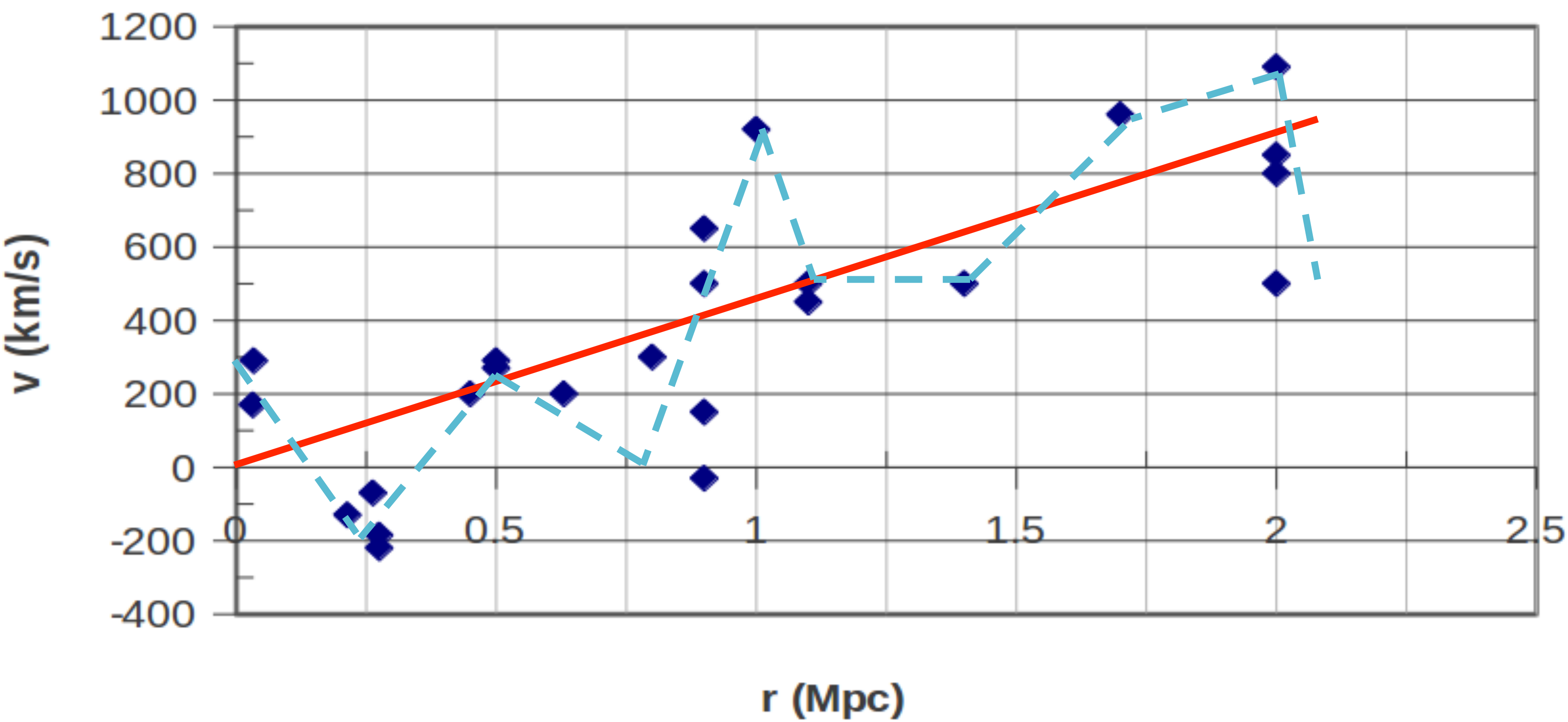
2

LEGGE DI HUBBLE



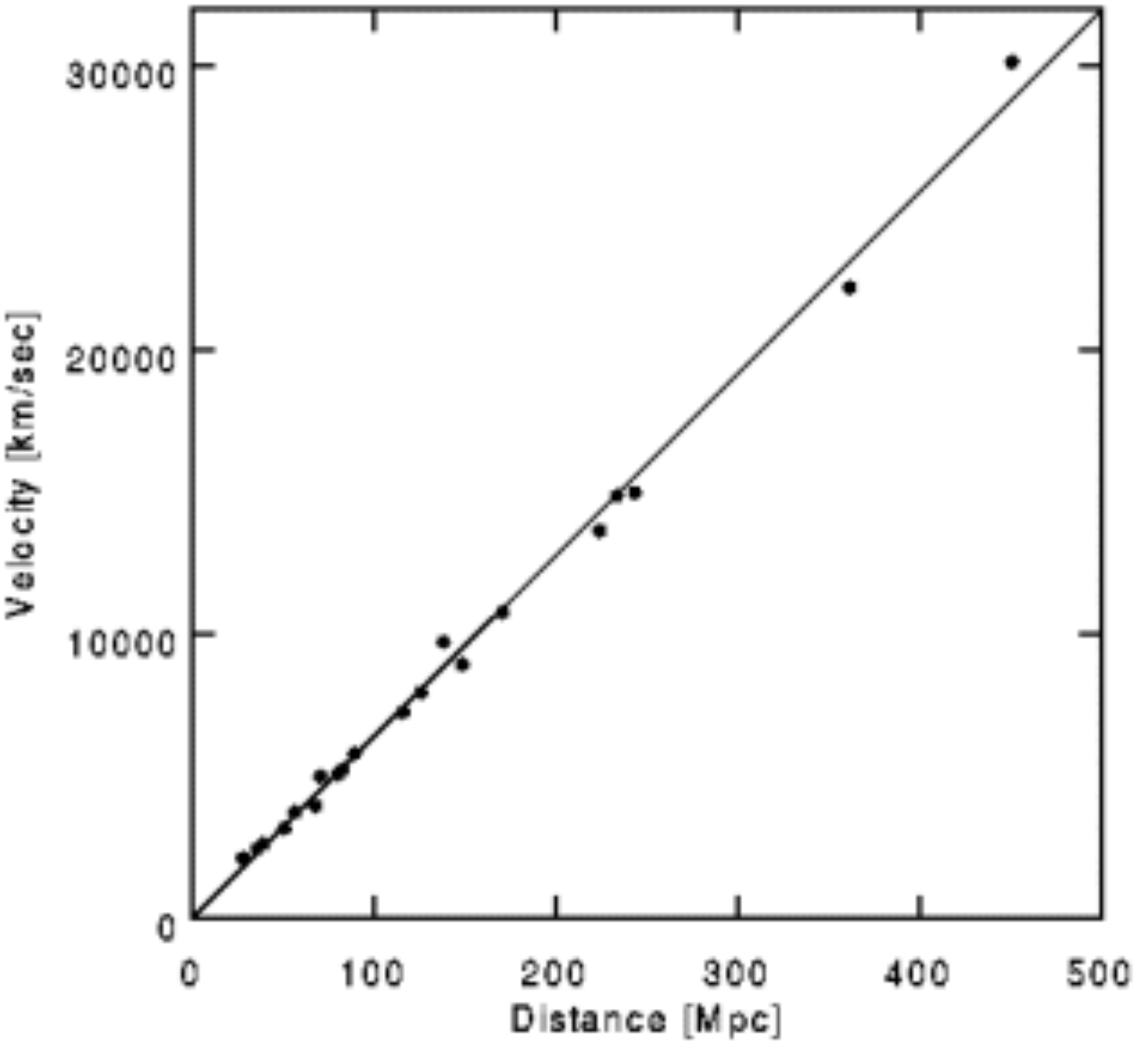
2

LEGGE DI HUBBLE

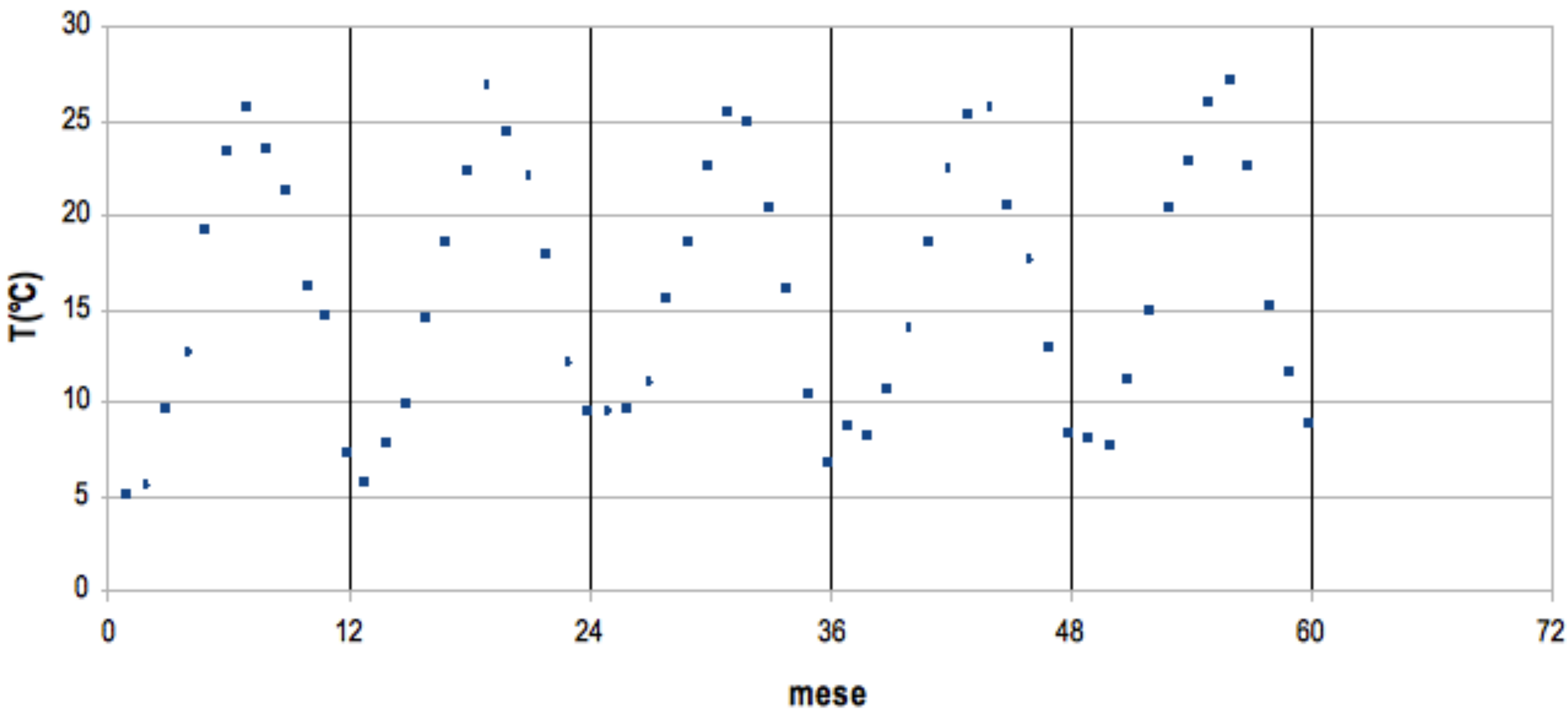


2

LEGGE DI HUBBLE



3 TEMPERATURE A ROMA 2005-2009



Scrivete una formula che descriva l'andamento annuo della temperatura a Roma in funzione della data.

3

TEMPERATURE A ROMA 2005-2009

$$\begin{cases} T_{\min} \approx 7\ °\mathrm{C} \\ \mathrm{T}_{\max} \approx 27\ °\mathrm{C} \end{cases} \to \bar{T} = \frac{27+7}{2} = 17\ °\mathrm{C}$$

$$\boxed{y = y_0 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}x + \phi\right)}$$

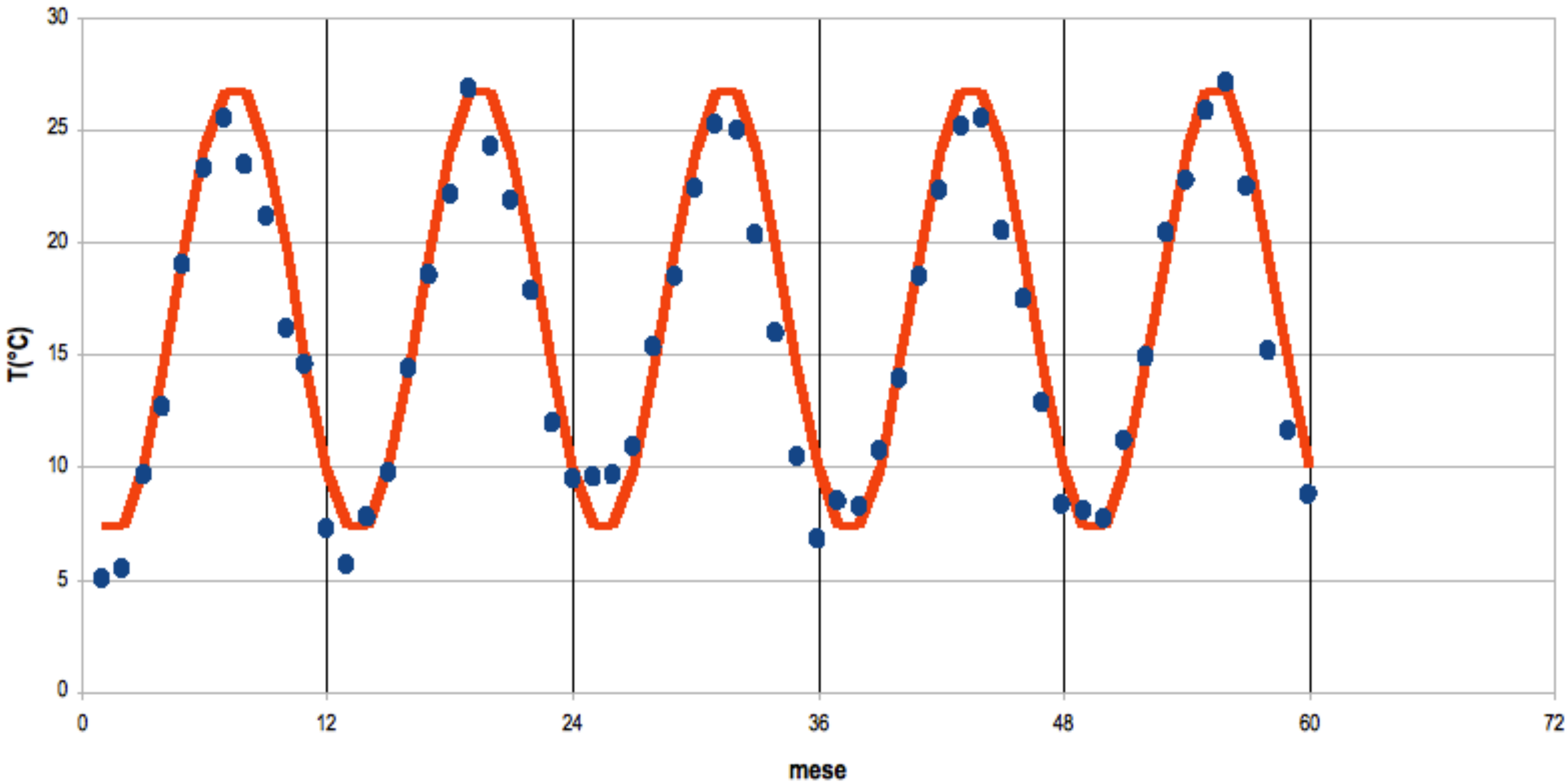
$$A = \frac{27-7}{2} = 10\ °\mathrm{C}$$

$$P = 12 \text{ mesi} = 365 \text{ giorni}$$

$$T \text{ max tra luglio e agosto: } \phi = -\frac{7{,}5}{12} \cdot 2\pi$$

3

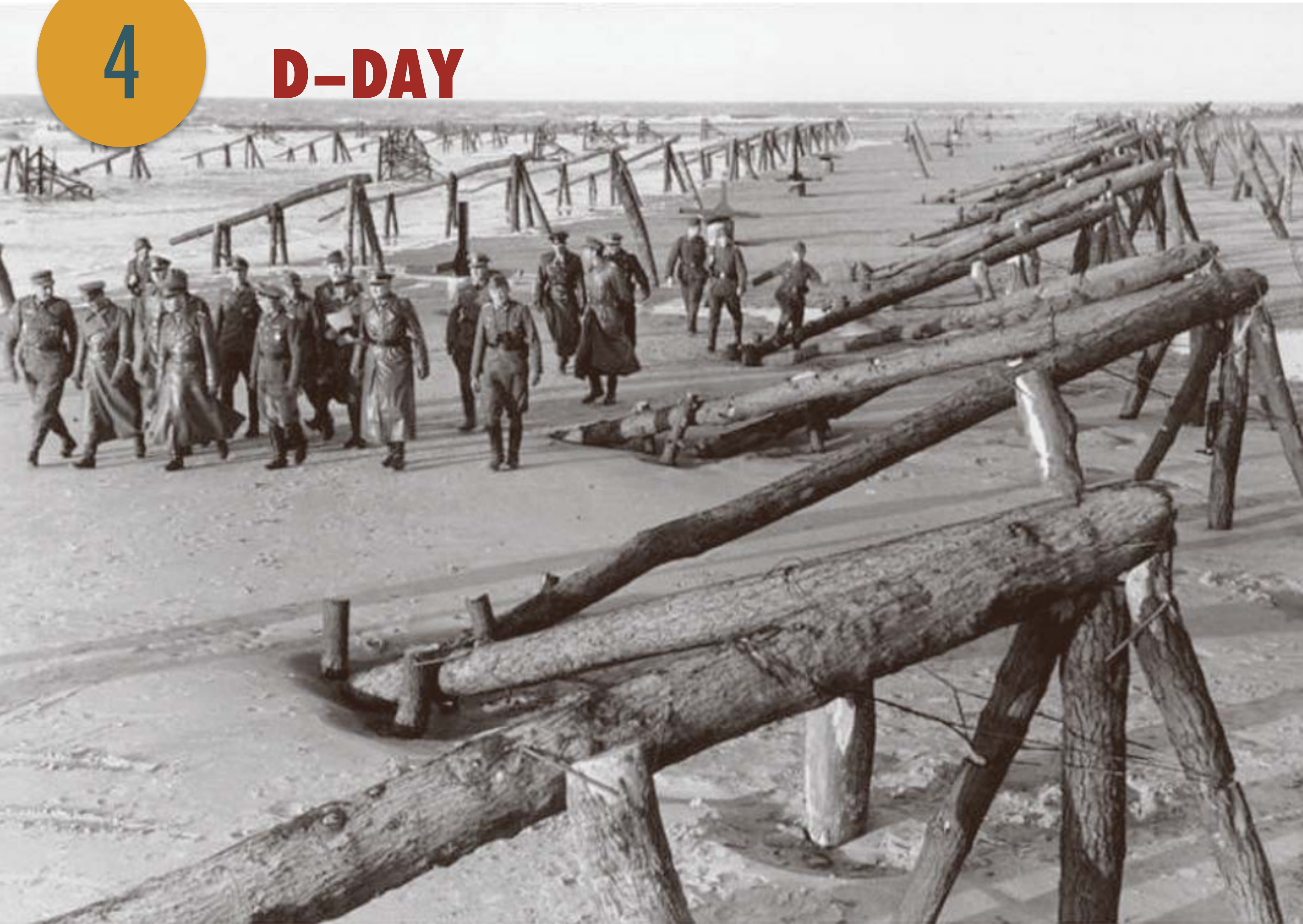
TEMPERATURE A ROMA 2005-2009



$$T = \bar{T} + A \cdot \cos\left(2\pi \frac{x}{P} + \phi\right) = 17 + 10 \cdot \cos\left(2\pi\left(\frac{x - 7{,}5}{12}\right)\right)$$

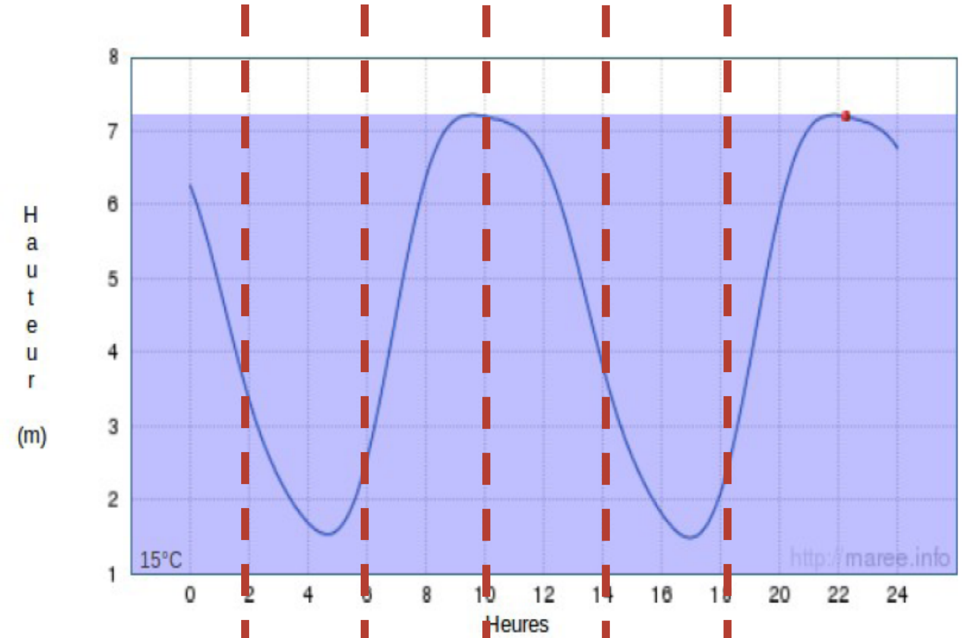
4

D-DAY



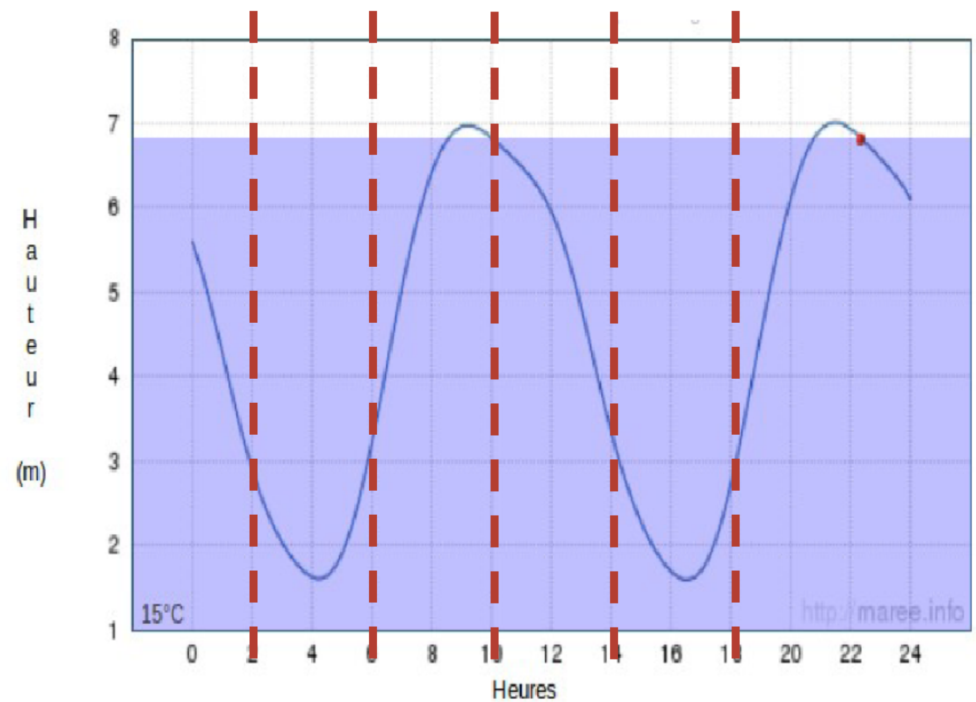
4

COURSEULLES SUR MER



30 km di distanza

GRANDCAMP



4

LA FUNZIONE ESPONENZIALE

$$\boxed{\Delta N = a \cdot N \cdot \Delta t}$$

- Crescita di una popolazione
- Decadimento radioattivo
- Permanenza di un farmaco (clearance)
- Rendimento di un conto corrente
- L'invenzione degli scacchi
- La crescita economica

5 LA CAFFEINA

447 **Non riesco a dormire!** Se si beve caffè, per calcolare approssimativamente la quantità totale di caffeina presente nel corpo al passare del tempo si può utilizzare la formula $C_1 = C_0 e^{-\frac{3}{20}t}$, dove il tempo t è espresso in ore e C_0 è la quantità di caffeina che si assume all'istante t_0 (la formula deriva da valori medi, infatti l'assorbimento della caffeina dipende fortemente dalle caratteristiche di ogni singola persona).

a. Una tazzina di caffè contiene circa 60 mg di caffeina; quanto tempo ci vuole per portare a 40 mg la quantità di caffeina nel corpo di chi la assume?

b. Rappresenta graficamente la funzione che indica come varia la quantità di caffeina presente al variare del tempo se si bevono due tazzine di caffè una subito dopo l'altra. [circa 2 ore e 42 minuti]

6

UN MODELLO PER LA SECREZIONE DELL'INSULINA

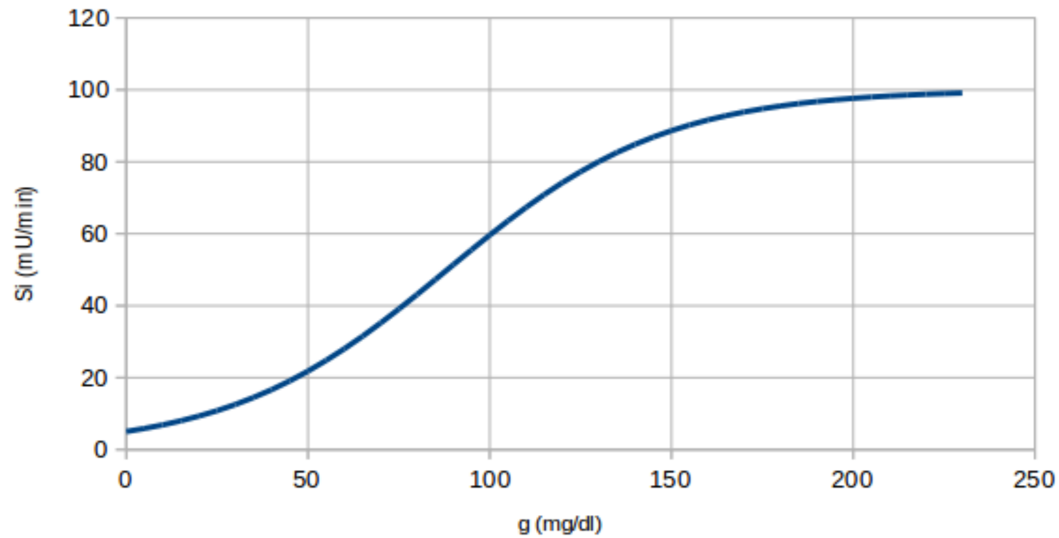
1 **Un modello per la secrezione dell'insulina**

Nel corpo umano la concentrazione di glucosio nel sangue, detta *glicemia*, è normalmente compresa fra 60 mg/dL e 110 mg/dL quando si è a digiuno. Il glucosio è assorbito dai tessuti più rapidamente quando la glicemia è alta, più lentamente quando è bassa. Questo processo di assorbimento più o meno rapido è regolato dall'*insulina*, un ormone secreto dal pancreas. Se la glicemia è alta, l'insulina è prodotta più rapidamente per accelerare l'assorbimento del glucosio; se la glicemia è bassa, la produzione è più lenta, per un minore assorbimento.

In un modello semplificato, la rapidità di secrezione dell'insulina S in funzione della glicemia g è espressa dalla funzione:

$$S(g) = \frac{100}{1 + 19e^{-\frac{g}{30}}},$$

con $g \geq 0$ misurata in mg/dL e S misurata in mU/min, cioè in milliUnità al minuto.



$$S_i(g) = \frac{100}{1,0 + 19 \cdot e^{-g/30}} \text{ per } g \geq 0$$

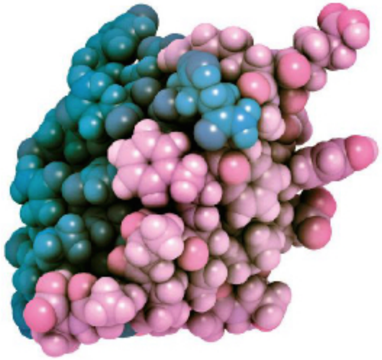
6 UN MODELLO PER LA SECREZIONE DELL'INSULINA

a. Perché è stata posta la condizione $g \geq 0$ se la funzione matematica $S(g)$ può essere calcolata per qualsiasi valore di g? Ritieni che dovrebbero essere poste altre condizioni sul valore di g?
Rappresenta il grafico di $S(g)$ per $g \geq 0$.

6

UN MODELLO PER LA SECREZIONE DELL'INSULINA

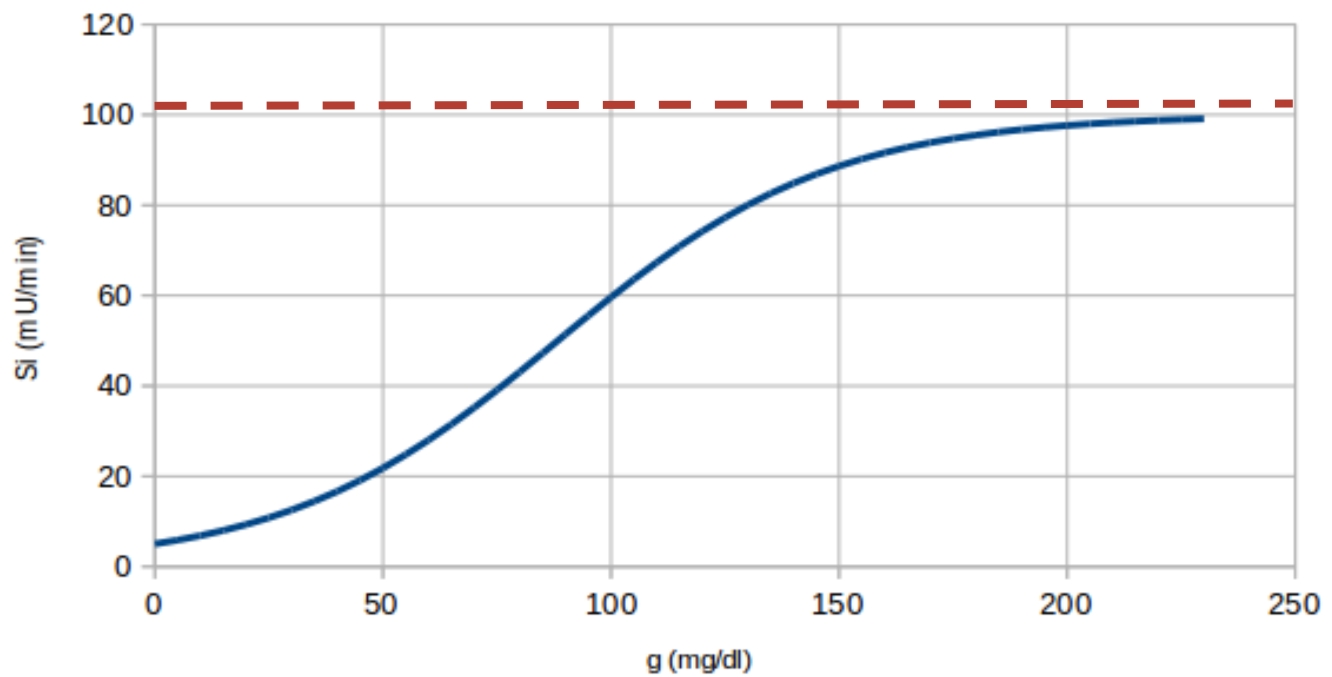
b. Qual è, secondo il modello, la massima rapidità possibile di secrezione dell'insulina da parte del pancreas? Per quale valore della glicemia la rapidità di secrezione dell'insulina è pari al 90% della potenzialità massima?



6

UN MODELLO PER LA SECREZIONE DELL'INSULINA

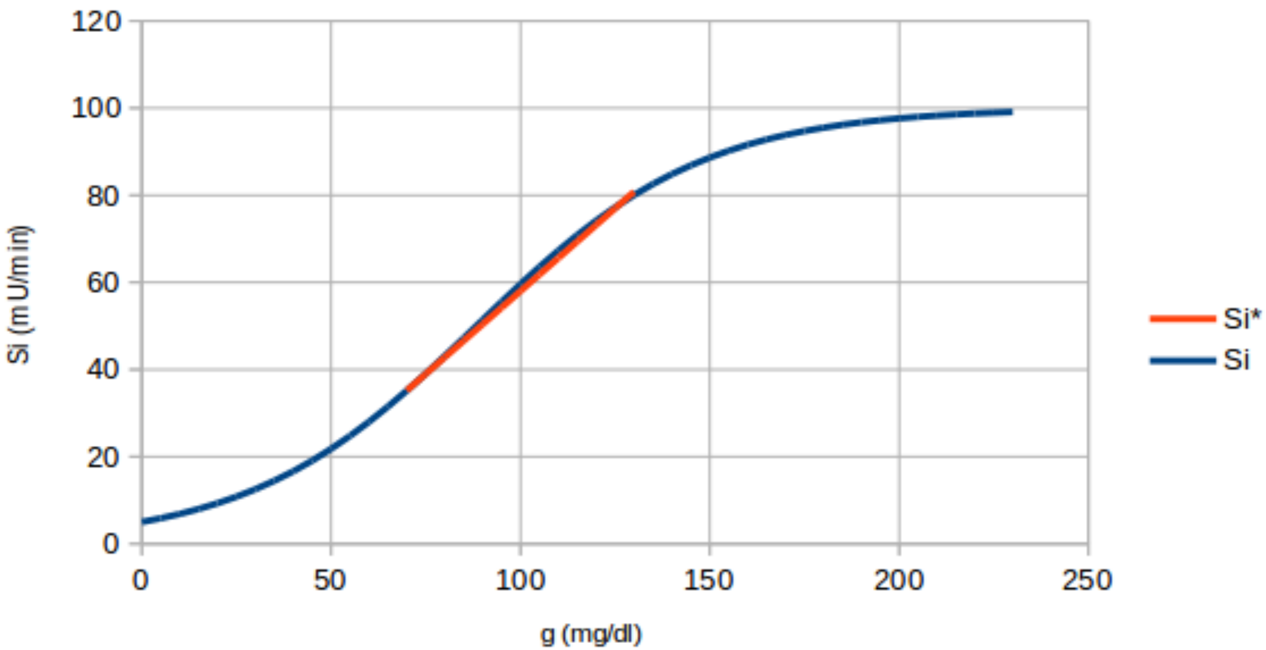
c. Esiste un valore della glicemia in corrispondenza del quale è massimo l'aumento della rapidità di secrezione dell'insulina in seguito a un aumento, piccolo quanto si vuole, della glicemia stessa. A quale punto del grafico corrisponde? Determina il valore.



6

UN MODELLO PER LA SECREZIONE DELL'INSULINA

d. In condizioni fisiologiche normali la glicemia non scende sotto i 60 mg/dL. Si vuole studiare la rapidità di secrezione dell'insulina per $60 \leq g \leq 130$, cioè i valori che si hanno a digiuno e dopo un pasto non abbondante, utilizzando una retta anziché la funzione del modello $S(g)$. Nello stesso riferimento cartesiano del grafico di $S(g)$ disegna dunque la retta $\bar{s}(g)$ che assume lo stesso valore di $S(g)$ per $g = 60$ mg/dL, e la pendenza in tale punto coincide con quella di $S(g)$.
Di quanto differiscono percentualmente le previsioni sulla rapidità di secrezione dell'insulina per $g = 130$ mg/dL da parte di $S(g)$ e di $\bar{s}(g)$?



COME FACCIAMO A TRATTARE SIA MODELLIZZAZIONE CHE CONTENUTI NEL TEMPO DISPONIBILE?

COME POSSIAMO PREPARARE GLI STUDENTI?

CHE PROBLEMI DOBBIAMO ASPETTARCI NEI PROSSIMI ANNI?

LA PROBABILITÀ

Oltre ai dadi e ai calzini spaiati

LE ASSICURAZIONI

$$\frac{\text{premio}}{\text{indennizzo}} > P = \frac{n_f}{n_{\text{tot}}}$$

Regione	Totale moto	Totale furti	Regione	Totale moto	Totale furti
Lazio	695 537	31 104	Calabria	141 345	1540
Lombardia	991 753	19431	Sardegna	118 382	1512
Sicilia	641 453	18910	Friuli Venezia Giulia	133 782	907
Campania	567 626	18625	Abruzzo	142 578	850
Liguria	371 094	8694	Marche	197 682	663
Toscana	531 654	5620	Umbria	92 665	312
Puglia	293 240	5239	Trentino Alto Adige	98 826	212
Emilia Romagna	504 095	5123	Molise	28 226	70
Piemonte	425 213	3960	Basilicata	35 641	55
Veneto	453 552	1821	Valle d'Aosta	15 676	39

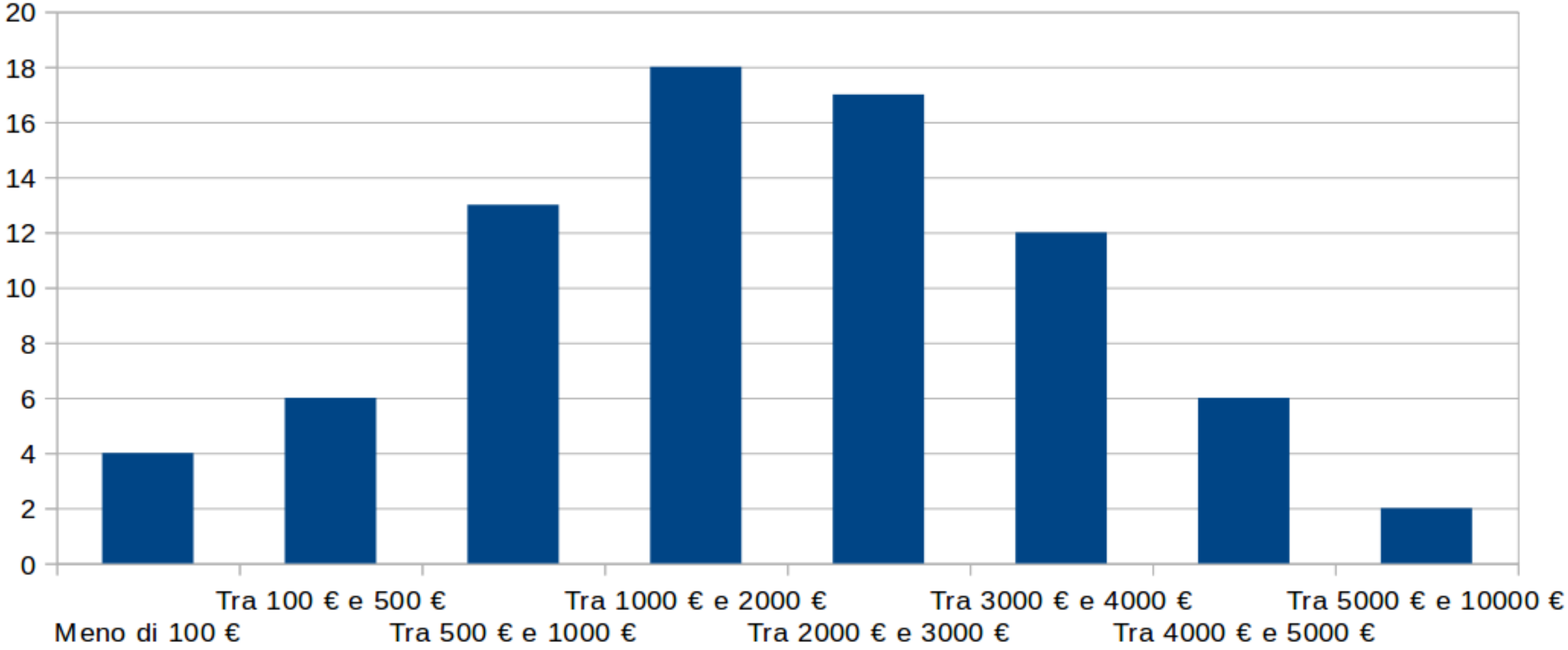
LE ASSICURAZIONI

un problema sulle distribuzioni

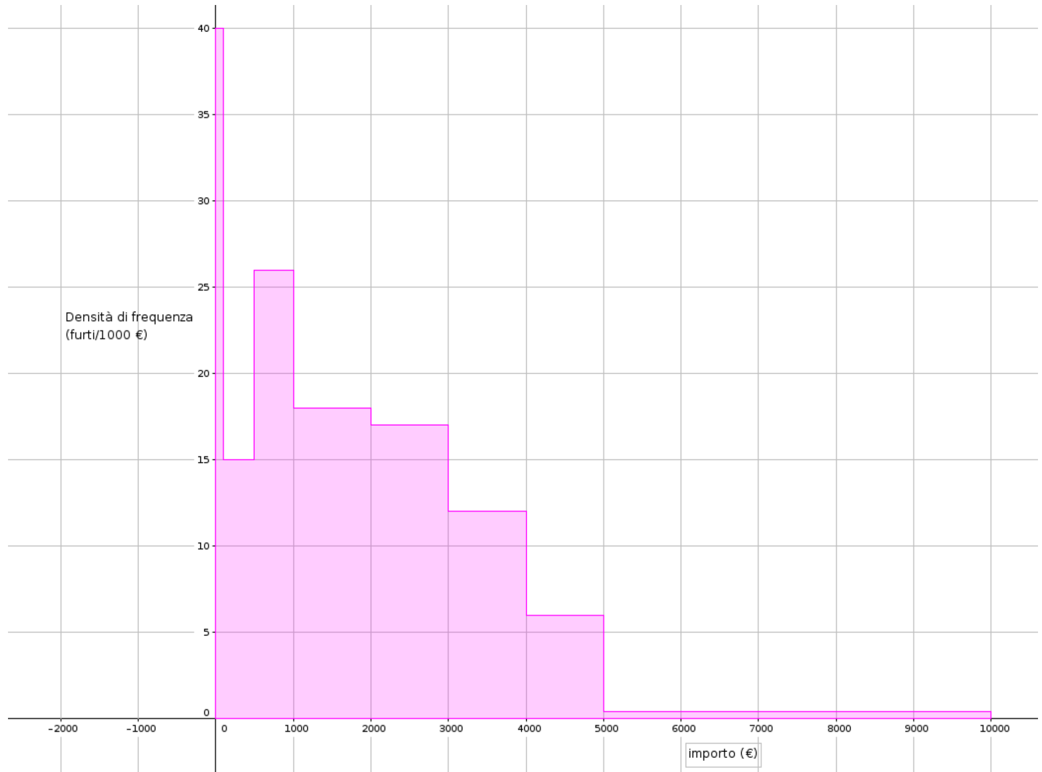
Nella città di Paperopoli abitano 4568 famiglie.
Nel 2015 ci sono stati 78 furti in appartamento e il valore della merce rubata è riportato nella tabella:

VALORE (€)	< 100	100 – 500	500 – 1000	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 10 000
NUMERO DI FURTI	4	6	13	17	18	12	6	2

A. Rappresenta i dati in un istogramma.
B. Stima il valor medio della merce rubata in un singolo furto.
C. Stima il valor medio della perdita per famiglia abitante a Paperopoli .
D. Valuta il possibile costo del premio assicurativo per una assicurazione contro il furto a Paperopoli.


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Meno di 100 €
Tra 100 € e 500 €
Tra 500 € e 1000 €
Tra 1000 € e 2000 €
Tra 2000 € e 3000 €
Tra 3000 € e 4000 €
Tra 4000 € e 5000 €
Tra 5000 € e 10000 €

A


Densità di frequenza
(furti/1000 €)
importo (€)
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−2000
−1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

VALORE (€)	< 100	100 – 500	500 – 1000	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000	4000 – 5000	5000 – 10 000	Totale
VALORE CENTRALE	50	300	750	1500	2500	3500	4500	7500	
NUMERO DI FURTI	4	6	13	17	18	12	6	2	78
VALORE TOTALE (stima)	200	1800	9750	27 000	42 500	42 000	27 000	15 000	165 250

B Importo medio per furto = 165 250 / 78 = 2119 €

C Importo medio per famiglia = 165 250 / 4568 = 36 €

D Premio > 36 €

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2000)^2}{2\cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

Quanti furti prevederebbe questa formula per un valore compreso tra 1000 € e 3000 €?

Questo risultato è compatibile con i dati?

Come si potrebbe modificare la formula per ottenere una maggiore aderenza ai dati di Paperopoli? Perché?

Come si potrebbe modificare la formula in modo che contenga il parametro *f* che rappresenta il numero delle famiglie di una città?

In tutto lo svolgimento del problema specifica esplicitamente le ipotesi alla base del tuo procedimento.

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2000)^2}{2 \cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

Quanti furti prevederebbe questa formula per un valore compreso tra 1000 € e 3000 €?

Entro ± 1σ ⟶ 0,68 x 78 =53

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2000)^2}{2\cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

Questo risultato è compatibile con i dati?

I dati hanno 35

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2000)^2}{2 \cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

Come si potrebbe modificare la formula per ottenere una maggiore aderenza ai dati di Paperopoli? Perché?

Calcolo media e varianza del campione oppure aumento empiricamente il valore di σ

Sulla base di un database più ampio, che comprende sia i dati degli anni precedenti che di altre città con caratteristiche simili a Paperopoli , uno statistico propone di calcolare il numero di furti attesi in una certa città per un valore di *x* € utilizzando la formula

$$N(x) = \frac{n}{1000\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-2000)^2}{2 \cdot 1000^2}}$$

dove *n* rappresenta il numero complessivo di furti della città.

$$\boxed{N(x) = \frac{\frac{n_{\text{tot}}}{f_{\text{tot}}} \cdot f}{1000\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2000)^2}{2 \cdot 1000^2}}}$$

Come si potrebbe modificare la formula in modo che contenga il parametro *f* che rappresenta il numero delle famiglie di una città?

Lavorare sui nessi tra teoria e descrizione del mondo

Riconoscere le regolarità anche sotto manifestazioni apparentemente diverse