Massimo Bergamini
Graziella Barozzi
Gianni Melegari

La seconda prova di matematica e fisica per i licei scientifici

PER IL COMPUTER E PER IL TABLET

L'eBook

1 REGÌSTRATI A MYZANICHELLI

Vai su **my.zanichelli.it** e regìstrati come studente

2 SCARICA BOOKTAB

- Scarica **Booktab** e installalo
- Lancia l'applicazione e fai login

3 ATTIVA IL TUO LIBRO

- Clicca su **Attiva il tuo libro**
- Inserisci la **chiave di attivazione** che trovi sul **bollino argentato** adesivo (qui accanto un esempio di bollino con chiave di attivazione)

4 CLICCA SULLA COPERTINA

Scarica il tuo libro per usarlo offline

Realizzazione editoriale:
– Redazione: Silvia Gerola, Silvia Merialdo
– Segreteria di redazione: Deborah Lorenzini e Rossella Frezzato
– Progetto grafico: Byblos, Faenza
– Composizione e impaginazione: Litoincisa Paganelli, Bologna
– Disegni: Luca Pacchiani, Piero Valli, Luca Tible
– Correzione di bozze e rilettura testi: nuova MONOGRAF snc

Contributi Matematica con Fisica:
– Revisione creativa dei testi e degli esercizi: Annalisa Castellucci, Marco Giusiano, Roberto Porcaro, Francesca Anna Riccio, Anna Titta
– Stesura degli esercizi: Stefano Accorsi, Giuseppe Ariano, Andrea Betti, Cristina Bignardi, Bruno Conti, Elisa Garagnani, Lorenzo Meneghini, Franco Nuzzi
– Coordinamento della revisione degli esercizi: Francesca Anna Riccio
– Correzione e revisione critica degli esercizi: Francesco Benvenuti, Angela Capucci, Elisa Capucci, Cristina Imperato, Francesca Anna Riccio, Elisa Targa
– Stesura degli esercizi con la calcolatrice grafica: Ercole Castagnola
– Revisione degli esercizi con la calcolatrice grafica: Cristina Arienti, Francesco Bologna, Lorenzo Zuffi

Zanichelli editore S.p.A. non ha preso accordi commerciali con le aziende produttrici di calcolatrici grafiche senza CAS.

Contributi Fisica con matematica:
– Stesura e selezione degli esercizi *Mettiti alla prova*: Raffaele Pellicelli, Steave Selvaduray, Mauro Riccardi
– Stesura degli esercizi *Verso l'esame*: Massimo Fioroni, Valentino Lacquaniti, Raffaele Pellicelli, Ferruccio Ronchetti, Steave Selvaduray, Massimo Vaghi, Luigi Verolino
– Stesura delle soluzioni dell'esempio della seconda prova di matematica e fisica pubblicato dal Ministero il 20 dicembre 2018: Enrico Turchetti, Paolo Carboni
– Correzione e revisione critica degli esercizi: Giorgio Bettineschi, Davide De Boni, Gabriella Morbidelli

Copertina:
– Progetto grafico: Miguel Sal & C., Bologna
– Ideazione: Studio 8vo, Bologna
– Realizzazione: Roberto Marchetti e Francesca Ponti
– Immagine di copertina: Artwork Studio 8vo, Bologna

Prima edizione: marzo 2019

Ristampa: **prima tiratura**

5 4 3 2 1 2019 2020 2021 2022 2023

Zanichelli garantisce che le risorse digitali di questo volume sotto il suo controllo saranno accessibili, a partire dall'acquisto dell'esemplare nuovo, per tutta la durata della normale utilizzazione didattica dell'opera. Passato questo periodo, alcune o tutte le risorse potrebbero non essere più accessibili o disponibili: per maggiori informazioni, leggi my.zanichelli.it/fuoricatalogo

---

File per sintesi vocale
L'editore mette a disposizione degli studenti non vedenti, ipovedenti, disabili motori o con disturbi specifici di apprendimento i file pdf in cui sono memorizzate le pagine di questo libro. Il formato del file permette l'ingrandimento dei caratteri del testo e la lettura mediante software screen reader. Le informazioni su come ottenere i file sono sul sito http://www.zanichelli.it/scuola/bisogni-educativi-speciali

---

Grazie a chi ci segnala gli errori
Segnalate gli errori e le proposte di correzione su **www.zanichelli.it/correzioni**.
Controlleremo e inseriremo le eventuali correzioni nelle ristampe del libro.
Nello stesso sito troverete anche l'errata corrige, con l'elenco degli errori e delle correzioni.

Zanichelli editore S.p.A. opera con sistema qualità
certificato CertiCarGraf n. 477 secondo la norma UNI EN ISO 9001:2015

Questo libro è stampato su carta che rispetta le foreste.
www.zanichelli.it/chi-siamo/sostenibilita

Stampa: Grafica Veneta S.p.A.
Via Malcanton, 2 - 35100 - Trebaseleghe (PD)
per conto di Zanichelli editore S.p.A.
Via Irnerio 34, 40126 Bologna

Massimo Bergamini
Graziella Barozzi
Gianni Melegari

La seconda prova di matematica e fisica per i licei scientifici

ZANICHELLI

SOMMARIO

MATEMATICA CON FISICA

Mettiti alla prova

Esercizi divisi per argomento, per allenarsi e ripassare

Verso l'esame

Tre prove complete con un problema e quattro quesiti, per prepararsi
alla seconda prova di matematica e fisica all'esame

FISICA CON MATEMATICA

Mettiti alla prova

Esercizi divisi per argomento, per allenarsi e ripassare

Verso l'esame

Tre prove complete con un problema e quattro quesiti, per prepararsi alla seconda prova di matematica e fisica all'esame

Esempio di prova pubblicato dal Ministero il 20 dicembre 2018

Esempio di prova di matematica e fisica e risoluzione su
► online.zanichelli.it/provamatematicafisica

Quadro di riferimento MATEMATICA

Nuclei tematici fondamentali	Obiettivi della prova
ARITMETICA E ALGEBRA • Rappresentazioni dei numeri e operazioni aritmetiche • Algebra dei polinomi • Equazioni, disequazioni e sistemi	• Utilizzare le diverse rappresentazioni dei numeri, riconoscendone l'appartenenza agli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Interpretare geometricamente le operazioni di addizione e di moltiplicazione in $\mathbb{C}$. • Mettere in relazione le radici di un polinomio, i suoi fattori lineari ed i suoi coefficienti. Applicare il principio d'identità dei polinomi. • Risolvere, anche per via grafica, equazioni e disequazioni algebriche (e loro sistemi) fino al 2° grado ed equazioni o disequazioni ad esse riconducibili.
GEOMETRIA EUCLIDEA E CARTESIANA • Triangoli, cerchi, parallelogrammi • Funzioni circolari • Sistemi di riferimento e luoghi geometrici • Figure geometriche nel piano e nello spazio	• Utilizzare i risultati principali della geometria euclidea, in particolare la geometria del triangolo e del cerchio, le proprietà dei parallelogrammi, la similitudine e gli elementi fondamentali della geometria solida; dimostrare proposizioni di geometria euclidea, con metodo sintetico o analitico. • Servirsi delle funzioni circolari per esprimere relazioni tra gli elementi di una data configurazione geometrica. • Scegliere opportuni sistemi di riferimento per l'analisi di un problema. • Determinare luoghi geometrici a partire da proprietà assegnate. • Porre in relazione equazioni e disequazioni con le corrispondenti parti del piano. • Applicare simmetrie, traslazioni e dilatazioni riconoscendone i rispettivi invarianti. • Studiare rette, coniche e loro intersezioni nel piano nonché rette, piani, superfici sferiche e loro intersezioni nello spazio utilizzando le coordinate cartesiane.
INSIEMI E FUNZIONI • Proprietà delle funzioni e delle successioni • Funzioni e successioni elementari • Calcolo differenziale • Calcolo integrale	• Analizzare le proprietà di iniettività, suriettività, invertibilità di funzioni definite su insiemi qualsiasi. Riconoscere ed applicare la composizione di funzioni. • Analizzare le proprietà di parità, monotonia, periodicità di funzioni definite sull'insieme dei numeri reali o su un suo sottoinsieme. • Individuare le caratteristiche fondamentali e i parametri caratteristici delle progressioni aritmetiche e geometriche e delle funzioni polinomiali, lineari a tratti, razionali fratte, circolari, esponenziali e logaritmiche, modulo e loro composizioni semplici. • A partire dall'espressione analitica di una funzione, individuare le caratteristiche salienti del suo grafico e viceversa; a partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici di funzioni correlate: l'inversa (se esiste), la reciproca, il modulo, o altre funzioni ottenute con trasformazioni geometriche. • Discutere l'esistenza e determinare il valore del limite di una successione definita con un'espressione analitica o per ricorrenza. • Discutere l'esistenza e determinare il valore del limite di una funzione, in particolare i limiti, per x che tende a 0, di $\mathrm{sen}(x)/x$, $(e^x - 1)/x$ e limiti ad essi riconducibili. • Riconoscere le caratteristiche di continuità e derivabilità di una funzione e applicare i principali teoremi riguardanti la continuità e la derivabilità. • Determinare la derivata di una funzione ed interpretarne geometricamente il significato. • Applicare il calcolo differenziale a problemi di massimo e minimo. • Analizzare le caratteristiche della funzione integrale di una funzione continua e applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale. • A partire dal grafico di una funzione, tracciare i grafici della sua derivata e di una sua funzione integrale. • Interpretare geometricamente l'integrale definito e applicarlo al calcolo di aree. • Determinare primitive di funzioni utilizzando integrali immediati, integrazione per sostituzione o per parti.
PROBABILITÀ E STATISTICA • Probabilità di un evento • Dipendenza probabilistica • Statistica descrittiva	• Applicare gli elementi di base del calcolo combinatorio. • Determinare la probabilità di un evento utilizzando i teoremi fondamentali della probabilità, il calcolo combinatorio, il calcolo integrale. • Valutare la dipendenza o l'indipendenza di eventi casuali. • Analizzare la distribuzione di una variabile casuale o di un insieme di dati e determinarne valori di sintesi, quali media, mediana, deviazione standard, varianza.

Quadro di riferimento FISICA

Nuclei tematici fondamentali	Obiettivi della prova
MISURA E RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE • Incertezza di misura • Rappresentazioni di grandezze fisiche	• Rappresentare, anche graficamente, il valore di una grandezza fisica e la sua incertezza nelle unità di misura appropriate. Rappresentare e interpretare, tramite un grafico, la relazione tra due grandezze fisiche. • Valutare l'accordo tra i valori sperimentali di grandezze fisiche in relazione alle incertezze di misura al fine di descrivere correttamente il fenomeno osservato.
SPAZIO, TEMPO E MOTO • Grandezze cinematiche • Sistemi di riferimento e trasformazioni • Moto di un punto materiale e di un corpo rigido • Cinematica classica e relativistica	• Determinare e discutere il moto di punti materiali e corpi rigidi sotto l'azione di forze. • Utilizzare il concetto di centro di massa nello studio del moto di due punti materiali o di un corpo rigido. • Utilizzare le trasformazioni di Galileo o di Lorentz per esprimere i valori di grandezze cinematiche e dinamiche in diversi sistemi di riferimento. • Determinare e discutere il moto relativistico di un punto materiale sotto l'azione di una forza costante o di una forza di Lorentz. • Applicare le relazioni relativistiche sulla dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze e individuare in quali casi si applica il limite non relativistico.
ENERGIA E MATERIA • Lavoro ed energia • Conservazione dell'energia • Trasformazione dell'energia • Emissione, assorbimento e trasporto di energia	• Determinare l'energia cinetica di un punto materiale in moto e l'energia potenziale di un punto materiale sottoposto a forze. • Mettere in relazione la variazione di energia cinetica, di energia potenziale e di energia meccanica con il lavoro fatto dalle forze agenti. • Utilizzare la conservazione dell'energia nello studio del moto di punti materiali e di corpi rigidi e nelle trasformazioni tra lavoro e calore.
ONDE E PARTICELLE • Onde armoniche sonore ed elettromagnetiche • Fenomeni di interferenza • Dualismo onda-particella	• Determinare la densità di energia di campi elettrici e magnetici e applicare il concetto di trasporto di energia da parte di un'onda elettromagnetica. • Applicare l'equivalenza massa-energia in situazioni concrete tratte da esempi di decadimenti radioattivi, reazioni di fissione o di fusione nucleare. • Interpretare lo spettro di emissione del corpo nero utilizzando la legge di distribuzione di Planck. • Determinare le frequenze emesse per transizione tra i livelli energetici dell'atomo di Bohr. • Determinare la lunghezza d'onda, la frequenza, il periodo, la fase e la velocità di un'onda armonica e le relazioni tra queste grandezze. • Discutere fenomeni di interferenza con riferimento a onde armoniche sonore o elettromagnetiche emesse da due sorgenti coerenti. • Discutere, anche quantitativamente, il dualismo onda-corpuscolo. • Descrivere la condizione di quantizzazione dell'atomo di Bohr usando la relazione di De Broglie. • Applicare l'equazione di Einstein dell'effetto fotoelettrico.
FORZE E CAMPI • Rappresentazione di forze mediante il concetto di campo • Campo gravitazionale • Campo elettromagnetico • Induzione elettromagnetica	• Descrivere l'azione delle forze gravitazionali elettriche e magnetiche mediante il concetto di campo. Rappresentare un campo elettrico o magnetico utilizzando le linee di forza. • Utilizzare il teorema di Gauss per determinare le caratteristiche di campi elettrici generati da distribuzioni simmetriche di cariche e per discutere il comportamento delle cariche elettriche nei metalli. • Utilizzare il teorema di Ampère per determinare le caratteristiche di un campo magnetico generato da un filo percorso da corrente e da un solenoide ideale. • Descrivere e interpretare fenomeni di induzione elettromagnetica e ricavare correnti e forze elettromotrici indotte. • Determinare la forza agente su un filo di lunghezza infinita percorso da corrente in presenza di un campo magnetico, la forza tra due fili di lunghezza infinita paralleli percorsi da corrente e la forza che agisce su un ramo di un circuito in moto in un campo magnetico per effetto della corrente indotta. Determinare il momento delle forze magnetiche agenti su una spira percorsa da corrente in presenza di un campo magnetico uniforme.

Griglia integrata di MATEMATICA e FISICA

Indicatore *(correlato agli obiettivi della prova)*	**Punteggio massimo per ogni indicatore (totale 20)**
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	5
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	6
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	5
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	4

Fonte

https://www.miur.gov.it/-/esami-di-stato-del-secondo-ciclo-di-istruzione-a-s-2018-2019-d-m-769-del-26-novembre-2018

Indicatori e descrittori

Secondo le *Indicazioni per la definizione delle griglie di valutazione*, gli indicatori sono declinati in descrittori, la cui definizione è compito della Commissione di Esame.

https://www.miur.gov.it/documents/20182/0/Indicazioni+metodologiche+e+operative_+(3).pdf/f1d56388-9adc-4649-af82-dc0cb37d2c3d

Matematica con fisica

di Massimo Bergamini,
Graziella Barozzi

con la collaborazione di
Andrea Betti e Lorenzo Meneghini

METTITI ALLA PROVA

Successioni e funzioni

1 Usa il principio di induzione per dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale:

$$7 + 11 + 15 + 19 + \ldots + (4n + 3) = 2n^2 + 5n.$$

2 Dimostra per induzione che per ogni $n \geq 2$ vale la formula:

$$\frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3n^2 - n - 2}{4n(n+1)}.$$

3 Considera la successione $S_n = n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ in cui il termine generale è costituito dalla somma dei cubi di tre numeri naturali consecutivi.
Usa il principio di induzione per dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, S_n è divisibile per 9.

4 **ESERCIZIO SVOLTO** Usa il principio di induzione per dimostrare che il numero d_n delle diagonali di un poligono convesso di n lati, con $n \geq 4$, è:

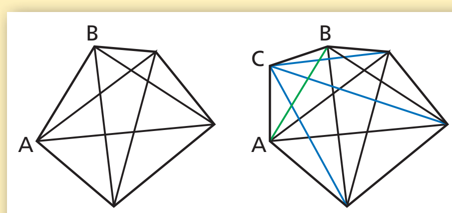
$$d_n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

In base al risultato precedente, ricava in funzione di n, il numero s_n di strette di mano che si possono scambiare tra loro n persone sedute intorno a un tavolo.

Primo passo. Per $n = 4$ l'ipotesi è verificata; infatti ogni quadrilatero convesso ha 2 diagonali e $d_4 = \frac{4(4-3)}{2} = 2$.

Secondo passo. Supponiamo sia vero che un poligono convesso con n lati abbia $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$ diagonali e dimostriamo che, se aggiungiamo un lato al poligono, che così ha $n + 1$ lati, il numero delle sue diagonali diventa:

$$d_{n+1} = \frac{(n+1)[(n+1) - 3]}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$



Passare da un poligono di n lati a un poligono di $n + 1$ lati equivale a sostituire un lato del poligono iniziale con un triangolo. Con riferimento alla figura, per esempio, possiamo sostituire il lato AB con i lati AC e CB.
Alle diagonali del poligono iniziale, che per ipotesi induttiva sono d_n, si aggiungono tutte le diagonali uscenti dal vertice aggiunto C che sono $n - 2$, e la diagonale AB. In tutto perciò il numero di diagonali del poligono con $n + 1$ lati è:

$$d_{n+1} = d_n + n - 2 + 1 = \frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Poiché sono vere entrambe le condizioni del principio di induzione concludiamo che $\forall n \geq 4$ il numero di diagonali di un poligono convesso di n lati è $\frac{n(n-3)}{2}$.

Il problema di determinare il numero s_n di strette di mano che si possono scambiare tra loro n persone sedute intorno a un tavolo è equivalente al problema di contare i segmenti che congiungono i vertici di un poligono convesso di n lati; questi sono i lati e le diagonali del poligono, quindi:

$$s_n = n + d_n = n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

5 Considera la successione di numeri 0, 2, 6, 12, …, $n^2 - n$, definita per $n \geq 1$ e indica con S_n la somma dei primi n elementi della sequenza, per $n \geq 2$. Dimostra per induzione su n che, per ogni $n \geq 2$, vale:

$$S_n = \frac{n^3 - n}{3}.$$

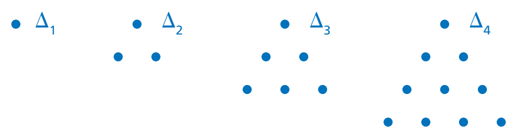
6 Dimostra, usando il principio di induzione, che la disuguaglianza $1 + 2n \leq 3^n$ vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

7 Verifica per induzione su n che per ogni numero naturale $n \geq 9$ vale: $n! > 4^n$.

8 Dimostra, usando il principio di induzione, che per ogni $n \geq 2$ vale:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

9 I numeri triangolari Δ_n in figura sono costituiti dalle somme dei primi numeri interi positivi, a partire da 1.



a. Usa il principio di induzione per verificare che per ogni $n \geq 1$ vale $\Delta_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$.

b. Un numero si dice tetraedrico se è la somma dei primi n numeri triangolari. Dimostra, usando l'induzione, che l'n-simo numero tetraedrico T_n è dato dall'espressione:

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \text{ con } n \geq 1.$$

10 **ESERCIZIO SVOLTO** Considera la successione $a_n = 2^{n+1} - 3$, definita per $n \geq 1$.

a. Verifica che a_n soddisfa la regola ricorsiva $a_n = 2a_{n-1} + 3$.

b. Qual è il minimo valore di n per cui $a_n > 600$?

---

a. Scriviamo l'espressione di a_{n-1}:

$$a_{n-1} = 2^{(n-1)+1} - 3 = 2^n - 3.$$

Poiché:

$$2a_{n-1} + 3 = 2(2^n - 3) + 3 = 2^{n+1} - 6 + 3 = 2^{n+1} - 3 = a_n,$$

la successione a_n soddisfa la regola ricorsiva.

b. Per trovare il minimo valore di n per cui $a_n > 600$ utilizziamo la definizione analitica della successione e risolviamo la disequazione:

$$2^{n+1} - 3 > 600 \rightarrow 2^{n+1} > 603 \rightarrow (n+1)\ln 2 > \ln 603 \rightarrow n + 1 > \frac{\ln 603}{\ln 2} \rightarrow n > \frac{\ln 603}{\ln 2} - 1.$$

Dal momento che $\dfrac{\ln 603}{\ln 2} - 1 \simeq 8{,}24$ e che $n \in \mathbb{N}$, il minimo valore di n per cui $a_n > 600$ è $n = 9$.

11 Scrivi la successione $a_n = 3n + 7$, con $n \in \mathbb{N}$, in forma ricorsiva.

12 Considera la successione $a_n = 2n + 10$, per $n \geq 1$.

a. Scrivi i primi 5 termini della successione.

b. Se possibile, scrivi in forma ricorsiva la successione.

13 Considera la successione definita per ricorsione:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = 2 + \dfrac{2}{a_n} \end{cases}.$$

a. Verifica che per ogni $n \geq 1$ si ha $2 \leq a_n \leq 3$.

b. Sapendo che la successione è convergente, calcola $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

14 Considera la successione a_n definita per ricorsione ponendo:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n^2+3n+2} \end{cases}.$$

a. Verifica, usando l'induzione, che $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ per ogni $n \geq 1$.

b. Calcola il $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

15 È data la successione a_n definita per ricorsione da:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = a_n + n + 1 \end{cases}.$$

Considera la successione $b_n = a_n + a_{n-1}$ definita per $n \geq 1$.

a. Verifica che $b_{n+1} - b_n = 2n + 1$, per ogni $n \geq 1$.

b. Verifica, usando il principio di induzione, che $b_n = n^2$ per ogni $n \geq 1$.

16 Mattia apre un conto nella banca del suo paese e stringe un patto con il padre. Se alla fine di ogni mese riuscirà a raddoppiare la quota contenuta nel suo conto corrente, rispetto a quanto depositato all'inizio del mese, il padre aggiungerà € 4 al totale. Indica con x la somma depositata all'inizio da Mattia e immagina che ogni mese Mattia raggiunga il suo obiettivo.

a. Scrivi in forma ricorsiva l'espressione della successione s_n che rappresenta la somma depositata sul conto corrente di Mattia all'inizio di ogni mese.

b. Qual è la minima somma x che consente a Mattia di avere almeno € 400 nel proprio conto corrente dopo quattro mesi?

RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

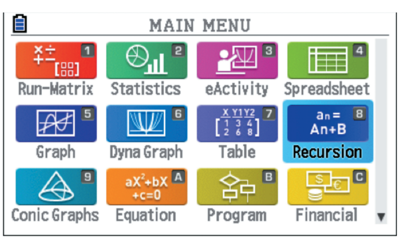
Visualizzare una successione

Studiamo il carattere della successione:

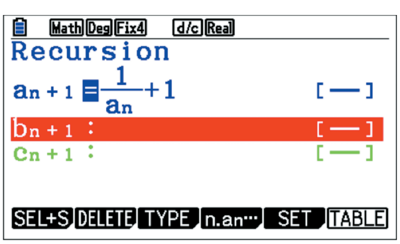
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + 1 \end{cases}.$$

▶ Rappresentare i primi venti termini della successione.

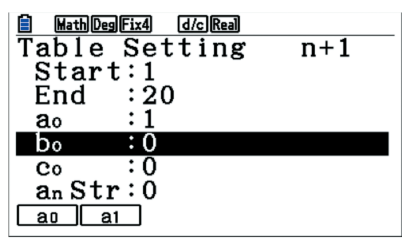
Dal menu principale clicchiamo su *Recursion*.



Nella schermata che visualizziamo, inseriamo la successione $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n} + 1$.

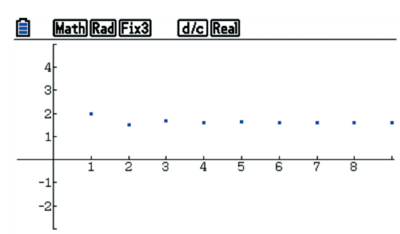


Chiediamo di visualizzare i primi 20 termini a partire da a_0 tramite il tasto *F5*.

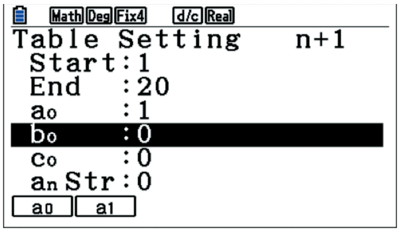


Premiamo due volte *EXIT* e poi due volte *F6* e otteniamo la seguente schermata.

Sull'asse delle ascisse si trovano gli indici n e sull'asse delle ordinate i valori a_n.

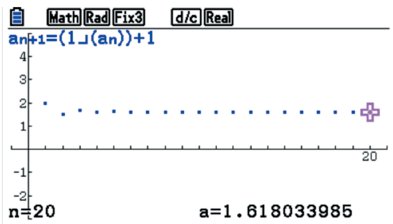


Per visualizzare più termini della successione dobbiamo modificare le impostazioni della finestra di visualizzazione. Scegliamo quindi l'opzione *Zoom*.

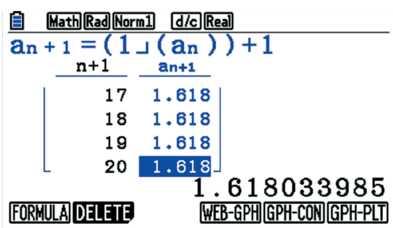


► Determinare i valori della successione.

Se inseriamo il cursore tramite il comando *Trace*, possiamo leggere i diversi valori della successione, come mostra la seguente schermata.

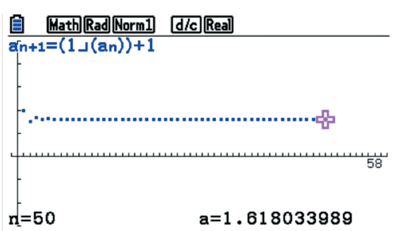


Notiamo che, per esempio, a $n = 20$ corrisponde il valore 1,62.
Se vogliamo ricavare i valori con una maggiore precisione, possiamo premere *F6* e scorrere il cursore per visualizzare, per esempio, il valore per $n = 20$.

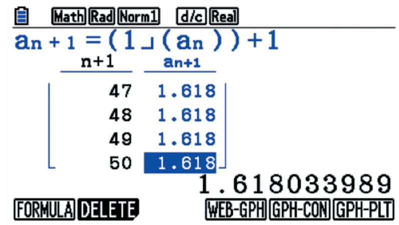


► Rappresentare i primi cinquanta termini della successione.

Vediamo cosa succede se chiediamo di visualizzare i primi 50 termini, invece di limitarci ai soli primi 20 termini.



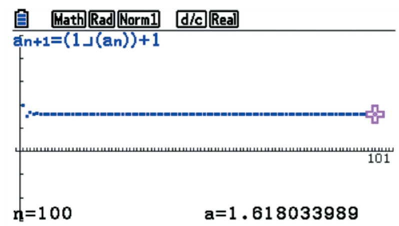
La successione sembra tendere a un limite finito. Otteniamo una parziale conferma trovando i valori di alcuni termini della successione al crescere dell'indice n.

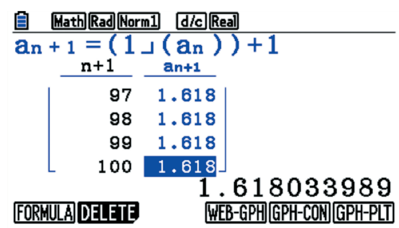


Otteniamo sempre il valore approssimato di 1,618.

► Rappresentare i primi cento termini della successione.

Proviamo ad aumentare nuovamente i termini fino a 100.





Il valore della successione sembra stabilizzarsi attorno al valore approssimato di 1,618033989.

Limiti e continuità

17 Considera la funzione $f(x) = \dfrac{2x + \sin x}{|x| + \cos^2 x}$.

a. Stabilisci se la funzione è pari o dispari oppure né pari né dispari.

b. Calcola, se esistono, i seguenti limiti: $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

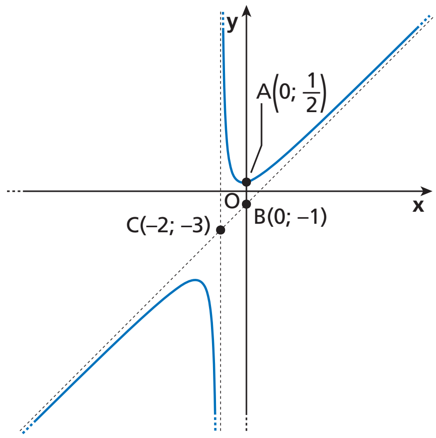
c. Il grafico della funzione ammette asintoti verticali? E asintoti orizzontali?

[a) dispari; b) $2, -2$; c) $y = \pm 2$]

18 LEGGI IL GRAFICO Il grafico a fianco rappresenta la funzione

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$$

e i suoi asintoti.



a. Determina i valori dei parametri reali a, b, c, d, e.

b. Traccia il grafico qualitativo della funzione $g(x) = |f(x)|$ e scrivi le equazioni dei suoi asintoti.

c. Studia la continuità e il segno della funzione $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

d. Calcola, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) \arctan x; \quad \lim_{x \to -2^-} f(x) \arctan x;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan 2x}{f(x)}; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{\arctan x}.$$

$\left[\text{a) } a = c, b = c, c \neq 0, d = c, e = 2c; \text{ b) } y = x - 1, y = -x + 1, x = -2; \text{ d) } -\infty, +\infty, 0, -\dfrac{2}{\pi}\right]$

---

19 Determina i valori dei parametri k e h in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k\left(x - \dfrac{3}{2}\right) & \text{se } x < 2 \\ h & \text{se } x = 2 \\ \dfrac{1 - \cos(4 - x^2)}{\ln(x - 2)} - 6 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

a. sia continua in $x = 2$;

b. abbia in $x = 2$ una discontinuità di terza specie;

c. abbia in $x = 2$ una discontinuità di prima specie con salto uguale a 4;

d. abbia in $x = 2$ una discontinuità di prima specie con salto uguale a 4 e sia continua a sinistra.

[a) $k = -12, h = -6$; b) $k = -12, h \neq -6$; c) $k = -4 \vee k = -20$; d) $(k = -4 \wedge h = -2) \vee (k = -20 \wedge h = -10)$]

20 Considera la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2x - 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ \dfrac{e^{ax} - 1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Determina per quale valore del parametro reale a la funzione ha una discontinuità eliminabile in $x = 0$.
Utilizzando il valore di a determinato, calcola, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} x \cdot f(x).$$

[$a = -2$; 0; 0; 0]

21 Studia la continuità della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 \sin x - \sin x}{x|x - 1|}$$

e calcola, se possibile, i limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

[$x = 0$: discontinuità eliminabile; $x = 1$: discontinuità di prima specie; non esiste; 0]

22 **ESERCIZIO SVOLTO** Traccia nel piano cartesiano l'arco di parabola γ di equazione $y = x^2$, con $x \geq 0$. Detto P il punto di γ di ascissa t, traccia la circonferenza Γ, di centro P e tangente in Q all'asse x, e il segmento PO, dove O è l'origine del riferimento.

a. Dette R l'intersezione tra Γ e PO e T la proiezione di R su OQ, ricava le funzioni:

$$l(t) = \overline{OR} \text{ e } p(t) = \overline{OT}.$$

b. Calcola, se esistono, i seguenti limiti:

$$\lim_{t \to +\infty} l(t), \quad \lim_{t \to +\infty} p(t).$$

c. Considera i triangoli OTR e OQP e le rispettive aree S_{OTR} e S_{OQP}. Calcola:

$$\lim_{t \to 0} \frac{S_{OTR}}{S_{OQP}}.$$

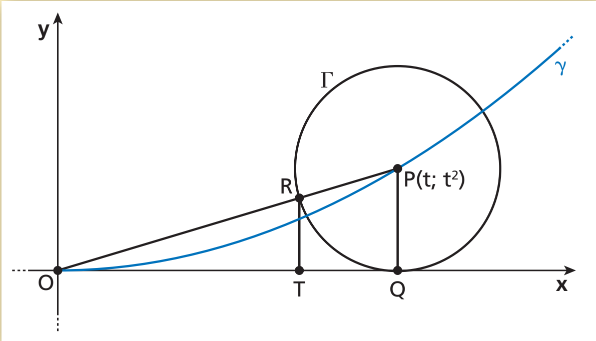
---

a. Poiché $\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{PR} = \overline{OP} - \overline{PQ}$, si ha:

$$l(t) = \sqrt{t^2 + t^4} - t^2 = t(\sqrt{1 + t^2} - t).$$

Dalla similitudine dei triangoli OTR e OQP otteniamo $\overline{OT} = \dfrac{\overline{OQ} \cdot \overline{OR}}{\overline{OP}}$, e quindi:

$$p(t) = \frac{t^2(\sqrt{1 + t^2} - t)}{\sqrt{t^2 + t^4}} = \frac{t(\sqrt{1 + t^2} - t)}{\sqrt{1 + t^2}} = t\left(1 - \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right).$$



b. Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{t \to +\infty} l(t) = \lim_{t \to +\infty} t(\sqrt{1 + t^2} - t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t(1 + t^2 - t^2)}{\sqrt{1 + t^2} + t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\cancel{t}}{\cancel{t}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} + 1\right)} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \lim_{t \to +\infty} t\left(1 - \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right) = \lim_{t \to +\infty} \frac{t(\sqrt{1 + t^2} - t)}{\sqrt{1 + t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{l(t)}{\sqrt{1 + t^2}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{1 + t^2}} = 0.$$

c. Poiché $\overline{RT} = \dfrac{\overline{OT} \cdot \overline{PQ}}{\overline{OQ}} = t^2\left(1 - \dfrac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\right)$, l'area del triangolo OTR è:

$$S_{OTR} = \frac{\overline{RT} \cdot \overline{OT}}{2} = t^3 \frac{(\sqrt{1 + t^2} - t)^2}{2(1 + t^2)}.$$

L'area del triangolo OQP è $S_{OQP} = \dfrac{t^3}{2}$, quindi si ha:

$$\lim_{t \to 0} \frac{S_{OTR}}{S_{OQP}} = \lim_{t \to 0} \frac{(\sqrt{1 + t^2} - t)^2}{(1 + t^2)} = 1.$$

23 Considera la funzione $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{x^2 + 1}$. Dimostra che esiste un numero reale $M > 0$ tale che, se $|x| > M$, allora $|f(x)| < \dfrac{1}{3}$.

(**SUGGERIMENTO** Usa il teorema del confronto.)

24 Per ogni numero naturale n, considera la funzione di variabile reale:

$$f_n(x) = \sqrt{\left|\frac{x^2-4}{x^n}\right|}.$$

a. Scrivi la funzione $f_0(x)$ e verifica che è continua in $\mathbb{R}$ e pari.

b. Stabilisci se $f_0(x)$ ammette asintoti e, in caso affermativo, trovane le equazioni.

c. Verifica che per qualunque $n \neq 0$ la funzione $f_n(x)$ è pari e non è continua in $\mathbb{R}$.

$\left[\text{a) } f_0(x) = \sqrt{|x^2-4|}; \text{ b) as. destro: } y = x, \text{ as. sinistro: } y = -x\right]$

25 CAMPO ELETTRICO CONTINUITÀ Una sfera di raggio 2 cm ha una carica totale $q = 8$ nC distribuita uniformemente all'interno e sulla superficie della sfera. Il campo elettrico in un punto P esterno alla sfera ha modulo direttamente proporzionale alla carica q e all'inverso del quadrato della distanza r di P dal centro della sfera, cioè $E(r) = k \cdot \frac{q}{r^2}$, dove k è un'opportuna costante.

Se il punto P è interno alla sfera, il modulo del campo elettrico in P è direttamente proporzionale alla distanza r di P dal centro della sfera, cioè $E(r) = hqr$, dove h è un'opportuna costante.
Se P appartiene alla superficie della sfera, il modulo del campo elettrico (inteso come valore numerico, in unità SI) è

$$E = \frac{10^{-5}}{2\pi\varepsilon_0},$$

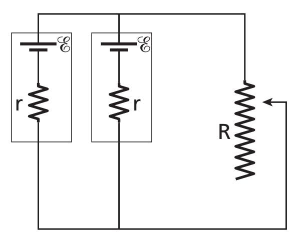
dove ε_0 è il valore numerico della costante dielettrica del vuoto, che vale $8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N \cdot m^2}$.

a. Scrivi la funzione $E(r)$ che rappresenta come varia il modulo del campo elettrico al variare della distanza r del punto P dal centro della sfera.

b. Determina i valori numerici delle costanti h e k, sapendo che la funzione $E(r)$ è continua in $[0; +\infty[$.

$\left[\text{b) } h = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0}; k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]$

26 TRASFORMAZIONE DELL'ENERGIA CALCOLO DEI LIMITI Sul banco del laboratorio di fisica ci sono due generatori di tensione continua che hanno forza elettromotrice $\mathscr{E} = 12$ V e resistenza interna $r = 2\ \Omega$. L'esperimento che devi svolgere prevede di collegare i due generatori in parallelo per alimentare una resistenza variabile R, secondo lo schema a fianco.



a. Per la prima legge di Kirchhhoff, la somma algebrica di tutte le correnti che convergono in un nodo di un circuito deve essere uguale a zero. Per la seconda legge di Kirchhoff, la somma algebrica delle f.e.m. agenti lungo i rami di una maglia è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione, cioè dei prodotti delle intensità di corrente che attraversano ogni ramo per i valori delle resistenze attraversate nel ramo. Utilizzando queste leggi, esprimi la corrente i che attraversa la resistenza R in funzione di R.

b. La potenza assorbita da una resistenza è data dal prodotto della resistenza per il quadrato dell'intensità di corrente che la attraversa. Indica con $P_1 = f(R)$ la potenza assorbita dalla resistenza R e con $P_2 = g(R)$ la potenza assorbita dall'intero circuito. Scrivi le funzioni $f(R)$ e $g(R)$ e calcola:

$$\lim_{R\to+\infty} f(R) \text{ e } \lim_{R\to+\infty} g(R).$$

c. Calcola $\lim_{R\to+\infty} \frac{f(R)}{g(R)}$ e deduci che al crescere di R l'andamento della potenza assorbita dalla resistenza R è uguale all'andamento della potenza assorbita dall'intero circuito.

$\left[\text{a) } i = \frac{12}{R+1}; \text{ b) } 0, 0; \text{ c) } 1\right]$

27 **ESERCIZIO SVOLTO** **ENERGIA CINETICA RELATIVISTICA** **CALCOLO DEI LIMITI** Nella meccanica classica l'energia cinetica E_C di una particella di massa m che si muove con velocità v in un sistema inerziale è data dalla funzione $E_C(v) = \frac{1}{2} mv^2$. Nella teoria della relatività ristretta (o speciale) l'energia cinetica E_R della stessa particella è data dalla formula

$$E_R(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2,$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto ($c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s) e m è la massa *a riposo* della particella.

a. Verifica che per $v \geq 0$ le funzioni $E_C(v)$ ed $E_R(v)$ sono invertibili, e scrivi le funzioni inverse $v_C(E)$ e $v_R(E)$.

b. Dopo aver trovato che le funzioni inverse sono

$$v_C(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}} \quad \text{e} \quad v_R(E) = \frac{c\sqrt{E(E + 2mc^2)}}{E + mc^2},$$

calcola

$$\lim_{E \to +\infty} v_C(E) \quad \text{e} \quad \lim_{E \to +\infty} v_R(E),$$

e fornisci un'interpretazione fisica dei limiti trovati.

---

a. La funzione $E_C(v) = \frac{1}{2} mv^2$ è definita in $\mathbb{R}$, mentre la funzione $E_R(v) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$ è definita se $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$, cioè in $-c < v < c$. Poiché v è il modulo della velocità, $v \geq 0$; restringiamo quindi i domini ai valori di v non negativi; entrambe le funzioni $E_C(v)$ ed $E_R(v)$ sono monotone crescenti, quindi invertibili. Ricaviamo algebricamente le funzioni inverse:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow \frac{2E}{m} = v^2 \rightarrow v_C(E) = \sqrt{\frac{2E}{m}};$$

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2 \rightarrow \frac{E}{mc^2} + 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{E + mc^2} \rightarrow$$

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{m^2 c^4}{(E + mc^2)^2} \rightarrow v^2 = c^2 \left[\frac{E^2 + \cancel{m^2 c^4} + 2E\, mc^2 - \cancel{m^2 c^4}}{(E + mc^2)^2} \right] \rightarrow v_R(E) = \frac{c\sqrt{E(E + 2mc^2)}}{E + mc^2}.$$

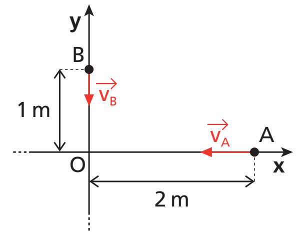
b. Calcoliamo i limiti:

$$\lim_{E \to +\infty} v_C(E) = \lim_{E \to +\infty} \sqrt{\frac{2E}{m}} = +\infty;$$

$$\lim_{E \to +\infty} v_R(E) = \lim_{E \to +\infty} \frac{c\sqrt{E(E + 2mc^2)}}{E + mc^2} = \lim_{E \to +\infty} \frac{c\,\cancel{E}\sqrt{\left(1 + \frac{2mc^2}{E}\right)}}{\cancel{E}\left(1 + \frac{mc^2}{E}\right)} = c.$$

Dai limiti vediamo che, mentre nella fisica classica la velocità è illimitata, e quindi una particella, al crescere dell'energia cinetica, può raggiungere una velocità relativa all'osservatore arbitrariamente elevata, e quindi superiore a quella della luce nel vuoto, nella fisica relativistica questo non è possibile: la velocità di una particella non può superare la velocità della luce nel vuoto, che rappresenta quindi una velocità limite.

28 CINEMATICA CLASSICA CALCOLO DEI LIMITI La figura rappresenta la situazione all'istante iniziale $t = 0$ s di due corpi, A e B, che si muovono di moto rettilineo uniforme, con velocità di moduli $v_A = 4$ m/s e $v_B = 3$ m/s.



a. Scrivi le leggi orarie del moto nel piano cartesiano dei corpi A e B.

b. Scrivi la distanza $d(t)$ tra i due corpi in funzione del tempo t.

c. Calcola $\lim\limits_{t \to +\infty} \left[d(t) - 5t + \frac{11}{5} \right]$ e spiega perché da questo limite puoi dedurre che per t molto grande la distanza tra A e B ha un andamento all'incirca lineare.

d. Determina la distanza minima tra i due corpi.

$\left[\text{a)} \begin{cases} x_A(t) = 2 - 4t \\ y_A(t) = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_B(t) = 0 \\ y_B(t) = 1 - 3t \end{cases}; \text{b)}\ d(t) = \sqrt{25t^2 - 22t + 5}; \text{c)}\ 0{,}4 \text{ m} \right]$

Derivate

29 Considera la famiglia di funzioni $f_a(x) = ax^3 + (2a+1)x^2 + 3ax + 2a$, al variare del parametro reale a.

a. Verifica che per ogni $a \in \mathbb{R}$ il grafico di $f_a(x)$ passa per il punto $A(-1; 1)$.

b. Stabilisci per quali valori del parametro a la funzione $f_a(x)$ è invertibile. Motiva la risposta.

c. Trova, se esiste, il valore del parametro a per cui $f_a(x)$ è invertibile e, detta $F_a(x)$ la funzione inversa, $F_a'(1) = 2$.

d. Determina il valore di a per cui la funzione $f_a(x)$ ha la derivata seconda che si annulla nell'ascissa del punto A. Per il valore di a trovato, traccia un grafico possibile della funzione $f_a(x)$.

$\left[\text{b)}\ a < -\frac{1}{5} \vee a > 1; \text{c)}\ a = \frac{5}{4}; \text{d)}\ a = 1 \right]$

30 Considera la curva γ di equazione $y = \frac{1}{x}$ e la famiglia di curve Γ_k di equazione $y = kx^2$, con $k > 0$.

a. Verifica che, $\forall k > 0$, le due curve γ e Γ_k si intersecano in un punto del primo quadrante.

b. Determina il valore del parametro k in modo che le due curve siano ortogonali.

c. Determina i valori del parametro k per cui esistono una retta r tangente a Γ_k e un'altra retta s tangente a γ parallele alla bisettrice del secondo e quarto quadrante e distanti tra loro $2\sqrt{2}$.

$\left[\text{b)}\ \frac{1}{\sqrt[4]{8}}; \text{c)}\ \frac{1}{8}, \frac{1}{24} \right]$

31 Considera la funzione $f(x) = \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$ e il quadrato di vertici $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ e $(0; -1)$.

a. Dimostra che i lati del quadrato giacciono sulle tangenti e sulle normali al grafico di $f(x)$ nei suoi punti di flesso.

b. In quali punti del grafico di $f(x)$ la retta tangente forma un angolo di $\frac{\pi}{6}$ con il semiasse positivo delle ascisse?

$\left[\text{b)} \left(-\sqrt{3} + \sqrt{2}; \ln\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \right); \left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}; \ln\left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \right) \right]$

32 Date le funzioni $f(x) = \ln(-3x)$ e $g(x) = -\frac{\ln(-5x-4)}{x^2+4x+3}$:

a. determina il loro dominio;

b. verifica che entrambi i grafici passano per il punto $P(-2; \ln 6)$;

c. determina l'angolo acuto formato dalle tangenti ai grafici delle due curve in P, approssimandolo a gradi e primi sessagesimali;

d. studia la continuità di $g(x)$ in $x = -1$ e in $x = -3$.

$\left[\text{a)}\ D_f\!: x < 0, D_g\!: x < -\frac{4}{5} \wedge x \neq -1 \wedge x \neq -3; \text{c) circa } 13°14' \right]$

33 Considera un punto A del grafico della funzione $y = 2\ln x$. Indica con B la proiezione di A sull'asse y e con C il punto di intersezione tra l'asse y e la retta t, tangente in A al grafico della funzione.

a. Verifica che la lunghezza del segmento BC non dipende dalla scelta del punto A.

Determina inoltre le coordinate di A nelle seguenti situazioni:

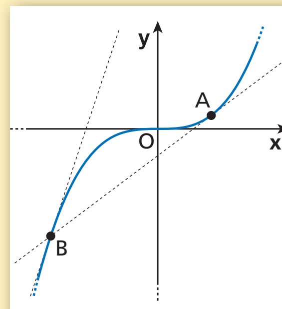
b. la tangente t è perpendicolare alla retta di equazione $x + y = \sqrt{\pi}$;

c. l'area del triangolo ABC è uguale a 1;

d. il punto C coincide con l'origine del riferimento; in questo caso trova l'area del triangolo ACD, dove D è l'intersezione tra la normale al grafico nel punto A e l'asse y.

$\left[\text{a) } \overline{BC} = 2;\ \text{b) } A(2; 2\ln 2);\ \text{c) } A(1; 0);\ \text{d) } A(e; 2), \dfrac{e^3 + 4e}{4}\right]$

34 **ESERCIZIO SVOLTO** Considera la curva γ di equazione $y = x^3$ rappresentata in figura.



a. Dimostra che, scelto un qualsiasi punto $A \in \gamma$ non coincidente con O, detto B l'altro punto di intersezione fra la retta tangente a γ in A e γ stessa, il rapporto tra le pendenze delle tangenti a γ in B e in A è uguale a 4.

b. Determina le equazioni delle rette tangenti a γ parallele tra loro e distanti $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

c. Determina il valore del parametro reale $\lambda \neq 0$ in modo che la curva di equazione $y = \lambda \ln x$ sia tangente alla curva γ.

---

a. Se $A \in \gamma$, con $A \neq O$, allora le sue coordinate sono $A(t; t^3)$, con $t \neq 0$. Poiché $y'(x) = 3x^2$ e $y'(t) = 3t^2$, la retta tangente a γ in A ha equazione $y = t^3 + 3t^2(x - t)$. Per determinare le coordinate del punto B dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = t^3 + 3t^2(x - t) \end{cases} \to \begin{cases} y = x^3 \\ x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0 \end{cases}.$$

Dal grafico vediamo che l'equazione $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$ ha tre soluzioni reali, di cui due sono coincidenti e valgono $x = t$. Ciò vuol dire che il polinomio $x^3 - 3t^2x + 2t^3$ è divisibile per $(x - t)^2$. Poiché

$$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = (x - t)^2(x + 2t),$$

abbiamo: $x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0 \to (x - t)^2(x + 2t) = 0 \to x = t \lor x = -2t$.

Perciò il punto B ha ascissa $x = -2t$. La pendenza della retta tangente a γ in B è uguale a $3(-2t)^2 = 12t^2$ e il rapporto tra le due pendenze è $\dfrac{12t^2}{3t^2} = 4$, indipendentemente dal valore di t.

b. Come abbiamo visto, la generica retta tangente a γ in un punto di coordinate $(t;\ t^3)$ ha equazione $3t^2x - y - 2t^3 = 0$. Per la simmetria della curva rispetto all'origine O, basta imporre che la distanza di O dalla generica tangente sia uguale a $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{10}}{5} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Abbiamo perciò:

$$\frac{|-2t^3|}{\sqrt{9t^4 + 1}} = \frac{\sqrt{10}}{5} \to \frac{4t^6}{9t^4 + 1} = \frac{2}{5} \to$$

$$20t^6 - 18t^4 - 2 = 0 \to 2(t^2 - 1)(10t^4 + t^2 + 1) = 0 \to t = \pm 1.$$

Le rette cercate sono pertanto $3x - y - 2 = 0$ e $3x - y + 2 = 0$.

c. Perché le due curve siano tangenti, deve esistere un punto di intersezione P tra le due curve in cui le tangenti alle due curve coincidono. Perciò deve esistere $t > 0$, tale che:

$$\begin{cases} t^3 = \lambda \ln t \\ 3t^2 = \dfrac{\lambda}{t} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\lambda}{3} = \lambda \ln t \\ t^3 = \dfrac{\lambda}{3} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{\cancel{\lambda}}{3} = \cancel{\lambda} \ln t \\ t^3 = \dfrac{\lambda}{3} \end{cases} \to \begin{cases} t = \sqrt[3]{e} \\ \lambda = 3e \end{cases}.$$

La curva di equazione $y = 3e\ln x$ è tangente alla curva γ nel punto $P(\sqrt[3]{e}; e)$.

35 Considera le funzioni $f(x) = x\sqrt{\left|\frac{x^2-9}{x}\right|}$ e $g(x) = \sqrt{|x(x^2-9)|}$.

a. Verifica che $f(x)$ è dispari, mentre $g(x)$ è pari.

b. Verifica che $f(x) = g(x)$ per ogni $x > 0$ e che $f(x)$ presenta una discontinuità di terza specie in $x = 0$.

c. Analizza la derivabilità di $g(x)$ per $x \geq 0$.

d. In base ai risultati ottenuti, verifica che $g(x)$ ha tre cuspidi, mentre $f(x)$ ha due cuspidi e un flesso a tangente verticale.

36 Considera la funzione $f(x)$, pari e derivabile nell'intervallo $[-1;1]$. Dimostra, mediante la definizione di derivata, che $x = 0$ è un punto stazionario. Costruisci un esempio. $[y = \cos x]$

37 Considera la funzione $f(x) = (x+2)e^{-x}$. Dimostra che $f'(x) \geq -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

38 Considera la funzione $f(x) = xe^x$.
Indicata con $f^{(n)}(x)$ la derivata n-esima della funzione dimostra, per induzione su n, che:

$f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

39 CINEMATICA NON RELATIVISTICA TEOREMI SULLE FUNZIONI DERIVABILI Un punto materiale si muove su una retta con legge oraria $x(t)$ continua e derivabile rispetto al tempo.

a. Dimostra che, se il punto materiale assume in due istanti diversi, t_1 e t_2, la stessa posizione, allora la sua velocità si è annullata almeno una volta tra t_1 e t_2.

b. Se sai che anche la velocità del punto materiale assume in due istanti diversi lo stesso valore, mantenendo valide le ipotesi sulla legge oraria, puoi concludere che l'accelerazione si annulla almeno una volta?

40 CINEMATICA NON RELATIVISTICA DERIVATA E GRAFICO DI UNA FUNZIONE Mario fa una passeggiata in bicicletta della durata di 7 minuti, lungo un percorso rettilineo. La legge oraria del suo moto è la seguente:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + t & \text{se } 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t - \frac{38}{3} & \text{se } 2 < t < 5 \\ -t^2 + 10t - 21 & \text{se } 5 \leq t \leq 7 \end{cases}$$

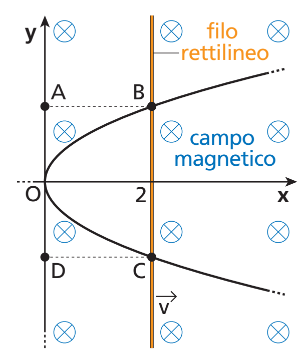
in cui il tempo t è espresso in minuti e la posizione x è espressa in centinaia di metri.

a. Verifica che $x(2) = x(5)$. Puoi affermare che la velocità di Mario si è annullata nell'intervallo di tempo tra 2 e 5 minuti?

b. Ricava e rappresenta su un grafico velocità-tempo la velocità istantanea $v(t)$ tenuta da Mario durante la passeggiata in bicicletta.

c. Utilizza il grafico della velocità per tracciare il grafico della legge oraria e per stabilire la massima distanza dal punto di partenza raggiunta da Mario. [a) sì; c) circa 533,3 m]

41 INDUZIONE ELETTROMAGNETICA CALCOLO DELLE DERIVATE Un campo magnetico uniforme, di modulo uguale a 0,2 T, è perpendicolare al piano *Oxy*. Nel piano ci sono un filo conduttore piegato con la forma della parabola di equazione $x = y^2$ e un filo conduttore rettilineo che si muove di moto uniforme con velocità $\vec{v}$ di modulo $v = 1$ m/s e direzione parallela all'asse x, partendo dal vertice della parabola, come mostrato in figura.
Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, secondo la quale la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta è uguale all'opposto della derivata del flusso del campo magnetico, determina, in valore assoluto, la forza elettromotrice indotta, in funzione del tempo t e il suo valore all'istante $t = 1$ s. $[0,4\sqrt{t}; 0,4 \text{ V}]$



42 **DINAMICA NON RELATIVISTICA** **MASSIMI E MINIMI** Un punto materiale si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza di modulo $F(x) = xe^{-x^2}$.

a. Studia la funzione F e tracciane il grafico.

b. Trova i punti di equilibrio, cioè i punti in cui la forza è nulla.

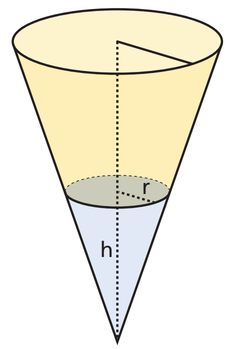
c. Detta $U(x)$ l'energia potenziale del punto materiale, determina i punti di massimo e di minimo di $U(x)$, sapendo che $U'(x) = -F(x)$. Stabilisci poi se il punto di equilibrio è stabile, instabile o indifferente.

[b) $x = 0$; c) $x = 0$, equilibrio instabile]

43 **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE** **CALCOLO DELLE DERIVATE** Un serbatoio di forma conica, il cui raggio di base misura 5 m e la cui altezza vale 15 m, è disposto con il vertice verso il basso. Il serbatoio viene riempito d'acqua tramite un condotto con la portata di 8 m^3/min.
Per la legge di Stevino, la pressione idrostatica sul vertice del cono vale $p_i = \rho g h + p_{atm}$, dove $\rho = 10^3$ kg/m^3 è la densità dell'acqua, $g = 9{,}81$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità, h è il livello dell'acqua nel serbatoio e

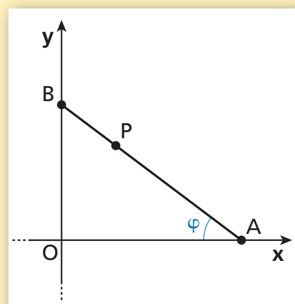
$$p_{atm} = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

è la pressione atmosferica.
Determina la velocità di variazione della pressione idrostatica sul vertice del cono nell'istante in cui l'acqua ha raggiunto i 7,5 m. [66,7 Pa/s]



44 **ESERCIZIO SVOLTO** **CINEMATICA CLASSICA** **CALCOLO DELLE DERIVATE** Una sbarra, di lunghezza $L = 5$ m, ha gli estremi che scorrono su due guide perpendicolari. L'angolo φ che la sbarra forma con la guida orizzontale varia nel tempo t secondo la legge:

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2} - 3t^2, \quad \text{con } 0 \le t \le \sqrt{\frac{\pi}{6}}.$$



Determina:

a. la legge oraria del moto di ciascun estremo;

b. la velocità degli estremi A e B al generico istante t;

c. la traiettoria descritta dal punto P, distante 1,5 m dall'estremo B;

d. la velocità del punto P al generico istante t.

---

a. Nel sistema di riferimento in figura il punto A ha coordinate $(5\cos\varphi; 0)$ e il punto B ha coordinate $(0; 5\sin\varphi)$, quindi le leggi orarie del moto dei due estremi sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x_A(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ y_A(t) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_B(t) = 0 \\ y_B(t) = 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases}.$$

b. Le velocità sono:

$$v_A(t) = x'_A(t) = -5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right)\cdot(-6t) = 30t\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right).$$

$$v_B(t) = y'_B(t) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right)\cdot(-6t) = -30t\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right).$$

c. Il punto P ha ascissa $1{,}5\cos\varphi$ e ordinata $(5 - 1{,}5)\sin\varphi$, quindi la legge oraria del suo moto è:

$$\begin{cases} x_P(t) = 1{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ y_P(t) = 3{,}5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases}.$$

Per trovare l'equazione cartesiana del luogo geometrico descritto da P eliminiamo t dal sistema:

$$\begin{cases} x_P = 1,5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ y_P = 3,5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_P}{1,5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ \frac{y_P}{3,5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x_P^2}{1,5^2} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ \frac{y_P^2}{3,5^2} = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{x_P^2}{1,5^2} + \frac{y_P^2}{3,5^2} = 1.$$

Quindi la traiettoria è l'arco di ellisse di equazione $\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{3,5^2} = 1$, contenuto nel primo quadrante.

d. Le componenti della velocità del punto P sono:

$$\begin{cases} x_P'(t) = -1,5\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right)(-6t) \\ y_P'(t) = 3,5\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right)(-6t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_P'(t) = 9t\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \\ y_P'(t) = -21t\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t^2\right) \end{cases}.$$

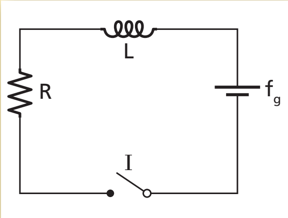
45 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **APPLICAZIONE DELLE DERIVATE** Sia $\phi(t) = Ae^{-\omega^2 t^2}$ il flusso di un campo magnetico indotto attraverso un circuito, dove A è una costante con le dimensioni di un flusso magnetico, ω è una costante che ha le dimensioni dell'inverso di un tempo e t rappresenta il tempo misurato in secondi. Sapendo che la forza elettromotrice indotta $\mathscr{E}(t)$ è l'opposto della derivata del flusso del campo magnetico:

a. scrivi per $t \geq 0$ la funzione $\mathscr{E}(t)$;

b. stabilisci per quale valore di $\omega > 0$ la forza elettromotrice indotta è massima all'istante $t = 1$ e calcola il valore del flusso in tale istante per il valore di ω trovato.

$\left[\text{b) } \omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\ \text{s}^{-1};\ \phi(1) = Ae^{-\frac{1}{2}}\right]$

46 **ESERCIZIO SVOLTO** **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE** **CALCOLO DELLE DERIVATE** Il circuito in figura è composto da un interruttore, un resistore di resistenza $R = 5\ \Omega$, un induttore di induttanza $L = 0,3$ H e un generatore di tensione capace di erogare una differenza di potenziale $f_g = 12$ V.
L'intensità della corrente che attraversa il circuito in funzione del tempo, a partire dall'istante di chiusura dell'interruttore, è data da:



$$i(t) = a + be^{-\frac{R}{L}t}.$$

a. Determina i valori delle costanti a e di b, sapendo che all'istante $t = 0$ la corrente è nulla e che il valore di regime della corrente $i_\infty = \lim_{t \to +\infty} i(t)$ è uguale a 2,4 A.

b. Determina la velocità di variazione della corrente elettrica nel circuito nell'istante $t = 0$ e nell'istante in cui il valore della corrente è pari al 50% del valore di regime.

c. Dopo quanto tempo dalla chiusura del circuito la velocità di variazione della corrente è di 5 A/s? Quanto vale la corrente elettrica in tale istante?

---

a. Imponendo che $i(0) = 0$, otteniamo:

$$a + b = 0 \rightarrow b = -a.$$

Sostituiamo e imponiamo che il valore di regime sia 2,4 A. Otteniamo:

$$2,4 = \lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{t \to +\infty}\left(a - a\underbrace{e^{-\frac{50}{3}t}}_{\text{tende a 0}}\right) = a \rightarrow a = 2,4.$$

Dunque la corrente segue la legge $i(t) = 2,4\left(1 - e^{-\frac{50}{3}t}\right)$.

b. Poiché $i'(t) = 2,4 \cdot \frac{50}{3} e^{-\frac{50}{3}t}$, otteniamo $i'(0) = 2,4 \cdot \frac{50}{3} = 40$, cioè 40 A/s.

Determiniamo l'istante t_0 in cui il valore della corrente è pari al 50% del valore di regime, cioè è pari a $\frac{2,4}{2}$ A $= 1,2$ A. Deve essere:

$$2,4\left(1 - e^{-\frac{50}{3}t_0}\right) = 1,2 \rightarrow 1 - e^{-\frac{50}{3}t_0} = 0,5 \rightarrow e^{-\frac{50}{3}t_0} = 0,5 \rightarrow -\frac{50}{3}t_0 = \ln\frac{1}{2} \rightarrow t_0 = \frac{3}{50}\ln 2.$$

Sostituendo in $i'(t)$, abbiamo:

$$i'(t_0) = 2,4 \cdot \frac{50}{3} e^{-\frac{50}{3}\cdot\frac{3}{50}\ln 2} = 40\frac{1}{2} = 20,$$

cioè 20 A/s.

c. Cerchiamo l'istante t_1 per cui $i'(t_1) = 5$ A/s.

$$i'(t_1) = 5 \rightarrow 2,4\frac{50}{3}e^{-\frac{50}{3}t_1} = 5 \rightarrow e^{-\frac{50}{3}t_1} = \frac{1}{8} \rightarrow -\frac{50}{3}t_1 = \ln\frac{1}{8} \rightarrow t_1 = \frac{9}{50}\ln 2.$$

In questo istante la corrente vale: $i(t_1) = 2,4\left(1 - \frac{1}{8}\right) = 2,1$, cioè 2,1 A.

47 CINEMATICA CLASSICA SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA Un corpo si muove nel piano con la seguente legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = t - 1 \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2 - 2t + 2} \end{cases}.$$

a. Determina la posizione del corpo all'istante $t = 0$ e il modulo della sua velocità in quell'istante.

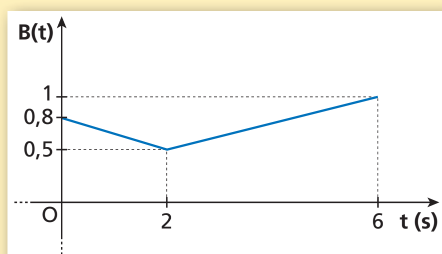
b. Ricava l'equazione della traiettoria descritta dal corpo.

c. In quali istanti la direzione della velocità istantanea forma angoli di ampiezza massima rispetto all'asse delle ascisse?

d. Considera tutte le possibili rette tangenti alla traiettoria: esistono punti dell'asse delle ascisse che non sono attraversati da nessuna di queste rette?

$\left[\text{a) } \left(-1; \frac{1}{2}\right), v(0) \simeq 1{,}12; \text{ b) } = \frac{1}{1+x^2}; \text{ c) } 0{,}42 \text{ s e } 1{,}58 \text{ s}\right]$

48 ESERCIZIO SVOLTO INDUZIONE ELETTROMAGNETICA DERIVATA E DERIVABILITÀ Una spira circolare di raggio $r = 1$ cm, posizionata su un piano orizzontale, è attraversata ortogonalmente da un campo magnetico uniforme ma non stazionario, il cui andamento in funzione del tempo $B(t)$ è rappresentato nel grafico a fianco.



a. Determina la funzione $f(t)$ che rappresenta la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta per $t \in [0; 6]$.

b. Verifica che la funzione $f(t)$ è discontinua nel punto in cui il campo magnetico $B(t)$ non è derivabile.

a. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la f.e.m. indotta è data da

$$f(t) = f.e.m. = -\phi'_B(t),$$

dove $\phi_B(t)$ è il flusso del campo magnetico. Poiché $\phi_B(t) = A \cdot B(t)$, dove A è l'area della spira, cioè $A = \pi r^2 = \pi \cdot 10^{-4} \simeq 3,14 \cdot 10^{-4}$ m^2, abbiamo che:

$$f(t) = -\pi \cdot 10^{-4} B'(t).$$

Deduciamo $B(t)$ dal grafico:

$$B(t)=\begin{cases}\dfrac{0,5-0,8}{2}t+0,8 & \text{se } 0\le t\le 2\\ \dfrac{1-0,5}{6-2}(t-2)+0,5 & \text{se } 2<t\le 6\end{cases} \rightarrow B(t)=\begin{cases}-0,15t+0,8 & \text{se } 0\le t\le 2\\ 0,125t+0,25 & \text{se } 2<t\le 6\end{cases}.$$

Per $0<t<2$ e per $2<t<6$ abbiamo perciò:

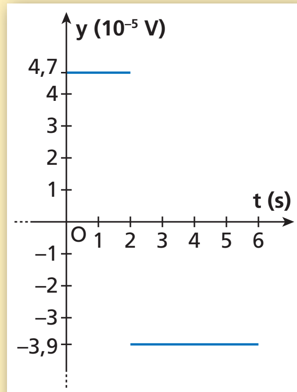
$$B'(t)=\begin{cases}-0,15 & \text{se } 0<t<2\\ 0,125 & \text{se } 2<t<6\end{cases}.$$

Quindi il campo magnetico è continuo ma non derivabile in $t=2$.

Da $f(t)=-\pi\cdot 10^{-4}B'(t)$, approssimando π con 3,14, otteniamo:

$$f(t)=\begin{cases}-3,14\cdot 10^{-4}\cdot(-0,15) & \text{se } 0<t<2\\ -3,14\cdot 10^{-4}\cdot(0,125) & \text{se } 2<t<6\end{cases} \rightarrow$$

$$f(t)=\begin{cases}4,7\cdot 10^{-5} & \text{se } 0<t<2\\ -3,9\cdot 10^{-5} & \text{se } 2<t<6\end{cases}.$$

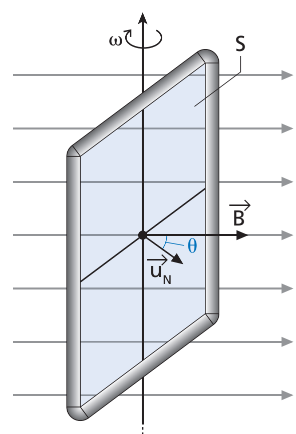


b. Come vediamo dal grafico, la funzione $f(t)$ non è continua in $t=2$, istante in cui c'è un salto di tensione di $8,6\cdot 10^{-5}$ V.
Quindi $f(t)$ è discontinua nell'istante interno all'intervallo [0; 6] in cui il campo magnetico $B(t)$ non è derivabile. Osserviamo, infatti, che $f(t)$ coincide con $B'(t)$ a meno di una costante moltiplicativa.

49 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **CALCOLO DELLE DERIVATE** Il principio di funzionamento di un alternatore consiste nel far ruotare, con frequenza f, una bobina di N spire in un campo magnetico uniforme B, come mostrato in figura per una singola spira.
Considera una bobina con N spire, ciascuna di area $A=0,2\ \text{m}^2$, che ruota con una frequenza $f=50$ giri al secondo ed è immersa in un campo magnetico uniforme di 0,5 T.

a. Determina la funzione che descrive come varia la f.e.m. indotta in funzione del tempo al variare del numero N di spire.

b. Calcola il numero N di spire necessarie per ottenere una tensione massima di 200 V. [a) $f(t)=10N\pi\sin(100\pi t)$; b) 7 spire]



RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Texas Instruments**.

Un problema di minimo

Una ditta deve produrre delle lattine cilindriche che contengano 300 mL di bibita. Quali devono essere le dimensioni della lattina in modo da utilizzare la minima quantità di alluminio?

▶ **Un problema di minimo.**

Possiamo supporre che la lattina abbia la forma di un cilindro circolare retto.
Indichiamo con h l'altezza del cilindro e con r il raggio di base, espressi entrambi in centimetri.
Dobbiamo trovare i valori di r e h che minimizzano la superficie totale S mantenendo fisso il volume di 300 cm^3 (ricordiamo che 1 cm^3 = 1 mL).
Dobbiamo quindi minimizzare

$$S=2\pi r^2+2\pi rh,$$

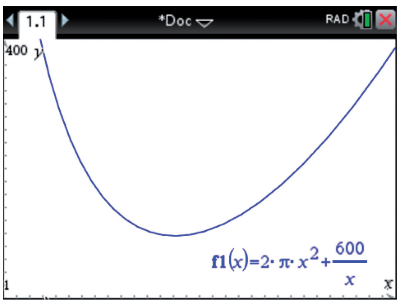
con la condizione che $\pi r^2 h=300$.

Dall'ultima relazione ricaviamo $h = \dfrac{300}{\pi r^2}$.
Sostituiamo questa espressione al posto di h nella superficie totale S.
Otteniamo:

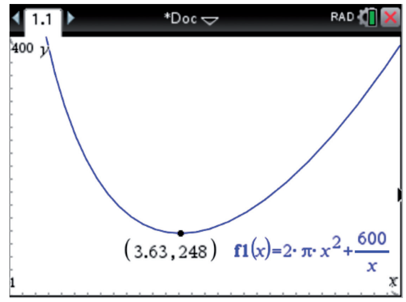
$$S = 2\pi r^2 + \frac{600}{r}.$$

Dobbiamo dunque studiare l'andamento della funzione $f(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{600}{x}$.
Apriamo un nuovo documento e inseriamo la funzione nell'ambiente grafico.

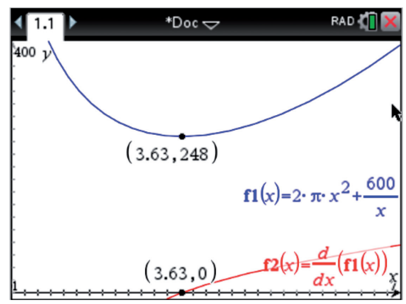
Prima di visualizzarla dobbiamo scegliere opportunamente la porzione di asse cartesiano che vogliamo visualizzare.
Poniamo $1 \le x \le 7$ e $200 \le y \le 400$.



La curva presenta un minimo nell'intervallo considerato.
Per individuare le coordinate del punto di minimo possiamo utilizzare la successione di comandi *Analizza grafico* → *Minimo*, scegliendo l'intervallo in cui cercare il minimo.



L'ascissa del minimo vale circa 3,63.
Possiamo anche inserire il grafico della derivata prima, dopo aver modificato la finestra di visualizzazione in modo che risulti visibile l'asse delle ascisse.
Possiamo in tal modo verificare che, in corrispondenza del minimo, la derivata prima si annulla.



Concludiamo che la quantità di alluminio è minima quando il raggio di base vale circa 3,63 cm.

Studio delle funzioni

50 Considera la cubica

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

e rappresentala graficamente in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale.
Indica con F il suo flesso.
Considera la retta r passante per F che forma un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{4}$ radianti con la direzione positiva dell'asse delle ascisse e siano A e B i punti di intersezione di r con la cubica.

a. Verifica che F è il punto medio del segmento AB.

b. Verifica che F è il punto medio di un qualsiasi segmento PQ, avente per estremi i punti di intersezione della cubica (diversi da F) con una qualsiasi retta passante per F e con coefficiente angolare positivo.

c. Verifica che la proprietà vale in generale per una qualsiasi cubica, cioè verifica che una cubica $f(x)$ ha sempre un flesso F, che una retta passante per F interseca il grafico di $f(x)$ o solo in F, o in F e in altri due punti A e B, e in tal caso F è il punto medio del segmento AB.

51 Considera la funzione $f(x) = \ln x + \frac{a(x-1)}{x+1}$, dove a è un parametro reale non nullo.

a. Determina il valore di a in modo che la funzione abbia un punto stazionario di ascissa $x = 1$.

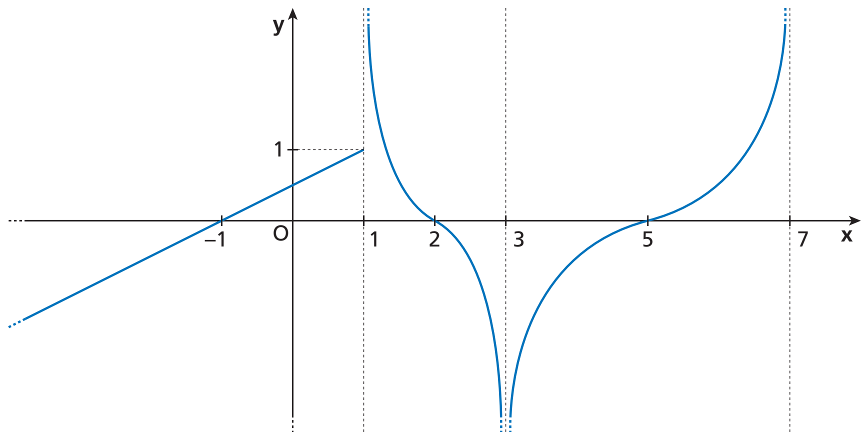
b. Sostituisci il valore trovato per il parametro a nell'espressione di $f(x)$ e determina le coordinate degli eventuali punti del grafico della funzione f in cui la tangente è parallela alla retta di equazione $2x - 9y = 0$.

c. Studia la monotonia della funzione trovata e deduci che $f(x) > 0$ per $x > 1$.

d. Rappresenta i grafici delle funzioni $h(x) = \ln x$ e $g(x) = 2\frac{x-1}{x+1}$, dopo aver verificato che risultano tangenti per $x = 1$.

$\left[\text{a) } a = -2; \text{ b) } \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3} - \ln 2\right)\right]$

52 LEGGI IL GRAFICO Considera il grafico della derivata prima $f'(x)$ di una funzione continua $f(x)$, definita in $]-\infty; 7]$.



a. Nell'intervallo $]-\infty; 1]$ il grafico di $f(x)$ è rappresentato da un arco di parabola passante per $A(-3; 2)$, mentre sia nell'intervallo $[1; 3]$ sia in $[3; 7]$ da un arco di circonferenza. Qual è l'espressione analitica di $f(x)$?

b. Traccia il grafico di $f(x)$.

53 Considera la funzione $f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + 2x + b}}$, al variare dei parametri reali $a \neq 0$ e b. Determina:

a. i valori di b per cui il grafico di $f(x)$ non interseca l'asse x;

b. i valori di b tali che il grafico di $f(x)$ abbia due asintoti verticali distanti 6;

c. le equazioni degli asintoti orizzontali del grafico di $f(x)$.

[a) $b \leq 0$; b) $b = -8$; c) as. destro: $y = a$, as. sinistro: $y = -a$]

54 Data la funzione $f(x) = 3x\left(1 - \frac{x}{\sqrt{a + x^2}}\right)$, con a parametro reale positivo:

a. determina il valore di a per cui il grafico di $f(x)$ ha due punti di flesso F_1 e F_2 rispettivamente in $x = 2$ e in $x = -2$;

b. dopo aver verificato che il valore cercato è $a = 2$, sostituiscilo nell'espressione di $f(x)$, studia la funzione ottenuta e disegnane il grafico;

c. dimostra che le rette tangenti al grafico di $f(x)$ nei punti F_1 e F_2 si incontrano in un punto C che appartiene all'asse delle ordinate;

d. dato il punto $D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$, esterno al grafico della funzione, scrivi le equazioni di tutte le rette passanti per D e tangenti al grafico di $f(x)$.

$\left[\text{a) } a = 2; \text{ d) } y = 3x, \ y = \left(\frac{9 - 4\sqrt{6}}{3}\right)x + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right]$

55 **ESERCIZIO SVOLTO** Considera la funzione $f(x)=e^{2x}$.

a. Siano P e Q due punti del grafico di $f(x)$ tali che l'ascissa di Q è la metà dell'ascissa di P. Determina per quale punto P il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ in P è il triplo del coefficiente angolare della retta tangente in Q.

b. Determina i valori di a per cui la retta $y=10x+a$ è secante il grafico di $f(x)$.

c. Considera una funzione $h(x)$, continua e derivabile sull'intervallo $]0;1[$, tale che $h'(x)\le f'(x)$ per ogni $x\in]0;1[$. Utilizzando il teorema di Lagrange, dimostra che risulta:

$$h(1)-h(0)<2e^2.$$

d. Considera la funzione $g(x)=f(x)+mx$. Determina il valore del parametro reale m per cui è possibile applicare il teorema di Rolle sull'intervallo $[-1;0]$. Per tale valore di m calcola il punto la cui esistenza è garantita dal teorema suddetto.

e. Determina, al variare di m, la massima ordinata del minimo della funzione $g(x)$.

---

a. Posto $P(x_0;e^{2x_0})$, si ha $Q\left(\frac{x_0}{2};e^{x_0}\right)$. Poiché $f'(x)=2e^{2x}$, imponiamo:

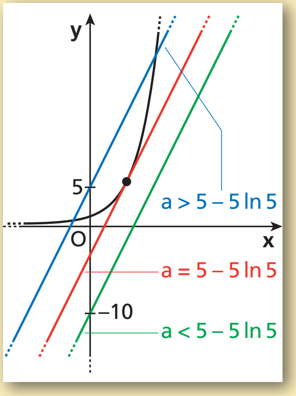
$$f'(x_0)=3f'\left(\frac{x_0}{2}\right)\to 2e^{2x_0}=3\cdot 2e^{2\frac{x_0}{2}}\to e^{2x_0}=3e^{x_0}\to e^{x_0}=3\to x_0=\ln 3.$$

Il punto P cercato perciò è $P(\ln 3;9)$.

b. Le rette di equazioni $y=10x+a$ formano un fascio di rette parallele con coefficiente angolare 10. Poiché:

$$f'(x)=10\to 2e^{2x}=10\to x=\frac{1}{2}\ln 5,$$

e $f\left(\frac{1}{2}\ln 5\right)=5$, la retta del fascio tangente al grafico ha equazione $y=10x-5\ln 5+5$.
Le rette del fascio perciò sono secanti se $a>5-5\ln 5$.



c. Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione $h(x)$ nell'intervallo $[0;1]$.

Abbiamo:

$$\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=h'(c),\quad \text{con } 0<c<1.$$

Sappiamo che $h'(c)\le f'(c)=2e^{2c}$. Inoltre per $c\in]0;1[$ vale $2e^{2c}<2e^2$. Quindi:

$$h(1)-h(0)=h'(c)\le 2e^{2c}<2e^2.$$

d. La funzione g è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[-1;0]$ ed è derivabile nell'intervallo aperto $]-1;0[$. Per applicare il teorema di Rolle alla funzione $g(x)=e^{2x}+mx$, rimane da verificare $g(-1)=g(0)$:

$$g(-1)=g(0)\to e^{-2}-m=1\to m=e^{-2}-1.$$

Per tale valore di m, il teorema di Rolle ci assicura che esiste $c\in]-1;0[$ tale che $g'(c)=0$. Poiché $g'(x)=2e^{2x}+m=2e^{2x}+e^{-2}-1$ abbiamo:

$$g'(c)=0\to 2e^{2c}+e^{-2}-1=0\to c=\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{e^{-2}-1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-e^{-2}}{2}\right).$$

e. Poiché $g'(x) = 2e^{2x} + m$, per $m \geq 0$ si ha $g'(x) > 0$, cioè per $m \geq 0$ la funzione g è sempre strettamente crescente; $\lim_{x \to -\infty} (e^{2x} + mx) = -\infty$, quindi la funzione non ha minimo. Per $m < 0$ si ha $g'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right)$. Il punto di minimo di $g(x)$ è $x = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right)$ e il minimo vale:

$$g\left(\frac{1}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right)\right) = -\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right).$$

Dobbiamo trovare il massimo della funzione $r(m) = -\frac{m}{2} + \frac{m}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right)$. Poiché

$$r'(m) = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{m}{2}\right) \to r'(m) = 0 \to -\frac{m}{2} = 1 \to m = -2,$$

il massimo si ottiene per $m = -2$. La massima ordinata del minimo di $g(x)$, pertanto, è uguale a:

$$r(-2) = -\frac{-2}{2} + \frac{-2}{2}\ln\left(-\frac{-2}{2}\right) = 1.$$

56 Considera la funzione $f(x) = \frac{x^3}{3^{x-1}}$.

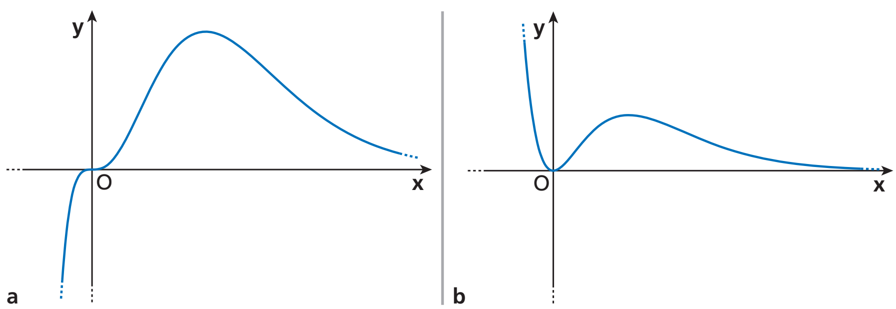
a. Determina gli eventuali asintoti della funzione.

b. Determina i punti stazionari della funzione e studia la monotonia di quest'ultima.

c. Dopo aver verificato che $f''(x) = 3\frac{x^3 \ln^2 3 - 6x^2 \ln 3 + 6x}{3^x}$, determina le ascisse dei punti di flesso.

d. Verifica che la funzione $g(x) = |f(x)|$ è derivabile in $x = 0$.

e. Sulla base dei risultati fin qui ottenuti stabilisci quali dei due grafici seguenti può rappresentare l'andamento della funzione. Motiva la tua risposta.



$\left[\text{a) as. destro: } y = 0; \text{ b) punti stazionari: } x = 0, x = \frac{3}{\ln 3}; \text{ max: } x = \frac{3}{\ln 3}; \text{ c) flessi: } x = 0, x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{\ln 3}\right]$

57 **ESERCIZIO SVOLTO** In un riferimento cartesiano Oxy sono dati il punto $A(2; 0)$ e un punto $B(0; k)$ sull'asse delle ordinate. Siano r la retta passante per A e B, s la retta passante per O e perpendicolare a r e P il punto di intersezione tra le due rette.

a. Determina l'equazione del luogo geometrico Γ descritto dal punto P al variare di $k \in \mathbb{R}$.

b. Scrivi l'espressione della funzione:

$$f(k) = \frac{\overline{OP}}{\overline{AB}}.$$

Studia la funzione trovata mettendo in evidenza eventuali massimi e minimi relativi e assoluti ed eventuali punti di non derivabilità e rappresentala in un opportuno riferimento cartesiano.

c. Sia P un punto sull'arco di Γ appartenente al primo quadrante e indica con Q la sua proiezione sull'asse y. Considera il solido ottenuto dalla rotazione completa del quadrilatero $OAPQ$ intorno all'asse delle ascisse. Determina le coordinate di P in modo che il volume del solido sia massimo. Quanto vale $f(k)$ in corrispondenza di questo punto P?

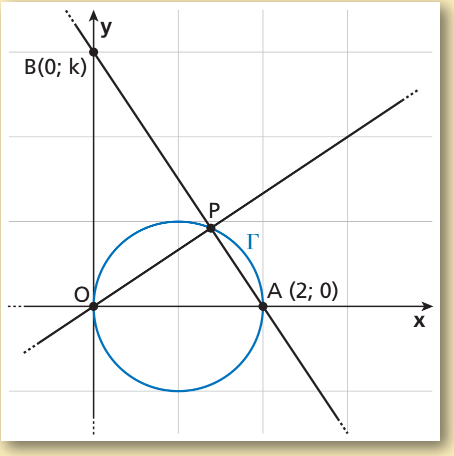
a. Se $k=0$ le rette r e s hanno equazioni $y=0$ e $x=0$ e si intersecano in $P(0;0)$, e quindi $(0;0)$ appartiene al luogo geometrico cercato.
Consideriamo il caso $k \neq 0$, le rette hanno equazioni:

$$r\colon y=-\frac{k}{2}x+k, \quad s\colon y=\frac{2}{k}x.$$

Cerchiamo le coordinate del punto di intersezione:

$$\begin{cases} y=-\frac{k}{2}x+k \\ y=\frac{2}{k}x \end{cases} \to \begin{cases} \frac{2}{k}x=-\frac{k}{2}x+k \\ y=\frac{2}{k}x \end{cases} \to \begin{cases} x=\frac{2k^2}{4+k^2} \\ y=\frac{4k}{4+k^2} \end{cases}.$$

Osserviamo inoltre che $\frac{2k^2}{4+k^2} \neq 2$ per ogni k, quindi nessun punto di ascissa 2 può appartenere al luogo geometrico.



Considerando che il punto P deve avere ordinata $y=\frac{4k}{4+k^2}$ e deve appartenere alla retta s, per trovare l'equazione del luogo in x e in y, ci basta eliminare k dal sistema formato dalle equazioni $y=\frac{4k}{4+k^2}$, con $k \neq 0$ e quindi $y \neq 0$, e $y=\frac{2}{k}x$:

$$\begin{cases} y=\frac{4k}{4+k^2} \\ y=\frac{2}{k}x \end{cases} \to \begin{cases} y=8\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{4+4\frac{x^2}{y^2}} \\ k=2\frac{x}{y} \end{cases} \to \cancel{y}=8\frac{x}{\cancel{y}}\frac{\cancel{y^2}}{4y^2+4x^2} \to 4x^2+4y^2=8x \to$$

$$x^2+y^2-2x=0, \quad \text{con } (x;y)\neq(0;0).$$

Facendo l'unione tra i due casi considerati, otteniamo che per ogni valore di k il luogo cercato è la circonferenza di centro $(1;0)$ e raggio 1 privata del punto $A(2;0)$, che ha ascissa 2.

b. Abbiamo: $\overline{AB}=\sqrt{4+k^2}$. Per scrivere $\overline{OP}$ osserviamo che Γ è anche il luogo dei vertici P di tutti i triangoli rettangoli AOP aventi per ipotenusa il segmento AO, a sua volta cateto del triangolo rettangolo AOB. Si ha quindi, per la similitudine dei triangoli OPB e AOB.

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} \to \overline{OP}=\frac{2|k|}{\sqrt{4+k^2}}.$$

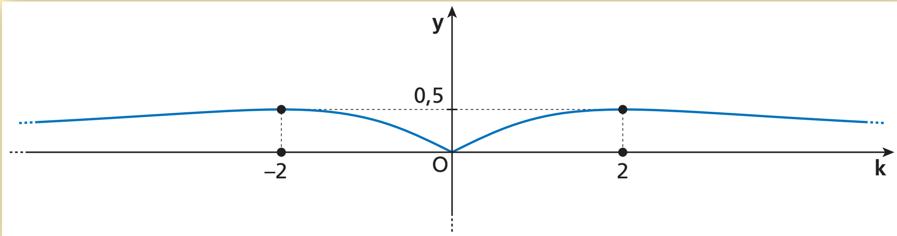
Pertanto si ha:

$$f(k)=\frac{2|k|}{4+k^2}.$$

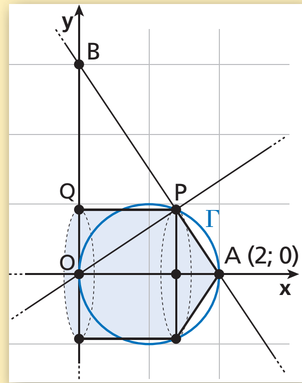
La funzione, nella variabile k ha dominio $\mathbb{R}$, è pari, è nulla per $k=0$, altrimenti è positiva. Si ha inoltre che $\lim_{k\to\pm\infty}\frac{2|k|}{4+k^2}=0$, per cui il grafico della funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y=0$.
Per $k \neq 0$ la derivata è:

$$f'(k)=\begin{cases} \frac{2(4-k^2)}{(4+k^2)^2} & \text{se } k>0 \\ \frac{2(k^2-4)}{(4+k^2)^2} & \text{se } k<0 \end{cases}.$$

Poiché $\lim_{k\to 0^+} f'(k)=\frac{1}{2}\neq\lim_{k\to 0^-} f'(k)=-\frac{1}{2}$, l'origine è un punto angoloso per il grafico della funzione.
La derivata si annulla in $k=2$ e in $k=-2$, è positiva per $k<-2$ e per $0<k<2$ e negativa altrove. Dunque $k=-2$ e $k=2$ sono entrambi punti di massimo relativo e assoluto e $k=0$ è un punto di minimo relativo e assoluto.



c. Sia x l'ascissa di un punto P appartenente all'arco di Γ nel primo quadrante, per cui si ha $P(x; \sqrt{2x - x^2})$, con $0 \leq x \leq 2$. Il solido in questione è formato dall'unione di un cilindro e di un cono aventi la base in comune, e tale base ha come raggio l'ordinata di P, cioè $\sqrt{2x - x^2}$; inoltre il cilindro ha altezza x e il cono ha altezza $2 - x$. Pertanto il volume $V(x)$ del solido è espresso dalla funzione:



$$V(x) = \pi(2x - x^2)x + \frac{1}{3}\pi(2x - x^2)(2 - x) = \frac{2}{3}\pi(2x - x^2)(x + 1) =$$

$$\frac{2}{3}\pi(-x^3 + x^2 + 2x).$$

La derivata prima è:

$$V'(x) = \frac{2}{3}\pi(-3x^2 + 2x + 2).$$

Troviamo i punti stazionari di V nell'intervallo $0 < x < 2$, dove la funzione risulta derivabile perché polinomiale: $V'(x) = 0 \to x = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

Valutiamo ora la funzione nel punto stazionario trovato e sugli estremi dell'intervallo:

$$V\left(\frac{1 + \sqrt{7}}{3}\right) = \frac{4}{81}\pi(7\sqrt{7} + 10), \quad V(0) = 0, \quad V(2) = 0.$$

Da questo deduciamo che il massimo assoluto del volume si ottiene per $x = \dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}$ e il corrispondente punto P sulla circonferenza Γ ha coordinate $\left(\dfrac{1 + \sqrt{7}}{3}; \dfrac{\sqrt{4\sqrt{7} - 2}}{3}\right)$.

Poiché $x = \dfrac{2k^2}{4 + k^2}$, si ha:

$$\frac{2k^2}{4 + k^2} = \frac{1 + \sqrt{7}}{3} \quad \to \quad k = 2\sqrt{\frac{2 + \sqrt{7}}{3}}.$$

Quindi in corrispondenza del massimo del volume $f(k) = 4\sqrt{\dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}} \cdot \dfrac{1}{4 + 4\dfrac{2 + \sqrt{7}}{3}} = \dfrac{\sqrt{6 + 3\sqrt{7}}}{5 + \sqrt{7}}$.

58 Considera la famiglia di funzioni reali di variabile reale definita da $f_k(x) = (x^2 - 1)e^{kx}$, dove k è un parametro reale non nullo.

a. Verifica che il grafico di ogni funzione della famiglia interseca gli assi cartesiani negli stessi punti.

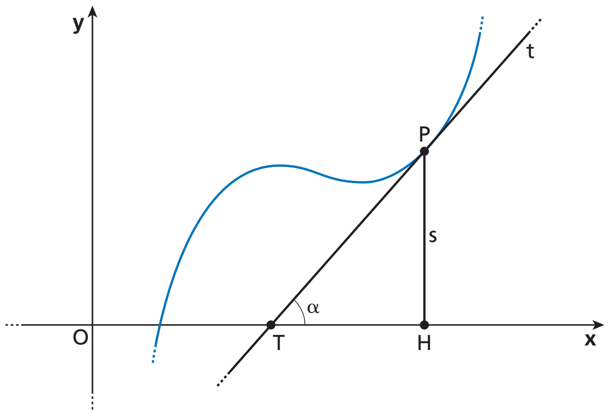
b. Verifica che ciascuna funzione ammette una coppia di punti stazionari e trovane le ascisse x_1 e x_2; verifica inoltre che $x_1 \cdot x_2 = -1$.

c. Verifica che, per $k = 1$, il grafico della funzione $f_1(x)$ e quello della sua derivata prima si incontrano in un punto A dell'asse delle ordinate e le rispettive tangenti in A sono ortogonali tra loro.

d. Disegna il grafico di $f_2(x)$.

$\left[\text{a) } A(0; -1), B(1; 0), C(-1; 0); \text{ b) } x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + k^2}}{k}\right]$

59 Data una funzione $f(x)$, derivabile per ogni $x \in D$, e dato un punto $P(x; f(x))$ del suo grafico tale che sia $f(x) \neq 0$ e $f'(x) \neq 0$, considera il segmento TH avente per estremi le intersezioni T e H con l'asse x rispettivamente della retta t tangente in P al grafico di $f(x)$ e della perpendicolare s all'asse x passante per P.



a. Detti l_P la misura del segmento TH e α l'angolo compreso tra t e la direzione positiva dell'asse x, quale fra le seguenti affermazioni è corretta? Motiva la risposta.

i. $l_P = |f(x) \cdot \tan\alpha|$;

ii. $|f'(x)| = \dfrac{\overline{PT}}{l_P}$;

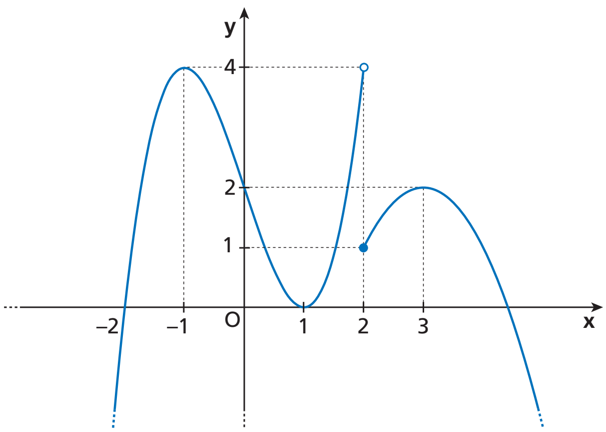
iii. l_P è il reciproco del valore assoluto della derivata di $\ln|f(x)|$;

iv. l_P è il valore assoluto della derivata di $\dfrac{1}{f(x)}$.

b. Posto che sia $f(x) = 2x^2 + 1$, ricava l_P in funzione di x e rappresenta $l_P(x)$ dopo averne specificato il dominio.

$\left[\text{a) iii; b) } l_P(x) = \dfrac{2x^2+1}{4|x|},\ D\text{: } x \neq 0\right]$

60 **LEGGI IL GRAFICO** Considera il grafico della funzione $f(x)$.



La funzione $f(x)$ è la derivata prima di una funzione $g(x)$ definita e continua nell'intervallo $[-3; 5]$, con $g(2) = 3$.

a. Sapendo che il ramo sinistro è un arco di cubica e che il ramo destro è un arco di parabola, scrivi l'espressione analitica di $f(x)$.

b. Determina $g''(-1)$. È possibile determinare $g'(2)$?

c. Individua i punti di massimo e di minimo della funzione $g(x)$ interni all'intervallo $[-3; 5]$.

d. Individua i punti di flesso interni all'intervallo $[-3; 5]$.

e. Traccia un grafico qualitativo della funzione $g(x)$.

f. La funzione $g(x)$ definita in $[-3; 5]$ è biunivoca? Se non lo è, come si può restringere il dominio per renderla biunivoca?

$\left[\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2 & \text{se } -3 \leq x < 2 \\ -x^2 + 6x - 7 & \text{se } 2 \leq x \leq 5 \end{cases};\ \text{b) } g''(-1) = 0;\ \text{c) } x_{\min} = -2,\ x_{\max} = 3 + \sqrt{2};\ \text{d) } x_{F_1} = -1,\ x_{F_2} = 1,\ x_{F_3} = 3\right]$

61 Considera la funzione $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2-4)^2}$.

a. Verifica che è una funzione dispari e studiane la derivabilità.

b. Determina i punti di massimo e di minimo relativo specificando se sono punti stazionari. Stabilisci inoltre se ci sono punti di massimo e minimo assoluto motivando la risposta.

c. Studia la concavità e la convessità del grafico di $f(x)$.

d. Verifica che la funzione $g(x) = f(|x|)$ ammette un punto angoloso in $x = 0$ e calcola l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle tangenti al grafico di $g(x)$ in tale punto.

[b) punti stazionari: min $x = -\sqrt{\frac{12}{7}}$, max $x = \sqrt{\frac{12}{7}}$, punti non stazionari: min $x = 2$, max $x = -2$; d) $\pi - 2\arctan(2\sqrt[3]{2})$]

62 **ESERCIZIO SVOLTO** Considera la funzione $f(x) = \ln(1+x^2) + \arctan x$.

a. Dopo aver dimostrato che $f(x)$ ammette uno zero nell'intervallo $[-2; -1]$ e non ammette zeri per $x > 0$, studia la funzione e disegnane il possibile grafico.

b. Dimostra che il grafico di $f(x)$ ha due punti di flesso obliquo F_1 e F_2 e che le rette tangenti in tali punti sono tra loro perpendicolari.

c. Studia e rappresenta in uno stesso riferimento le funzioni $h(x) = f'(x)$ e $g(x) = -\frac{1}{f'(x)}$.
Dimostra poi che i massimi e i minimi delle due funzioni sono tutti e soli i punti di intersezione tra l'insieme immagine di $h(x)$ e l'insieme immagine di $g(x)$. Come interpreti questo risultato dal punto di vista delle tangenti al grafico di $f(x)$?

---

a. La funzione $f(x) = \ln(1+x^2) + \arctan(x)$ è definita, continua e derivabile per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Poiché $f(-2) \simeq 0{,}5$ e $f(-1) \simeq -0{,}09$ e f è una funzione continua, per il teorema degli zeri esiste $c \in \,]-2; -1[$ tale che $f(c) = 0$.
Inoltre, per $x > 0$ si ha $f(x) > 0$ perché $\arctan x > 0$ e $1 + x^2 > 1$.
Per studiare la funzione osserviamo che $f(0) = 0$.
Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

dunque non ci sono né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.
La derivata prima è $f'(x) = \frac{2x+1}{1+x^2}$, si annulla in $x = -\frac{1}{2}$ ed è positiva per $x > -\frac{1}{2}$ e negativa per $x < -\frac{1}{2}$, quindi $M\left(-\frac{1}{2}; \ln\left(\frac{5}{4}\right) + \arctan\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ è un minimo locale e assoluto per $f(x)$.

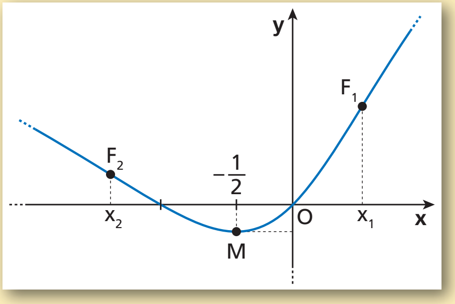
b. Troviamo i punti di flesso utilizzando il metodo dello studio del segno della derivata seconda della funzione:

$$f''(x) = -\frac{2(x^2+x-1)}{(1+x^2)^2} \to f''(x) = 0 \to$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \to x_{1,2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2};$$

$$f''(x) > 0 \to x^2 + x - 1 < 0 \to$$

$$-\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < -\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$



Quindi $f''(x) < 0 \to x < -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x > -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Dunque i punti di flesso F_1 e F_2 hanno rispettivamente ascisse $x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $x_2 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

I coefficienti angolari delle rette tangenti nei due punti di flesso obliquo F_1 ed F_2 sono:

$$m_1 = f'\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad m_2 = f'\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Poiché

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-5}{4} = -1,$$

le rette tangenti al grafico nei due punti di flesso sono perpendicolari tra loro.

c. Studiamo le funzioni $h(x) = f'(x) = \dfrac{2x+1}{1+x^2}$ e $g(x) = -\dfrac{1}{f'(x)} = -\dfrac{1+x^2}{2x+1}$.

La funzione $h(x) = \dfrac{2x+1}{1+x^2}$ ha dominio $\mathbb{R}$, è nulla per $x = -\dfrac{1}{2}$, è positiva per $x > -\dfrac{1}{2}$ e negativa per $x < -\dfrac{1}{2}$.

Inoltre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$ e $h'(x) = f''(x) = -\dfrac{2(x^2+x-1)}{(1+x^2)^2}$.

Dunque $h(x)$ ha un massimo assoluto in $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ e un minimo assoluto in $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Poiché $h(x_1) = f'(x_1) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ e $h(x_2) = f'(x_2) = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, l'insieme immagine di $h(x)$ è

$$I_h = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

La funzione $g(x) = -\dfrac{1+x^2}{2x+1}$ ha dominio $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, è sempre diversa da 0, è positiva per $x < -\dfrac{1}{2}$ e negativa per $x > -\dfrac{1}{2}$.

Inoltre

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^{\pm}} g(x) = \mp\infty, \ \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \mp\infty, \ \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x} = -\frac{1}{2}, \ \lim_{x\to\pm\infty}\left[g(x) + \frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{4},$$

quindi $x = -\dfrac{1}{2}$ è un asintoto verticale e $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}$ è un asintoto obliquo.

La derivata di $g(x)$ è

$$g'(x) = D\left[-\frac{1}{h(x)}\right] = -\left[-\frac{h'(x)}{h^2(x)}\right] = -\frac{2(x^2+x-1)}{(2x+1)^2},$$

che ha gli stessi zeri e lo stesso segno di $h'(x)$. Quindi $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $x_2 = -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ sono rispettivamente punto di massimo e di minimo relativo per $g(x)$.

Poiché, per quanto visto in precedenza, $h(x_1) \cdot h(x_2) = -1$, si ha:

$$g(x_1) = -\frac{1}{h(x_1)} = h(x_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \ \text{ e } \ g(x_2) = -\frac{1}{h(x_2)} = h(x_1) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Dunque l'immagine di $g(x)$ è

$$I_g = \left]-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[.$$

Poiché $I_h \cap I_g = \left\{\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$, i due insiemi immagine si intersecano solo nel massimo e nel minimo di h e g, cioè oltre a x_1 e x_2 non esistono altre coppie di valori x_a e x_b con $h(x_a) = g(x_b)$, cioè con $f'(x_a) = -\dfrac{1}{f'(x_b)}$. Questo dimostra che F_1 e F_2 sono i soli punti del grafico di $f(x)$ che hanno le tangenti tra loro perpendicolari.

63 Sia data la funzione $f(x) = (A + x)e^{-Bx}$.

a. Determina i valori di A e B in modo che $f(x)$ abbia un punto di massimo relativo in $x = 1$ e un punto di flesso in $x = 5$.

b. Studia e rappresenta la funzione $f(x)$ ottenuta sostituendo i valori di A e B trovati.

c. Siano $C(x_C; 0)$ il punto di intersezione del grafico di $f(x)$ con l'asse x, $P(x_P; 0)$ un punto dell'asse x con $x_P \geq x_C$ e Q il punto del grafico di $f(x)$ di ascissa x_P. Determina x_P in modo che l'area del triangolo CPQ sia massima.

$\left[\text{a) } A = 3,\ B = \frac{1}{4}; \text{ c) } x_P = 5\right]$

64 **CINEMATICA CLASSICA** **TEOREMI SULLE FUNZIONI CONTINUE** Luigi parte da casa alle ore 0:00 e percorre, in autostrada, un tratto di 200 km, senza fermarsi, fino a raggiungere il luogo di destinazione alle ore 2:00. Il giorno seguente parte alle 0:00 dal luogo raggiunto e, percorrendo al contrario il percorso dell'andata senza mai fermarsi, arriva a casa alle ore 2:00.

a. Usando il teorema degli zeri, dimostra che esiste un punto del percorso che Luigi attraversa alla stessa ora in entrambi i viaggi.

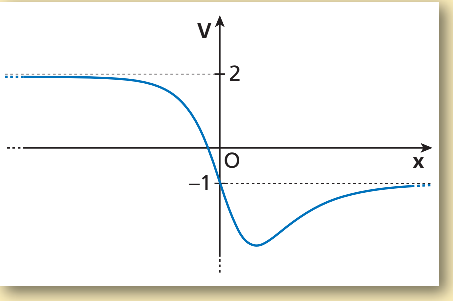
b. Determina tale punto nel caso in cui in entrambi i viaggi Luigi proceda con moto rettilineo uniformemente accelerato.

[b) 100 km]

65 **ESERCIZIO SVOLTO** **CAMPO ELETTRICO** **GRAFICO DI UNA FUNZIONE**

In una regione di spazio è presente un campo elettrostatico non uniforme. Il suo potenziale lungo un'assegnata direzione x segue la legge:

$$V(x) = \frac{ae^x + bx}{x - e^x}, \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}.$$



Il grafico di $V(x)$ è rappresentato in figura.

a. Determina i valori dei parametri a e b.

b. Ricordando che la componente E_x del campo elettrico in direzione x è data da $E_x(x) = -V'(x)$, ricava e studia la funzione $E_x(x)$. Dimostra in particolare che $E_x(x)$ ha un massimo assoluto in $x = 0$ e un minimo assoluto in $x = x_1$ con $x_1 > 1$. Disegna poi il grafico possibile di $E_x(x)$.

c. Esiste un punto dell'asse x in cui una particella, dotata di carica elettrica positiva q e priva di energia cinetica, si troverebbe in condizione di equilibrio? Se sì, tale equilibrio è stabile? Motiva le tue risposte.

d. Quale intensità ha la forza elettrica $\vec{F}_0$ agente sulla particella, se è collocata in $x = 0$ e la sua carica (positiva) è $q = 10^{-18}$ C?

---

a. Poiché

$$-1 = \lim_{x \to +\infty} V(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{ae^x + bx}{x - e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a + b\dfrac{x}{e^x}}{\dfrac{x}{e^x} - 1} = -a,$$

$$2 = \lim_{x \to -\infty} V(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{ae^x + bx}{x - e^x} \underset{t=-x}{=} \lim_{t \to +\infty} \frac{\dfrac{a}{e^t} - bt}{-t - \dfrac{1}{e^t}} = b,$$

abbiamo $a = 1$ e $b = 2$. Sostituiamo i valori dei parametri e otteniamo

$$V(x) = \frac{e^x + 2x}{x - e^x}.$$

Inoltre $V(0) = -1$.

b. Deriviamo $V(x)$ per ottenere $E_x(x)$:

$$V'(x) = \frac{(e^x+2)(x-e^x)-(e^x+2x)(1-e^x)}{(x-e^x)^2} = \frac{3e^x(x-1)}{(x-e^x)^2}.$$

Pertanto:

$$E_x(x) = \frac{3e^x(1-x)}{(x-e^x)^2}.$$

Studiamo la funzione $E_x(x)$. Osserviamo che il denominatore è sempre diverso da 0. Infatti per $x<0$ si ha $x-e^x<0$. Per $x \geq 0$ la funzione $x-e^x$ ha derivata $1-e^x$ sempre negativa, quindi $x-e^x$ è monotòna decrescente per $x \geq 0$. Poiché in 0 $x-e^x$ vale $-1<0$, per $x \geq 0$ $x-e^x$ è sempre negativa.
Dunque la funzione E_x è definita in $\mathbb{R}$. La funzione è positiva per $x<1$, nulla per $x=1$ e negativa per $x>1$. Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3e^x(1-x)}{(x-e^x)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3e^x(1-x)}{e^{2x}\left(\frac{x}{e^x}-1\right)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3(1-x)}{e^x\left(\frac{x}{e^x}-1\right)^2} = 0.$$

L'asse x, quindi, è un asintoto orizzontale.
La derivata di $E_x(x)$ è:

$$E_x'(x) = \frac{3e^x\left[e^x(2-x)-x^2+2x-2\right]}{(x-e^x)^3}.$$

L'equazione

$$E_x'(x)=0 \ \rightarrow \ \frac{3e^x\left[e^x(2-x)-x^2+2x-2\right]}{(x-e^x)^3}=0 \ \rightarrow \ e^x(2-x)-x^2+2x-2=0$$

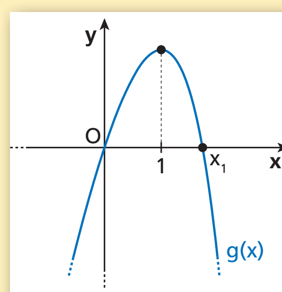
non è risolvibile per via algebrica. Per trovare gli zeri e studiare il segno di $E_x'(x)$ studiamo la funzione $g(x)=e^x(2-x)-x^2+2x-2$.
$g(0)=2-2=0$, quindi $x=0$ è uno zero per $g(x)$.
Calcoliamo i limiti agli estremi del dominio $\mathbb{R}$ e otteniamo:

$$\lim_{x\to-\infty} e^x(2-x)-x^2+2x-2=-\infty, \ \lim_{x\to+\infty} e^x(2-x)-x^2+2x-2=-\infty.$$

Determiniamo la derivata prima di $g(x)$.

$$g'(x)=e^x(2-x)-e^x-2x+2=e^x(1-x)+2(1-x)=(e^x+2)(1-x)$$

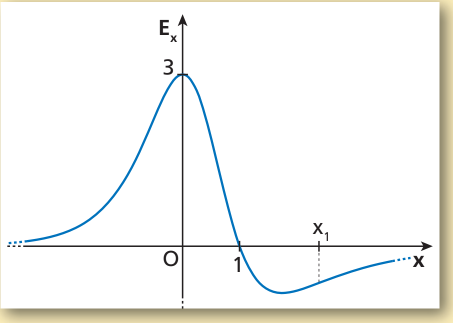
$g'(x)$ si annulla in $x=1$ ed è positiva per $x<1$ e negativa per $x>1$. Dunque $g(x)$ ha un massimo in $x=1$ e $g(1)=e-1+\cancel{2}-\cancel{2}=e-1>0$.
Il grafico di $g(x)$ è rappresentato a fianco.
$g(x)$ si annulla in $x=0$ e in $x=x_1$ con $x_1>1$. Inoltre $g(x)$ è positiva per $0<x<x_1$ e negativa altrove.



Dal grafico di $g(x)$ deduciamo il grafico dei segni di $E_x'(x)=\dfrac{3e^x \cdot g(x)}{(x-e^x)^3}$.

		0		x_1	
$3e^x$	+		+		+
$g(x)$	−	0	+	0	−
$(x-e^x)^3$	−		−		−
$E'_x(x)$	+	0	−	0	+
$E_x(x)$	↗		↘		↗

$E_x{}'(x) = 0$ in $x = 0$ e in $x = x_1$, $E_x'(x)$ è negativa in $0 < x < x_1$ e positiva altrove.
Perciò $E_x(x)$ è crescente per $x < 0$ e $x > x_1$, decrescente per $0 < x < x_1$, ha un massimo relativo in $x = 0$ e un minimo relativo in $x = x_1$.
Poiché la funzione $E_x(x)$ è definita in $\mathbb{R}$ e tende a 0 all'infinito, il massimo e il minimo trovati sono rispettivamente un massimo assoluto e un minimo assoluto. Il possibile grafico di $E_x(x)$ è rappresentato a fianco.



c. Poiché $E_x(1) = 0$, una particella in $x = 1$ è in condizione di equilibrio. Il campo elettrico è diretto verso destra per $x < 1$ e verso sinistra per $x > 1$, quindi se la particella che si trova in $x = 1$ ha carica positiva e compie piccoli spostamenti, la forza risultante, di modulo $F_x = qE_x$, tende a riportare la particella in $x = 1$. Dunque l'equilibrio è stabile.

d. Se la particella carica positivamente ha carica $q = 10^{-18}$ C e si trova in $x = 0$, allora la forza F_0 ha intensità $|F_0| = qE_x(0) = 3 \cdot 10^{-18}$ N.

66 TRASFORMAZIONE DELL'ENERGIA MASSIMI E MINIMI Durante i test drive sulla pista di una fabbrica di auto, il veicolo in prova viene controllato a distanza. Un dispositivo permette di variarne la velocità, espressa in km/h, secondo la legge:

$$v(t) = 1600\frac{t}{10t+1},$$

in cui la variabile t rappresenta il tempo espresso in ore. Il test dura 3 ore.
Dall'analisi dei consumi si vede che il consumo di carburante in litri per 100 km dipende dalla velocità $v \geq 0$ secondo la legge:

$$k(v) = \frac{1000}{250 - v}.$$

a. Dimostra che per tutta la durata del test la velocità aumenta, ma non in modo costante e determina la velocità massima raggiunta dall'auto durante il test. Rispetto alla velocità massima potenzialmente raggiungibile dall'auto che è di 160 km/h, la velocità massima raggiunta durante il test quale percentuale rappresenta?

b. Quanto tempo impiega il veicolo per raggiungere i 40 km/h? Qual è il consumo di carburante previsto dal modello, a questa velocità?

c. Spiega perché la relazione $c(t) = \dfrac{k(v(t)) \cdot v(t)}{100}$ fornisce il consumo istantaneo di carburante in funzione del tempo t, espresso in L/h. Trova l'espressione della funzione $c(t)$ e rappresentala per $t \in [0; 3]$.

$\left[\text{a) } v_{max} \simeq 154,8 \text{ km/h, circa } 96,75\%; \text{ b) 2 minuti, } 4,76 \text{ L ogni 100 km; c) } c(t) = \dfrac{320t}{18t+5}\right]$

67 ESERCIZIO SVOLTO CAMPO ELETTRICO STUDIO DI UNA FUNZIONE Due cariche puntiformi uguali q_0 e q_1 sono situate in due punti $A(0; 0)$ e $B(2; 0)$ le cui coordinate sono espresse in metri. Studia la funzione $E_P(x)$ che rappresenta il modulo del campo elettrico in un generico punto P situato sull'asse x, nell'ipotesi che $q_0 = q_1 = +1$ nC.

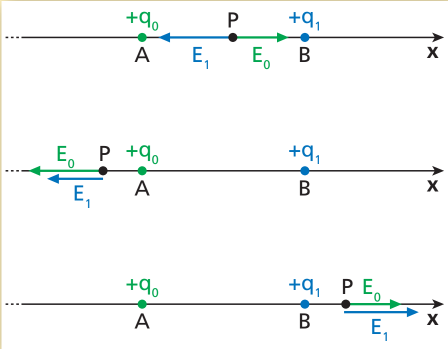
Il campo elettrico generato in un punto P, posto a distanza r da una carica puntiforme positiva q situata in A, ha modulo $E_P = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q}{r^2}$ e verso uscente rispetto alla sorgente. Per il principio di sovrapposizione, il campo totale in un punto P generato da due cariche è dato dalla somma algebrica dei due campi in P.
Nel nostro caso abbiamo $q_0 = q_1 = 1$ nC e distinguiamo in base alla posizione di P rispetto ad A e a B.

Se $P(x;0)$ si trova tra A e B, cioè $0 < x < 2$, allora $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = 2 - x$, e $E_{0P} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q_0}{x^2}$ e $E_{1P} = -9 \cdot 10^9 \dfrac{q_1}{(2-x)^2}$, dato che il vettore $\vec{E}_1$ ha verso opposto rispetto al verso positivo dell'asse x, quindi

$$E_P(x) = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2}\right] \cdot q_0.$$

Se $P(x;0)$ è a sinistra di A, cioè $x < 0$, allora $\overline{PA} = |x|$, $\overline{PB} = 2 - x$, $E_{0P} = -9 \cdot 10^9 \dfrac{q_0}{x^2}$ e $E_{1P} = -9 \cdot 10^9 \dfrac{q_1}{(2-x)^2}$, quindi:

$$E_P(x) = -9 \cdot 10^9 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2}\right] \cdot q_0.$$



Se $P(x;0)$ è a destra di B, cioè $x > 2$, allora $\overline{PA} = x$, $\overline{PB} = x - 2$, $E_{0P} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q_0}{x^2}$ e $E_{1P} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{q_1}{(x-2)^2}$, quindi:

$$E_P(x) = 9 \cdot 10^9 \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right] \cdot q_0.$$

Poiché $q_0 = 10^{-9}$, la funzione $E_P(x)$ pertanto è:

$$E_P(x) = \begin{cases} 9\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2}\right) & \text{se } x > 2 \\ 9\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(2-x)^2}\right) & \text{se } 0 < x < 2. \\ -9\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(2-x)^2}\right) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione è definita in $\mathbb{R} - \{0, 2\}$. Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} E_P(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[-9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2-x)^2}\right)\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 0^+} E_P(x) = \lim_{x \to 0^+} \left[9\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2}\right)\right] = +\infty;$$

$$\lim_{x \to 2^-} E_P(x) = \lim_{x \to 2^-} \left[9\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2}\right)\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 2^+} E_P(x) = \lim_{x \to 2^+} \left[9\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right)\right] = +\infty.$$

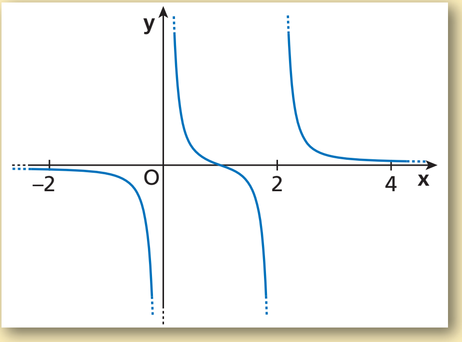
Dunque $x = 0$ e $x = 2$ sono asintoti verticali.
Studiamo il segno. Vediamo che se $x > 2$ $E_P(x) > 0$, se $x < 0$ $E_P(x) < 0$, se $0 < x < 2$ si ha:

$$E_P(x) \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(2-x)^2} \geq 0 \;\rightarrow\; 4 + \cancel{x^2} - 4x - \cancel{x^2} \geq 0 \;\rightarrow\; x \leq 1.$$

Quindi, in particolare, si ha $E_P(x) = 0$ se $x = 1$.
Calcoliamo i limiti all'infinito:

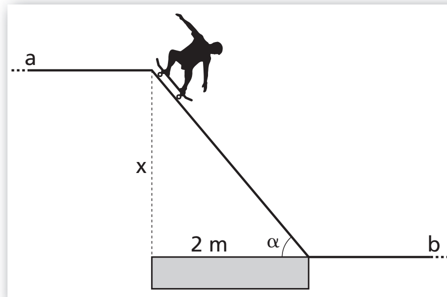
$$\lim_{x \to +\infty} E_P(x) = \lim_{x \to +\infty} 9\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right] = 0,$$

$$\lim_{x \to -\infty} E_P(x) = \lim_{x \to -\infty} -9\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}\right] = 0.$$



Dunque $E_P(x)$ ha asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.
Il grafico di $E_P(x)$ è rappresentato a fianco.

68 **DINAMICA CLASSICA** **MASSIMI E MINIMI** In figura è schematizzata la pista per lo skateboard che Giulio sta progettando. I due tratti di pista a e b sono paralleli. Indichiamo con x la loro distanza, cioè il dislivello superato con il piano inclinato.



a. Trascurando gli attriti e ricordando che la componente dell'accelerazione di gravità $g \simeq 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ lungo un piano inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale è pari a $a = g \cdot \sin\alpha$, ricava il tempo $t(x)$ necessario per percorrere il piano inclinato partendo con velocità nulla dalla sua sommità.

b. Studia e rappresenta la funzione $t(x)$ per $x > 0$ e dimostra che esiste un valore di x per il quale il tempo di discesa risulta minimo. A quale angolo α corrisponde tale valore?

c. Se lungo il piano è presente una forza di attrito costante proporzionale alla componente della forza peso perpendicolare al piano si ha un contributo negativo all'accelerazione lungo il piano pari a $-\mu_D g \cos\alpha$, con $\mu_D = 0{,}3$. Calcola in questa situazione il dislivello x, e di conseguenza l'angolo α, che minimizza il tempo di discesa.

$\left[\text{a) } t(x) = \sqrt{\frac{2}{g}}\sqrt{\frac{4+x^2}{x}}\text{; b) } \alpha_{\min} = \frac{\pi}{4}\text{; c) circa } 2{,}69\ \text{m, arctan}\left(\frac{2{,}69}{2}\right)\text{ rad}\right]$

69 **CINEMATICA CLASSICA** **GRAFICO DI UNA FUNZIONE** Un corpo di massa 1 kg si muove su un percorso rettilineo secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$, dove s è espresso in metri e t in secondi.

a. Disegna il grafico della legge oraria e il grafico della velocità del corpo per $t \in [0; 3]$.

b. Stabilisci l'istante in cui è massima la distanza raggiunta dal corpo rispetto alla posizione di partenza e la velocità in tale istante. Interpreta dal punto di vista cinematico i risultati precedenti.

c. Calcola il lavoro fatto dalle forze che agiscono sul corpo nell'intervallo $[0; 1]$.

$\left[\text{b) } t = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{s, } v = 0\ \text{m/s; c) } L = -58{,}5\ \text{J}\right]$

RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

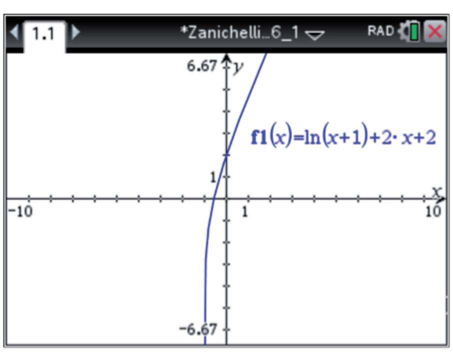
In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Texas Instruments**.

Un'equazione trascendente logaritmica

Stabilisci se l'equazione $\ln(x+1) + 2x + 2 = 0$ ammette una sola soluzione nell'intervallo $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$.

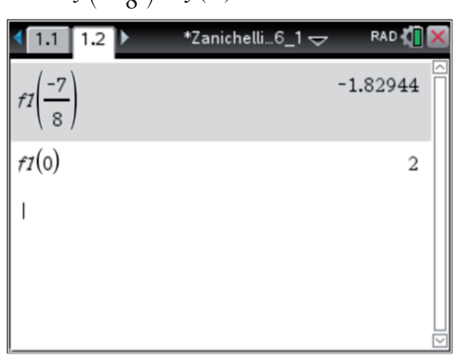
► Esistenza della soluzione.

Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice la funzione $f(x) = \ln(x+1) + 2x + 2$ e premiamo il tasto di invio.



Possiamo osservare che il grafico interseca l'asse delle ascisse in un punto dell'intervallo $[-1; 0]$.

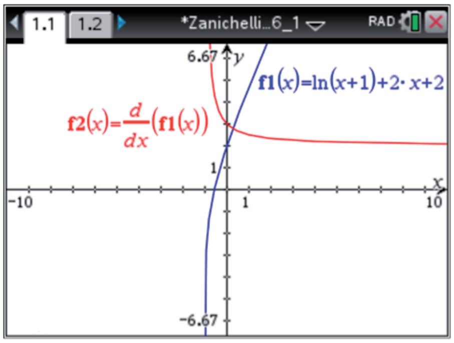
Passiamo all'ambiente di calcolo per determinare il valore della funzione agli estremi dell'intervallo considerato. Osserviamo che il dominio di $f(x)$ è $x > -1$, quindi la funzione è definita nell'intervallo $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$. Calcoliamo $f\left(-\frac{7}{8}\right)$ e $f(0)$.



La funzione ha segno opposto agli estremi dell'intervallo $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$, e quindi, per il teorema degli zeri, esiste almeno un numero reale c, appartenente all'intervallo $\left]-\frac{7}{8}; 0\right[$, tale che $f(c) = 0$.
Questo significa che l'equazione iniziale ha almeno una soluzione.

▶ **Unicità della soluzione.**

Visualizziamo il grafico della derivata prima della funzione $f(x)$ nell'ambiente grafico della calcolatrice.



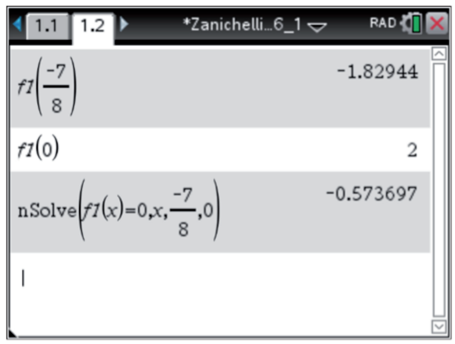
Nella finestra di visualizzazione la derivata prima è sempre positiva e di conseguenza la funzione in esame è strettamente crescente nell'intervallo visualizzato.
Per dimostrare l'unicità della soluzione nell'intervallo considerato avremmo potuto anche calcolare la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + 2.$$

La derivata prima, nell'intervallo $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$, è sempre positiva, infatti $f'(x) > 0, \forall x > -1$. Quindi la funzione $f(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo.
L'equazione $\ln(x+1) + 2x + 2 = 0$ ammette almeno una radice reale nell'intervallo $\left]-\frac{7}{8}; 0\right[$ e la funzione $f(x) = \ln(x+1) + 2x + 2$ è crescente nell'intervallo $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$. Pertanto l'equazione $\ln(x+1) + 2x + 2 = 0$ ammette una sola soluzione in $\left[-\frac{7}{8}; 0\right]$.

▶ **Un passo in più.**

Se vogliamo calcolare un valore approssimato della soluzione, possiamo utilizzare il comando *nSolve* nell'ambiente di calcolo.



RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

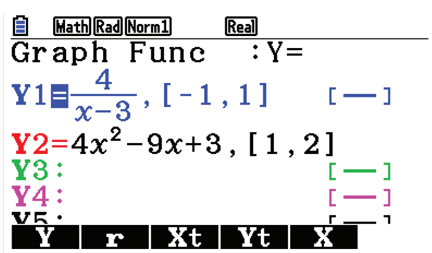
In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

Le ipotesi del teorema di Lagrange

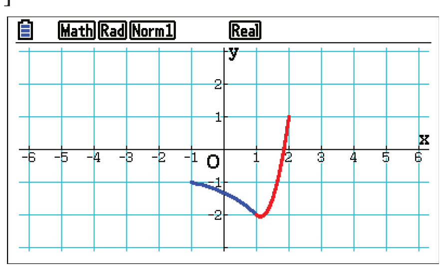
Considera la funzione $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x-3} & \text{se } -1 \le x < 1 \\ 4x^2 - 9x + 3 & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ nell'intervallo $[-1; 2]$. Verifica la validità delle ipotesi del teorema di Lagrange, determinando il punto che lo soddisfa.

▶ **Continuità della funzione.**

Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice i due tratti della funzione.



Il grafico mostra una funzione continua nell'intervallo $[-1; 2]$.



Dimostriamo formalmente la continuità. La funzione $f(x)$ è continua $\forall x \neq 1$. Infatti, nell'intervallo

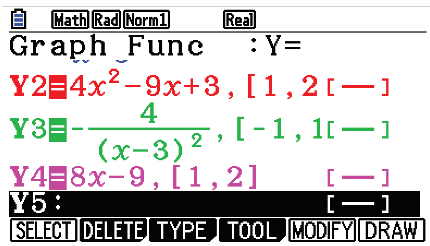
$-1 \le x < 1$, $f(x) = \dfrac{4}{x-3}$ è definita e continua e, nell'intervallo $1 < x \le 2$, $f(x) = 4x^2 - 9x + 3$ è definita e continua.
In $x = 1$ la funzione è continua se $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.
Poiché $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -2 = f(1)$ la funzione è continua anche in $x = 1$.

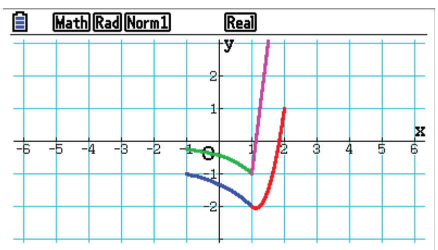
► Derivabilità della funzione.

Se calcoliamo la derivata otteniamo:

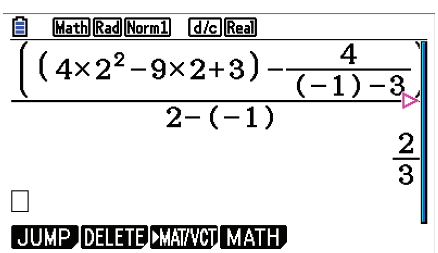
$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x-3)^2} & \text{se } -1 < x < 1 \\ 8x - 9 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}.$$

Visualizziamo nella finestra grafica anche il grafico della derivata prima.



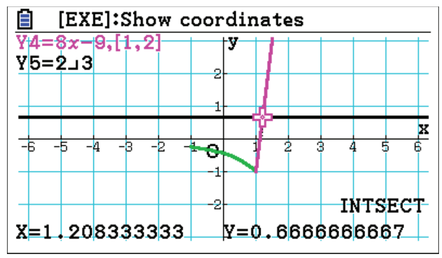


La funzione $f'(x)$ è continua $\forall x \ne 1$.
Verifichiamo che è continua anche in $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -1 = \lim\limits_{x \to 1^+} f'(x)$.
La funzione $f(x)$ è derivabile in $]-1; 2[$.
Pertanto sono soddisfatte le condizioni del teorema di Lagrange.
Nell'ambiente di calcolo determiniamo il valore che la derivata prima deve assumere in un punto dell'intervallo $]-1; 2[$ per soddisfare il teorema di Lagrange, cioè eseguiamo il calcolo $\dfrac{f(2) - f(1)}{2 - (-1)}$.

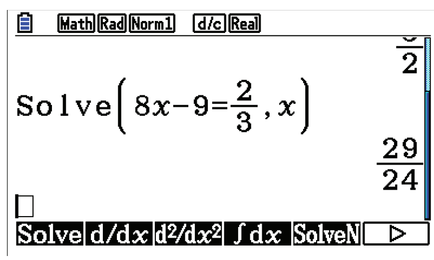


► Troviamo il punto che soddisfa le ipotesi del teorema.

Dobbiamo determinare l'ascissa del punto di intersezione del grafico della derivata prima con la retta di equazione $y = \dfrac{2}{3}$.
Torniamo nell'ambiente grafico, nascondiamo il grafico della funzione di partenza e inseriamo la retta $y = \dfrac{2}{3}$. Determiniamo il punto di intersezione tra la retta e il grafico della derivata della funzione attraverso i comandi *G-Solv* → *INTSECT*.



Il grafico ottenuto ci dice che il punto c cercato nell'intervallo $[-1; 2]$ è approssimativamente 1,21 e che il punto corrispondente del grafico della derivata prima si trova sul ramo di equazione $y = 8x - 9$.
Risolviamo l'equazione $8x - 9 = \dfrac{2}{3}$ nell'ambiente di calcolo per ottenere il risultato in forma frazionaria e confermare il valore ottenuto per via grafica. Utilizziamo i comandi *OPTN* → *CALC* → *Solve*.



La soluzione del nostro problema è $c = \dfrac{29}{24}$.

RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Texas Instruments**.

Problema sullo studio di una funzione

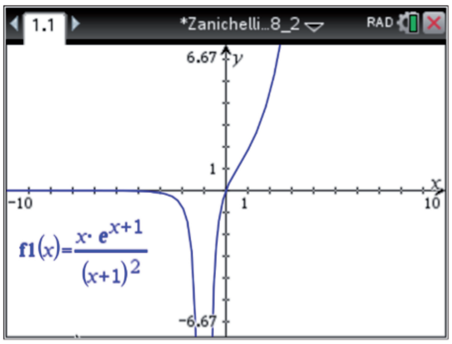
Considera la funzione $f(x) = \dfrac{xe^{x+1}}{(x+1)^2}$.

a. Studia la funzione e traccia il suo grafico γ, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b. Scrivi le equazioni della tangente e della normale a γ nel punto di intersezione con l'asse x e calcola l'area del triangolo che esse formano con la retta di equazione $y = 2$.

► Studio della funzione.

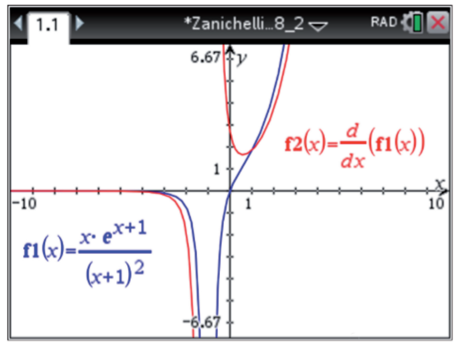
Il dominio della funzione $f(x)$ è $x \neq -1$.
Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice la funzione.



Dal grafico della funzione si deduce che $f(x) < 0$ per $x < 0$ $(x \neq -1)$ e $f(x) > 0$ per $x > 0$.
Consideriamo, infatti, la funzione $f(x)$: tutti i termini della funzione sono sempre positivi tranne x. Quindi $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$. Per $x = 0$ la funzione si annulla.
Inoltre dal grafico possiamo dedurre che la funzione tende a 0 per valori negativi quando $x \to -\infty$. Dimostriamolo calcolando:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{xe^{x+1}}{(x+1)^2} = 0^-.$$

Quindi la retta di equazione $y = 0$ è un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.
La funzione tende a $-\infty$ quando x tende a -1. Infatti $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. Quindi la retta di equazione $x = -1$ è un asintoto verticale.
Il grafico della funzione interseca l'asse x e l'asse y nell'origine, poiché risulta $f(0) = 0$.
Da un primo esame del grafico si intuisce che la funzione è decrescente per $x < -1$ e crescente per $x > -1$.
Visualizziamo il grafico della derivata prima grazie alla calcolatrice, senza dover procedere al calcolo di $f'(x)$.
Nella finestra visualizzata la derivata prima è negativa per $x < -1$ e positiva per $x > -1$. Inoltre l'esistenza di un punto di minimo della derivata prima per $0 < x < 1$, lascia presumere l'esistenza di un punto di flesso.



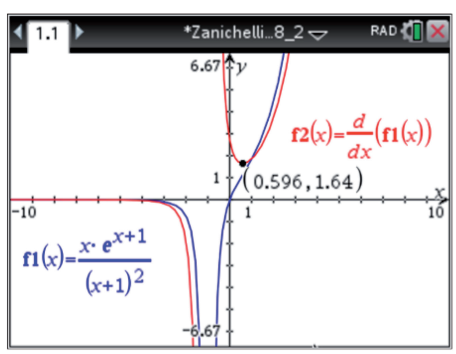
Si può dimostrare quanto appena osservato calcolando la derivata prima della funzione:

$$f'(x) = \frac{e^{x+1}(x^2+1)}{(x+1)^3}, \text{ con } x \neq -1.$$

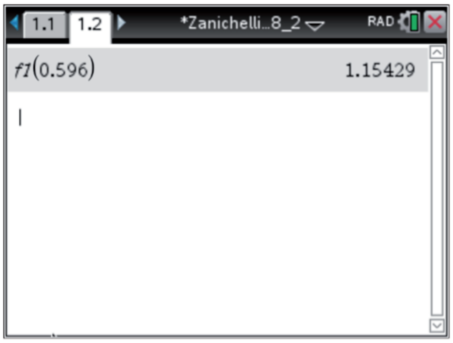
La derivata è positiva per $x > -1$ e negativa per $x < -1$.
Calcoliamo ora la derivata seconda di $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{e^{x+1}(x^3+3x-2)}{(x+1)^4}, \text{ con } x \neq -1.$$

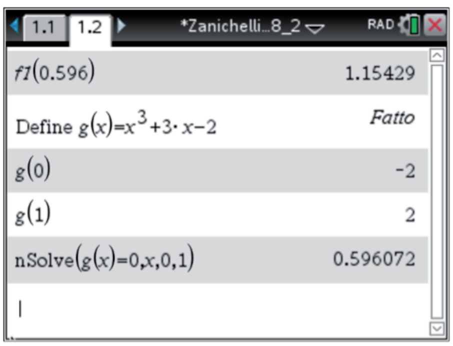
Poiché $\dfrac{e^{x+1}}{(x+1)^4} > 0$ per $x \neq -1$, la funzione $f(x)$ ammette un punto di flesso c tale che $c^3 + 3c - 2 = 0$.
Infatti se consideriamo la funzione $g(x) = x^3 + 3x - 2$, si ha $g(0) = -2$ e $g(1) = 2$, quindi g ha uno zero e f ha un punto di flesso nell'intervallo $]0;1[$ che possiamo approssimare con i metodi numerici.
Con la calcolatrice possiamo determinare l'ascissa del punto di flesso tramite i comandi *Analizza grafico* → *Minimo* applicati al grafico della derivata prima.



Se vogliamo la corrispondente ordinata del punto di flesso possiamo aprire una pagina dall'ambiente *Calcolatrice* e determinare il corrispondente valore della funzione.



Quindi il punto di flesso ha coordinate (0,596; 1,154). Se vogliamo una precisione maggiore dobbiamo ricorrere al calcolo simbolico. Abbiamo visto che la derivata seconda si annulla quando $x^3 + 3x - 2 = 0$. Questo polinomio ha uno zero nell'intervallo [0; 1] che possiamo determinare nell'ambiente *Calcolatrice*.



► Equazioni della tangente e della normale.

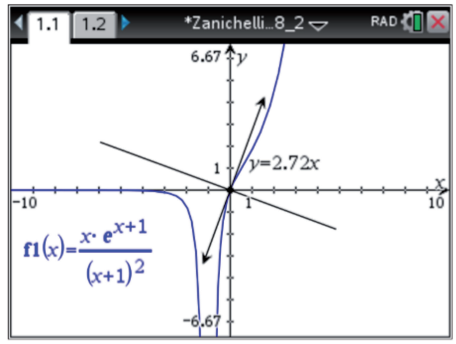
Per calcolare la tangente alla funzione nel punto (0; 0) determiniamo:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \rightarrow y = ex.$$

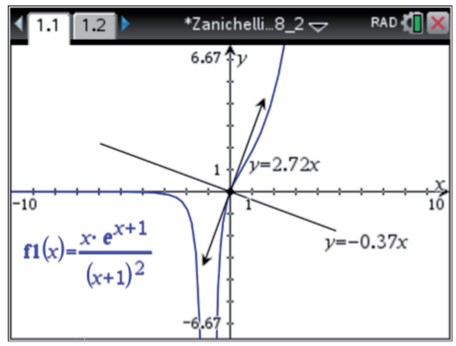
La normale, invece, è la retta di coefficiente angolare $m = -\frac{1}{e}$, passante per l'origine:

$$y = -\frac{1}{e}x.$$

Con la calcolatrice grafica, possiamo trovare gli stessi risultati approssimati. Nascondiamo il grafico della derivata prima e tracciamo le due rette, tangente e normale, per il punto (0; 0).

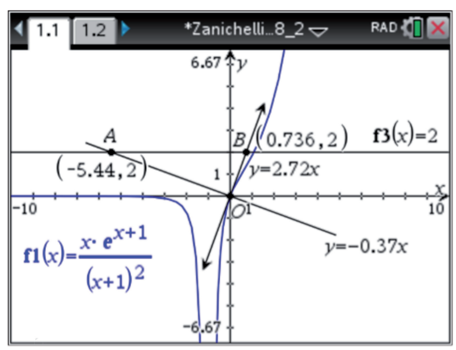


Possiamo far comparire anche l'equazione della normale tramite i comandi *Azioni* → *Coord. ed eq.*



► Area del triangolo.

Tracciamo ora la retta di equazione $y = 2$ e visualizziamo anche le coordinate dei punti di intersezione delle due rette, tangente e normale, con la retta appena tracciata.



Calcoliamo i valori esatti delle intersezioni:

$$A(-2e; 2) \text{ e } B\left(\frac{2}{e}; 2\right).$$

Il segmento:

$$AB = |x_B - x_A| = \frac{2}{e} + 2e = \frac{2 + 2e^2}{e} \simeq 6{,}17.$$

L'area del triangolo ABO è uguale a:

$$A_{ABO} = \frac{AB \cdot 2}{2} \simeq 6{,}17.$$

Integrali

70 Considera la curva γ di equazione:

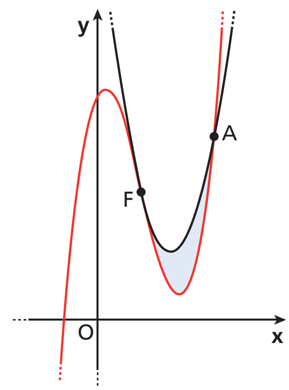
$$y = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 5.$$

a. Determina le coordinate del punto di flesso F della curva.

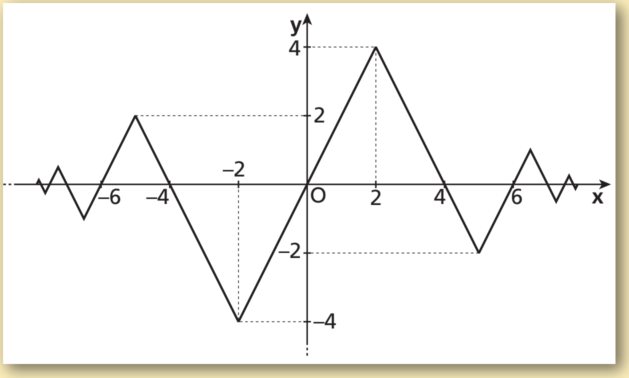
b. Scrivi l'equazione del fascio di parabole con asse verticale e tangenti a γ in F.

c. Tra le parabole del fascio aventi concavità verso l'alto, determina quella per cui l'area della regione colorata in figura è uguale a 1.

$\left[\text{a) } F(1; 3); \text{ b) } y = (c-7)x^2 + (10-2c)x + c; \text{ c) con } k = c-7, k = 2\sqrt[4]{6}\right]$



71 **ESERCIZIO SVOLTO** In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$, che è continua e dispari. I triangoli che il grafico di $f(x)$ forma con il semiasse positivo delle ascisse costituiscono una successione di triangoli isosceli simili tra loro, in cui ogni triangolo ha le dimensioni dimezzate rispetto al precedente.



a. Dimostra che il dominio D_f della funzione è l'intervallo aperto $]-8; 8[$.

b. Considera la funzione $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ e calcola $g(4)$, $g(-4)$ e $g\left(\frac{13}{2}\right)$. Determina inoltre $\lim_{x \to 8^-} g(x)$, motivando adeguatamente la risposta.

c. Ricava esplicitamente l'espressione della funzione $g(x)$ nell'intervallo $[0; 4]$, quindi determina il volume V del solido che si ottiene ruotando di 2π intorno all'asse y il grafico di $g(x)$ nell'intervallo considerato.

---

a. Il dominio D_f della funzione $f(x)$ è dato dall'unione dei segmenti che costituiscono le basi dei triangoli. Poiché le basi sono adiacenti, il dominio D_f è l'intervallo $]-s; s[$, dove s è il limite della successione delle somme parziali della progressione geometrica di primo termine $a_1 = 4$ e ragione $q = \frac{1}{2}$. Poiché per una progressione geometrica di questo tipo la successione delle somme parziali ha termine generale $s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$, abbiamo:

$$s = \lim_{n \to +\infty} s_n = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 8.$$

Il dominio D_f della funzione è perciò l'intervallo $]-8; +8[$.

b. $g(4) = \int_0^4 f(t)dt$ e, poiché per $t \in]0; 4[$ $f(t)$ è positiva, $g(4)$ è l'area del triangolo di vertici $(0; 0)$, $(4; 0)$ e $(2; 4)$. Quindi $g(4) = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8$.

Per calcolare $g(-4)$ usiamo le proprietà dell'integrale definito e la disparità di $f(x)$:

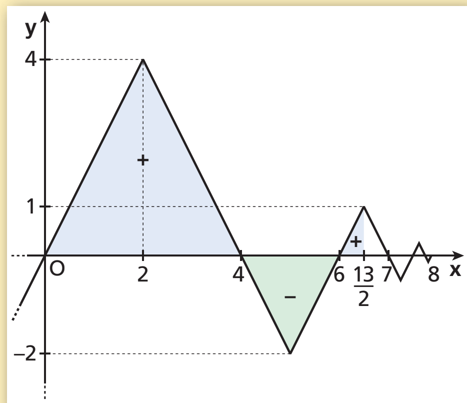
$$g(-4)=\int_0^{-4} f(t)\,dt \underset{\substack{\text{posto } y=-t,\\ \text{si ha } dy=-dt}}{=} -\int_{-4}^{0} f(t)\,dt \underset{f \text{ è dispari}}{=} -\left[-\int_0^4 f(t)\,dt\right]=\int_0^4 f(t)\,dt=g(4)=8.$$

Determiniamo ora $g\left(\frac{13}{2}\right)$:

$$g\left(\frac{13}{2}\right)=\int_0^{\frac{13}{2}} f(t)\,dt=$$

$$\int_0^4 f(t)\,dt+\int_4^6 f(t)\,dt+\int_6^{\frac{13}{2}} f(t)\,dt.$$

Quindi $g\left(\frac{13}{2}\right)$ è la somma algebrica delle aree colorate in figura. Il segno dipende dal segno di $f(x)$.



Abbiamo perciò:

$$g\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{4\cdot 4}{2}-\frac{2\cdot 2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{2}=8-2+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}.$$

Per calcolare $\lim_{x\to 8^-} g(x)$ osserviamo che questo limite è uguale alla differenza tra la somma delle aree dei triangoli nel semipiano positivo delle ordinate e la somma delle aree dei triangoli nel semipiano negativo delle ordinate. Le aree dei primi formano una progressione geometrica di primo termine $b_1=8$ e ragione $q=\frac{1}{16}$, le aree dei secondi formano una progressione geometrica di primo termine $c_1=2$ e ragione $q=\frac{1}{16}$.

Dunque: $\lim_{x\to 8^-} g(x)=b_1\cdot\frac{1}{1-q}-c_1\cdot\frac{1}{1-q}=8\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}-2\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=6\cdot\frac{16}{15}=\frac{32}{5}.$

c. Ricaviamo dal grafico l'espressione di $f(x)$ nell'intervallo $[0; 4]$:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{se } 0\le x\le 2\\ -2x+8 & \text{se } 2< x\le 4\end{cases}.$$

Integriamo $f(x)$. Per $0\le x\le 2$ abbiamo:

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x 2t\,dt=[t^2]_0^x=x^2.$$

Per $2<x\le 4$ abbiamo:

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^2 f(t)\,dt+\int_2^x f(t)\,dt=[t^2]_0^2+[-t^2+8t]_2^x=$$

$$4-x^2+8x+4-16=-x^2+8x-8.$$

Dunque

$$g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{se } 0\le x\le 2\\ -x^2+8x-8 & \text{se } 2< x\le 4\end{cases}.$$

Per ottenere il volume del solido di rotazione integriamo con il metodo dei gusci cilindrici:

$$V=2\pi\int_0^2 x^3\,dx+2\pi\int_2^4(-x^3+8x^2-8x)\,dx=2\pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2+2\pi\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{8x^3}{3}-4x^2\right]_2^4=\frac{272}{3}\pi.$$

72 Considera la funzione definita da $f(x) = \dfrac{(2\ln x + 3)^2}{x}$, per $x > 0$.

a. Determina gli asintoti della funzione.

b. Dopo aver verificato che la funzione ammette uno zero e che non è mai negativa, studia la convergenza dell'integrale

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)dx, \text{ dove } \alpha \text{ indica lo zero della funzione.}$$

c. Calcola per quale valore di $k \geq \dfrac{1}{\sqrt{e^3}}$ risulta: $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{e^3}}}^{k} f(x)dx = 36$.

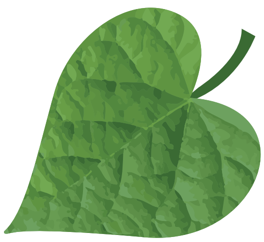
$\left[\text{a) } y = 0, x = 0; \text{ b) divergente; c) } k = e^{\frac{3}{2}}\right]$

73 REALTÀ E MODELLI Considera la funzione $f(x) = a - b\sqrt{c - 2x}$, con a, b e c parametri reali.

a. Determina i valori dei parametri a, b e c, sapendo che il grafico di $f(x)$ è tangente alla retta di equazione $x = 6$ e interseca l'asse x nel punto di ascissa 4 formando un angolo di ampiezza $\arctan\dfrac{1}{2}$.

b. Studia la funzione ottenuta, dimostrando in particolare che è invertibile nel suo dominio. Scrivi poi la funzione inversa $f^{-1}(x)$. Considera la funzione $l(x)$ che ha la stessa espressione analitica di $f^{-1}(x)$, ma è definita nel suo dominio naturale e rappresenta nello stesso riferimento cartesiano $f(x)$ per $x \in [-2; 6]$ e $l(x)$ per $x \in [-2; 4]$.

c. Osserva la foglia in figura. Quale funzione $g(x)$ ha come grafico per $x \in [4; 6]$ la curva che, unita ai grafici di $f(x)$ e di $l(x)$ già disegnati, permette di modellizzare il contorno della foglia?

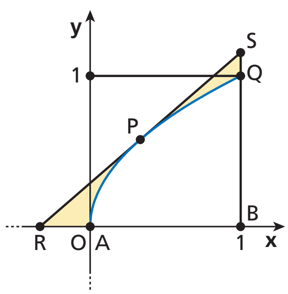


d. Utilizzando il modello matematico costruito, calcola l'ampiezza dell'angolo α formato dalla foglia nella sua punta e l'area della foglia.

e. Per $k \in [-2; 6]$ considera i punti D ed E in cui il bordo della foglia è tagliato dalla retta $y = k$ e la funzione $h(k) = \overline{DE}$. Dopo aver studiato la derivabilità di $h(k)$ in $[-2; 6]$, calcola l'area della superficie delimitata dal grafico di $h(k)$ e dall'asse x.

$\left[\text{a) } a = 2, b = 1, c = 12; \text{ b) } f^{-1}(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 2x + 4; \text{ c) } g(x) = 2 + \sqrt{12 - 2x};\right.$
$\left.\text{d) } \alpha = 2\arctan 4 - \dfrac{\pi}{2}, A = 36; \text{ e) } A_1 = 36\right]$

74 Nella figura a fianco è rappresentato il grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x \in [0; 1]$. Siano P un punto del grafico di f, r la retta tangente al grafico in P e R e S i punti di intersezione di r con l'asse x e la retta $x = 1$.
Determina le coordinate del punto P per cui è minima l'area della regione colorata.



$\left[P\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$

75 ESERCIZIO SVOLTO Considera la funzione $f(x) = \dfrac{k - x}{x^2 + k^2}$, con k parametro reale positivo.

a. Dimostra che l'area della regione finita di piano R, contenuta nel primo quadrante e delimitata dagli assi cartesiani e dal grafico di $f(x)$, non dipende da k ed è uguale a $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln 2}{2}$.

b. Determina per quale valore di k la media integrale di $f(x)$ nell'intervallo $[0; k]$ è $\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\ln\sqrt[3]{2}}{2}$.

c. Considera il solido S che ha come base R e le cui sezioni, ottenute con piani perpendicolari all'asse x, sono semicerchi. Determina per quale valore di k il volume di S è $\dfrac{3\pi(\pi - 2)}{160}$.

a. Il dominio di $f(x)$ è $\mathbb{R}$ e il grafico interseca gli assi cartesiani nei punti $A\left(0; \frac{1}{k}\right)$ e $B(k; 0)$ e $f(x) > 0$ per $x < k$, in particolare $f(x) > 0$ per $0 \leq x < k$, quindi l'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$\int_0^k \frac{k-x}{x^2+k^2}\,dx.$$

Troviamo una primitiva della funzione $f(x) = \frac{k-x}{x^2+k^2}$:

$$\int \frac{k-x}{x^2+k^2}\,dx = \int \frac{k}{x^2+k^2}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+k^2}\,dx = \arctan\frac{x}{k} - \frac{1}{2}\ln(x^2+k^2) + c.$$

Quindi:

$$\int_0^k \frac{k-x}{x^2+k^2}\,dx = \left[\arctan\frac{x}{k} - \frac{1}{2}\ln(x^2+k^2)\right]_0^k =$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2k^2 - \left(0 - \frac{1}{2}\ln k^2\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\ln k^2 - \ln 2k^2) =$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{k^2}{2k^2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

b. Dobbiamo avere:

$\ln\sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln 2$

$$\frac{1}{k}\int_0^k f(x)\,dx = \frac{\pi}{12} - \frac{\ln\sqrt[3]{2}}{2} \to \frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}\right) \to$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{3} \to k = 3.$$

c. La sezione semicircolare a distanza x dall'asse y ha centro in $C\left(x; \frac{f(x)}{2}\right)$ e raggio $r = \frac{f(x)}{2}$.

Il volume del solido S è:

$$V(S) = \int_0^k \frac{\pi}{2}\left[\frac{f(x)}{2}\right]^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^k [f(x)]^2\,dx = \frac{\pi}{8}\int_0^k \frac{(k-x)^2}{(x^2+k^2)^2}\,dx.$$

Cerchiamo la famiglia delle primitive di $\frac{(k-x)^2}{(x^2+k^2)^2}$:

$$\int \frac{(k-x)^2}{(x^2+k^2)^2}\,dx = \int \frac{x^2+k^2-2kx}{(x^2+k^2)^2}\,dx = \int \frac{x^2+k^2}{(x^2+k^2)^2}\,dx - \int \frac{2kx}{(x^2+k^2)^2}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+k^2}\,dx - k\int \frac{2x}{(x^2+k^2)^2}\,dx = \frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + \frac{k}{x^2+k^2} + c.$$

Abbiamo perciò:

$$V(S) = \frac{\pi}{8}\cdot\left[\frac{1}{k}\arctan\frac{x}{k} + \frac{k}{x^2+k^2}\right]_0^k = \frac{\pi}{8}\cdot\left(\frac{1}{k}\arctan 1 + \frac{k}{2k^2} - \frac{1}{k}\right) =$$

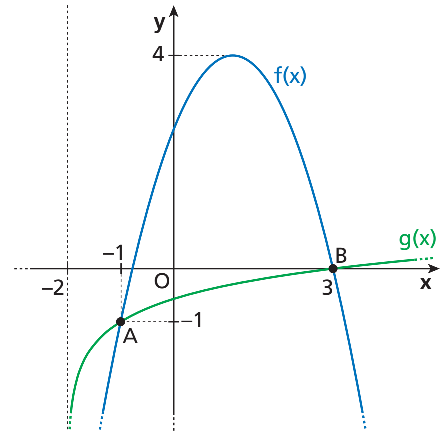
$$\frac{(\pi-2)\pi}{32k}.$$

Dunque:

$$V(S) = \frac{3\pi(\pi-2)}{160} \to \frac{(\pi-2)\pi}{32k} = \frac{3\pi(\pi-2)}{160} \to k = \frac{5}{3}.$$

76 LEGGI IL GRAFICO Considera le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

$$f(x)=\frac{289}{72}+a\left(x-\frac{10}{9}\right)^2,\quad g(x)=b\ln(x+c)+d,$$



dove a, b, c e d sono parametri reali.
Determina:

a. per quali valori dei parametri reali a, b, c e d $f(x)$ e $g(x)$ hanno come grafici quelli rappresentati;

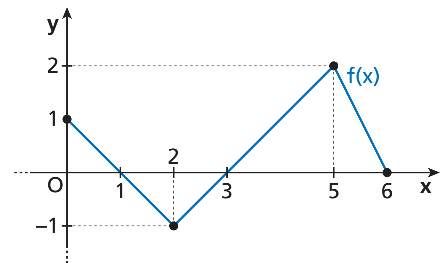
b. l'area della regione di piano delimitata dalle due curve per $-1 \leq x \leq 3$;

c. il volume del solido generato da una rotazione di $\frac{2}{3}\pi$ attorno all'asse y della regione piana delimitata dalla parabola nel primo quadrante.

$\left[\text{a) } a=-\frac{9}{8}, b=\frac{1}{\ln 5}, c=2, d=-1; \text{ b) } A=9+\frac{4}{\ln 5}; \text{ c) } V=\frac{123}{16}\pi\right]$

77 In figura è rappresentato il grafico della funzione $f(x)$, con $x\in[0;6]$. Considera la funzione

$$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

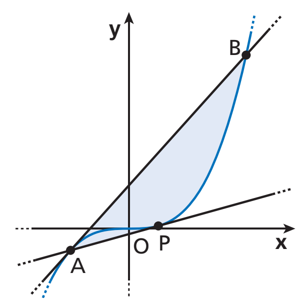


a. Calcola $h(0)$, $h(1)$ e $h(2)$.

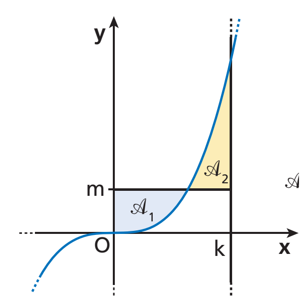
b. Scrivi l'espressione di $h(x)$ e stabilisci quali sono i punti di massimo e minimo relativo di $h(x)$.

$\left[\text{a) } h(0)=0, h(1)=\frac{1}{2}, h(2)=0; \text{ b) min: } x=3, \text{ max: } x=1\right]$

78 Considera il grafico della funzione $f(x)=x^3$.



a. Siano P un punto del grafico di $f(x)$ distinto da O e r la retta tangente al grafico in P.
Detto A l'altro punto di intersezione di r con il grafico di $f(x)$ e detto B l'altro punto di intersezione della retta tangente in A con il grafico di $f(x)$, dimostra che l'area della regione compresa tra la retta per A e B e il grafico di $f(x)$ è 16 volte l'area della regione compresa tra la retta per A e P e il grafico di $f(x)$, indipendentemente dalla scelta del punto P.

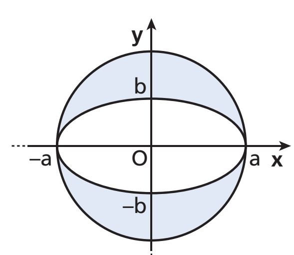


b. Considera le rette $y=m$ e $x=k$ e le loro intersezioni con il grafico di $f(x)$ nel primo quadrante. Determina m e k sapendo che le aree $\mathscr{A}_1$ e $\mathscr{A}_2$ in figura sono entrambe uguali a $\frac{243\sqrt[3]{2}}{32}$.

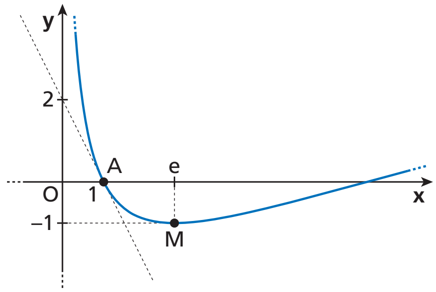
c. La cubica $y=x^3$ e la parabola di equazione $y=hx^2$, con $h>0$, si incontrano nel primo quadrante delimitando una regione finita di area $\mathscr{A}$. Le due curve assegnate hanno in comune, oltre all'origine, anche il punto P (nel primo quadrante). Dimostra che l'area delimitata dal segmento OP e dalla parabola ha area $2\cdot\mathscr{A}$.

$\left[\text{b) } k=3, m=\frac{27}{4}\right]$

79 Considera un'ellisse di semiassi a e b, con $a>b$, e la circonferenza a essa concentrica di raggio $r=a$, come in figura.
Dimostra, usando le proprietà dell'integrale definito, che l'area colorata, ottenuta come differenza tra l'area del cerchio e quella dell'ellisse, è uguale all'area racchiusa nell'ellisse con centro nell'origine e di semiassi a e $a-b$.



80 Il grafico in figura rappresenta l'andamento della funzione $f(x) = a\ln x(\ln x + b)$, definita per $x > 0$, dove a e b sono parametri reali non nulli.



a. Sulla base dei dati che puoi ricavare dal grafico, determina il valore dei parametri a e b.

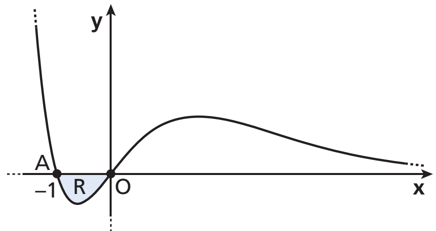
b. Determina il valore dei coefficienti reali c e d tali che $F(x) = cx(\ln x + d)^2$ sia una primitiva di $f(x)$.

c. Studia la convergenza dell'integrale $\int_0^1 f(x)dx$.

d. Considera la funzione integrale $G(x) = \int_1^x f(t)dt$. Calcola $\lim_{x \to 0^+} G(x)$ e determina i punti di massimo e minimo relativo e gli eventuali punti di flesso della funzione $G(x)$.

[a) $a = 1, b = -2$; b) $c = 1, d = -2$; c) convergente; d) max$(1; 0)$, min$(e^2; -4)$, flesso$(e; e-4)$]

81 LEGGI IL GRAFICO La funzione $f(x) = (x^2 - 3x)e^{-x}$ è la derivata seconda della funzione $g(x)$ il cui grafico è rappresentato in figura.



a. Determina l'espressione di $g(x)$ in modo che il suo grafico intersechi l'asse x nei punti A e O.

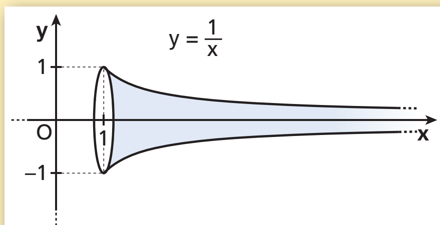
b. Calcola l'area della porzione di piano, contenuta nel primo quadrante, delimitata dall'asse x, dal grafico di $g(x)$ e dalla sua tangente nel punto di flesso di ascissa positiva.

c. Determina il volume del solido ottenuto da una rotazione completa della regione R attorno all'asse y.

$\left[\text{a) } g(x) = (x^2 + x)e^{-x}\text{; b) } A = 3 - \frac{33}{5}e^{-3}\text{; c) } V = 2\pi(3e - 8)\right]$

82 ESERCIZIO SVOLTO Considera la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}, \text{ con } x > 1.$$



a. Dimostra che l'area della regione compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x è infinita.

b. Considera il solido ottenuto dalla rotazione del grafico di $f(x)$ intorno all'asse x. Tale solido è detto *tromba di Torricelli* dal nome del fisico che per primo studiò questo solido. Dimostra che la tromba di Torricelli ha volume finito e calcolane il valore.

c. Sapendo che l'area della superficie laterale A di un solido ottenuto dalla rotazione del grafico di una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo $[a; b]$ è data da

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

verifica che l'area della superficie della tromba di Torricelli è:

$$A = \pi(\sqrt{2} - 1) + \pi \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

d. Verifica che $F(t) = \ln(t + \sqrt{1 + t^2}) + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è l'insieme delle primitive di $\frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ e spiega perché è stato detto che «la tromba di Torricelli può essere riempita con una quantità finita di vernice, ma questa non basta per verniciare la sua superficie infinita».

a. Poiché

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x}dx = \lim_{a\to+\infty}\left[\ln|x|\right]_1^a = \lim_{a\to+\infty}\ln a = +\infty,$$

l'area della regione compresa tra il grafico di $f(x)$ e l'asse x è infinita.

b. Il volume V è determinato dal seguente integrale improprio:

$$V = \pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\pi\int_1^t\frac{1}{x^2}dx = \pi\lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t = \pi\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = \pi.$$

c. Nel nostro caso $f(x) = \frac{1}{x}$, quindi $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e l'integrale è un integrale improprio.

Usando la formula abbiamo:

$$A = 2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}dx = 2\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}dx = 2\pi\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx.$$

Cerchiamo una primitiva di $\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}$:

$$\int\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx =$$

posto $x^2 = t \to x = \sqrt{t}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$

$$\int\frac{\sqrt{t^2+1}}{t\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \int\frac{\sqrt{t^2+1}}{2t^2}dt =$$

integrando per parti

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t}\sqrt{t^2+1} - \int -\frac{1}{\cancel{t}}\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{t^2+1}}\cdot\cancel{2}\cancel{t}\,dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t} + \int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt\right).$$

Dunque:

$$A = 2\pi\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx = \pi\lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\right]_1^b + \pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \pi(\sqrt{2}-1)+\pi\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt.$$

d. Derivando $F(t) = \ln(t+\sqrt{1+t^2})+c$, otteniamo:

$$F'(t) = \frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t+\sqrt{1+t^2}} = \frac{\cancel{t+\sqrt{1+t^2}}}{\sqrt{1+t^2}\,\cancel{(t+\sqrt{1+t^2})}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Conoscendo le primitive di $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, possiamo verificare che l'area della superficie laterale della tromba di Torricelli è infinita. Infatti:

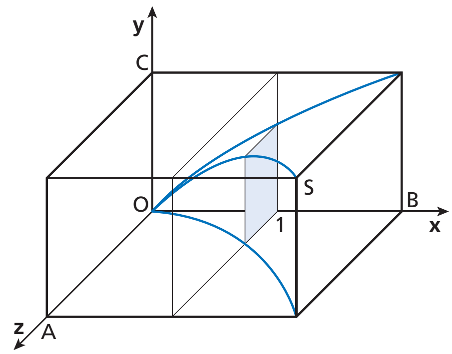
$$A = \pi(\sqrt{2}-1)+\pi\lim_{p\to+\infty}\left[\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_1^p =$$

$$\pi(\sqrt{2}-1)+\pi\lim_{p\to+\infty}\left[\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)-\ln(1+\sqrt{2})\right] =$$

$$\pi[\sqrt{2}-1-\ln(1+\sqrt{2})]+\pi\lim_{p\to+\infty}\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right) = +\infty.$$

Poiché il volume è finito, ma la superficie laterale è infinita, basta una quantità finita di vernice per riempire la tromba, ma questa non è sufficiente per verniciare la sua superficie laterale.

83 Il solido S, con i contorni evidenziati in figura, occupa una parte del parallelepipedo avente un vertice nell'origine O del riferimento $Oxyz$ e tre vertici nei punti $A(0; 0; 2)$, $B(2; 0; 0)$ e $C(0; \ln 3; 0)$.
La base di S nel piano Oxy è individuata dal grafico della funzione $y = \ln(x+1)$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, mentre la base di S nel piano Oxz è determinata dal grafico della funzione $z = \frac{1}{2}x^2$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$. Tutte le sezioni di S con piani perpendicolari all'asse x sono dei rettangoli.



a. Calcola il volume V_S del solido S e quale percentuale del volume V_P del parallelepipedo in cui è inscritto S è rappresentata da V_S.

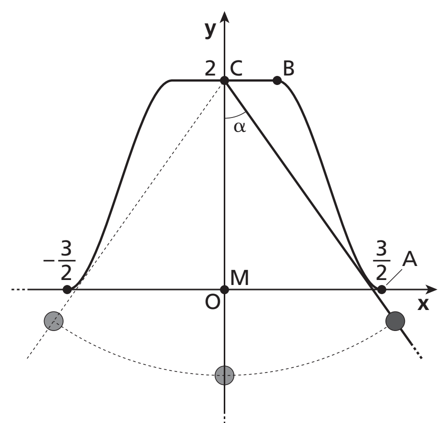
b. Considera la sezione R del parallelepipedo definita dal piano perpendicolare all'asse x di equazione $x = 1$. Quale percentuale della superficie di R è in comune con il solido S?

$\left[\text{a) } V_S = \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{4}{9}, \text{ circa } 27{,}4\%; \text{ b) circa } 15{,}8\%\right]$

84 Studia la seguente funzione integrale:

$$g(x) = \int_0^x \frac{2}{t^2+4}\,dt.$$

85 **REALTÀ E MODELLI** Nella figura a fianco è rappresentato il profilo interno schematizzato di una campana.



a. Determina le costanti a, b e c in modo tale che il grafico della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ ax^3 + bx^2 + cx & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

rappresenti l'arco ABC, tenendo presente che la funzione deve risultare derivabile in tutti i punti interni all'intervallo $\left[0; \frac{3}{2}\right]$.

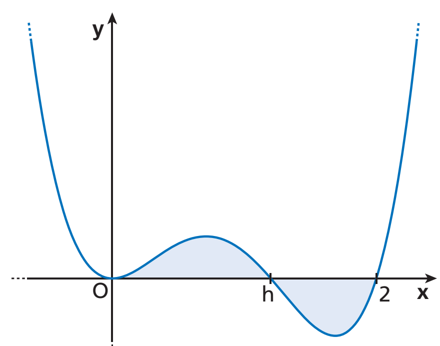
b. Calcola il volume V interno alla campana.

c. Schematizzando il batacchio con un segmento avente un estremo fissato nel punto C, determina l'ampiezza in gradi e minuti del massimo angolo di semiapertura α descritto dalla sua oscillazione.

$\left[\text{a) } a = 4, b = -12, c = 9; \text{ b) } V = \frac{21}{10}\pi; \text{ c) } \alpha = \frac{\pi}{2} - \arctan(6\sqrt{3} - 9) \text{ rad} \simeq 35°41'\right]$

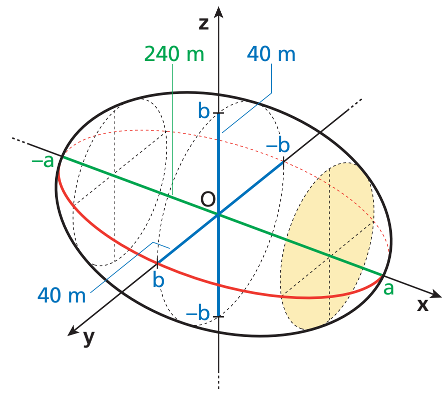
86 **LEGGI IL GRAFICO** In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f(x)$ polinomiale di quarto grado. Scrivi l'espressione di $f(x)$ e determina per quale valore di h le due aree colorate in figura sono uguali.

$\left[f(x) = ax^2(x-h)(x-2); h = \frac{6}{5}\right]$



87 **REALTÀ E MODELLI** Uno dei più grandi dirigibili costruiti, verso la fine degli anni 30 e appartenente alla U.S. Navy, aveva le dimensioni di circa 240 m di lunghezza e di 40 m di diametro. La sua forma era quindi assimilabile a quella di un ellissoide di equazione $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ con $a=120$ e $b=20$. Con riferimento alla figura, l'ellissoide è generato dalla rotazione intorno all'asse x, di un'ellisse di semiassi a e b nel piano xy. Se il dirigibile è riempito con elio che ha densità $\rho = 0{,}1785\ \text{kg/m}^3$, calcola la massa dell'elio contenuta nel dirigibile.

[circa 36 tonnellate]



88 **ESERCIZIO SVOLTO** Considera le funzioni definite da:

$$f(x)=\frac{x^2}{k} \text{ e } g(x)=\sqrt{kx},$$

dove $k \in \mathbb{R}^+$ è un parametro. Considera i loro grafici in un piano cartesiano.

a. Determina il valore del parametro k in modo che l'area della regione piana R, contenuta nel primo quadrante, delimitata dai grafici delle funzioni date valga 12.

b. Considera un solido S con base R le cui sezioni, ottenute con piani ortogonali all'asse x, sono triangoli equilateri la cui base giace sul piano Oxy. Determina il volume del solido S.

---

a. Consideriamo le due funzioni nel dominio comune $x \geq 0$. I grafici delle due funzioni si incontrano nell'origine e nel punto $A(k; k)$. Infatti:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{k} \\ y=\sqrt{kx} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2}{k}=\sqrt{kx} \rightarrow \frac{x^4}{k^2}=kx \rightarrow x(x^3-k^3)=0 \rightarrow x=0 \vee x=k.$$

Esprimiamo l'area di R in funzione di k, poiché $g(x) \geq f(x)$ per $0 \leq x \leq k$, possiamo scrivere:

$$A=\int_0^k\left[\sqrt{kx}-\frac{x^2}{k}\right]dx=\left[\sqrt{k}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3k}\right]_0^k=\sqrt{k}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{k^3}-\frac{k^3}{3k}=\frac{2k^2}{3}-\frac{k^2}{3}=\frac{k^2}{3}.$$

Imponendo che l'area sia uguale a 12 otteniamo:

$$A=12 \rightarrow \frac{k^2}{3}=12 \rightarrow k^2=36 \rightarrow k=6.$$

Pertanto le funzioni cercate sono: $f(x)=\frac{x^2}{6}$ e $g(x)=\sqrt{6x}$.

b. Ogni sezione triangolare ha base in R e la lunghezza della base è $\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}$. Poiché i triangoli sono equilateri l'altezza di ogni sezione è $\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)$.

L'area di ogni sezione è perciò $S(x)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)^2$ e dunque il volume del solido è:

$$V=\int_0^6\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{6x}-\frac{x^2}{6}\right)^2dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^6\left(\frac{x^4}{36}-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot x^{\frac{5}{2}}+6x\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{x^5}{180}-\frac{2\sqrt{6}}{21}x^{\frac{7}{2}}+3x^2\right]_0^6=$$

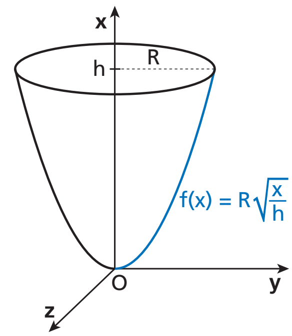
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{972}{35}=\frac{243\sqrt{3}}{35}.$$

89 Il paraboloide in figura è ottenuto facendo compiere una rotazione completa intorno all'asse x al ruotare il grafico di $f(x) = R\sqrt{\frac{x}{h}}$, $0 \leq x \leq h$, con $h \neq 0$.

a. Determina il volume del paraboloide al variare di R e h.

b. Si vuole tagliare il paraboloide con un piano α perpendicolare al suo asse di simmetria in modo da ottenere due solidi aventi lo stesso volume. Qual è la distanza del piano α dal vertice del paraboloide?

$\left[\text{a) } V = \frac{\pi R^2 h}{2}; \text{ b) } \frac{h}{\sqrt{2}}\right]$



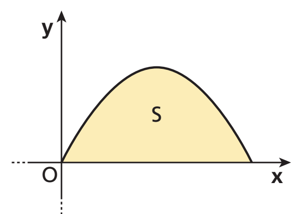
90 **a.** Disegna il grafico della funzione $f(x) = e^{-x}$. Traccia la tangente a $f(x)$ in $A(0; 1)$ e verifica che $e^{-x} \geq 1 - x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

b. Dimostra che per ogni $t \in \mathbb{R}$ risulta: $t^2 + e^{-t^2} \geq 1$.

c. Dimostra che $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$.

91 La superficie S in figura è delimitata dalla parabola di equazione $y = k(-x^2 + 2x)$ e dall'asse x.
Determina per quale valore reale di k il volume V_x del solido generato dalla rotazione completa di S attorno all'asse x è uguale al volume V_y del solido generato dalla rotazione completa di S attorno all'asse y.

$\left[k = \frac{5}{2}\right]$

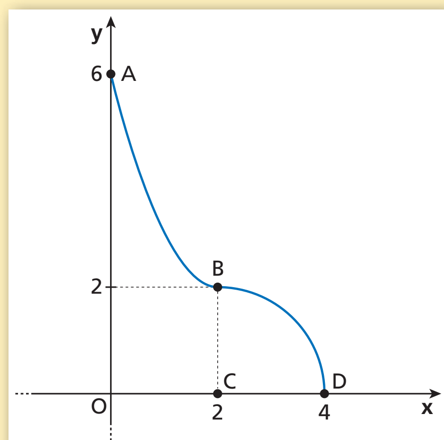


92 **ESERCIZIO SVOLTO** La figura rappresenta il grafico di una funzione f, definita nell'intervallo $[0; 4]$, ottenuta mediante un arco di parabola di vertice B e un quarto di circonferenza di centro C.
Calcola, se possibile, il valore dei seguenti integrali, senza determinare l'espressione analitica della funzione $f(x)$:

a. $\int_0^2 f(2x) dx$;

b. $\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$;

c. $\int_4^0 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$.



a. Possiamo calcolare l'area del trapezoide di base $[0; 2]$. Infatti, il trapezoide è formato da un quadrato di lato 2 e dal triangolo mistilineo avente base di vertici $(0; 2)$ e $B(2; 2)$ altezza di vertici $(0; 2)$ e $(0; 6)$ e terzo lato individuato dall'arco di parabola AB.
Per calcolare l'area del triangolo mistilineo consideriamo il segmento parabolico delimitato dall'arco di parabola AB, dal suo simmetrico rispetto all'asse $x = 2$ e dalla retta $y = 6$. Poi dividiamo per due la differenza tra l'area del quadrato di vertici $(0; 2)$, $(4; 2)$, $(4; 6)$ e $(0; 6)$ e quella del segmento parabolico.
Quindi, l'area del trapezoide è:

$$\mathcal{A}_t = 2^2 + \frac{1}{2}\left(4 \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4\right) = 4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} = \frac{20}{3}.$$

L'area restante è un quarto di quella del cerchio. Pertanto:

$$\mathcal{A}_c = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = \pi.$$

Usiamo l'interpretazione geometrica dell'integrale e otteniamo:

$$\int_0^4 f(x)dx = \frac{20}{3} + \pi,$$

inoltre

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{20}{3}, \qquad \int_2^4 f(x)dx = \pi.$$

Applichiamo la sostituzione $t = 2x$, otteniamo $dx = \frac{1}{2}dt$.

Inoltre per $x = 0 \rightarrow t = 0$, per $x = 2 \rightarrow t = 4$.
Quindi:

$$\int_0^2 f(2x)dx = \int_0^4 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int_0^4 f(t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{20}{3}+\pi\right] = \frac{10}{3}+\frac{\pi}{2}.$$

b. Applicando la sostituzione $t = \frac{x}{2}$, risulta: $dx = 2dt$.

Inoltre: per $x = 4 \rightarrow t = 2$, per $x = 8 \rightarrow t = 4$.
Quindi:

$$\int_4^8 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_2^4 f(t)dt = 2\pi.$$

c. Usiamo sempre la sostituzione $t = \frac{x}{2}$:

$$\int_4^0 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_2^0 f(t)dt = -2\int_0^2 f(t)dt = -2\cdot\frac{20}{3} = -\frac{40}{3}.$$

93 Considera le funzioni $f(x) = \frac{e^{2x}+1}{e^x}$ e $g(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^x}$.

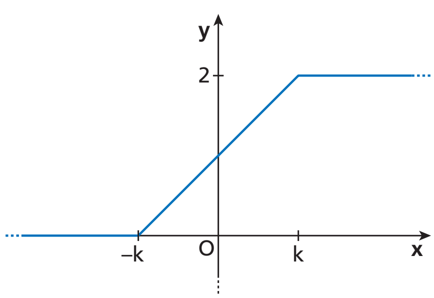
a. Verifica che $f(x)$ è la derivata della funzione $g(x)$.

b. Calcola il valore dell'integrale $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

c. Dimostra che $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.

$\left[\text{b) } \frac{e^2+e^{-2}-2}{2}\right]$

94 Per ogni $k > 0$ considera la funzione $f_k(x)$ che ha il grafico rappresentato in figura.



a. Scrivi l'espressione analitica di $f_k(x)$.

b. Scrivi l'espressione analitica della funzione

$$F_k(x) = \int_{-k}^x f_k(t)dt$$

e tracciane il grafico.

c. Considera il solido generato dalla rotazione attorno all'asse x dell'arco del grafico di $F_k(x)$ compreso tra $x_1 = -k$ e $x_2 = k$. Determina k in modo che il volume di questo solido sia uguale a $64\,\pi$.

$\left[\text{c) } k = 2\sqrt[3]{5}\right]$

95 Considera la funzione $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a. Determina per quali valori dei parametri reali a, b e c si ha $f'(1) = f'(-1) = 0$ e $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$.

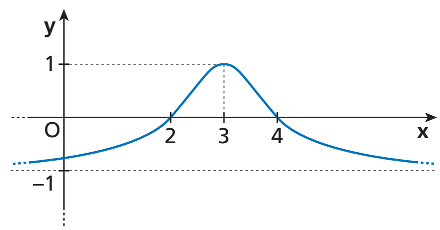
b. Calcola $\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x f(t)dt}{x^4}$.

$\left[\text{a) } a = 0, b = -3, c = 2; \text{ b) } \frac{1}{4}\right]$

96 Considera la successione numerica definita ponendo: $I_n = \int_1^{e^n} \frac{\ln x^2}{x} dx$, con $n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$.

Dimostra, per induzione su n, che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale: $I_n = n^2$.

97 **LEGGI IL GRAFICO** Considera il grafico della funzione $f(x)$, simmetrico rispetto alla retta $x = 3$, rappresentato in figura.



La funzione $f(x)$ è la derivata prima della funzione $g(x)$, definita in $\mathbb{R}$, il cui grafico passa per il punto $C(3; 2)$. La funzione $g(x)$ ha come asintoto per $x \to -\infty$ una retta che passa per il punto $A(-1; 3)$.

a. Qual è l'equazione dell'asintoto della funzione $g(x)$ per $x \to -\infty$?

b. Dimostra che il grafico della funzione $g(x)$ è simmetrico rispetto al punto $C(3; 2)$.

c. Qual è l'equazione dell'asintoto di $g(x)$ per $x \to +\infty$?

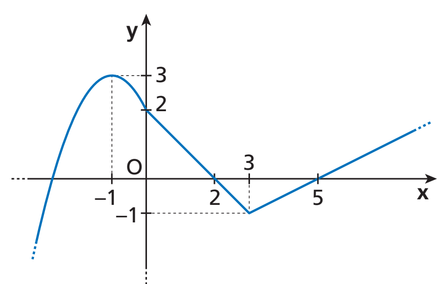
d. Traccia un grafico probabile della funzione $g(x)$, dopo aver individuato il massimo e il minimo relativi sapendo che $\int_2^4 f(x) dx = 1$.

e. Scrivi l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel suo punto di flesso.

[a) $y = -x + 2$; c) $y = -x + 8$; e) $y = x - 1$]

98 Il grafico della funzione $f(x)$ in figura è formato da un arco di parabola per $x < 0$ e da due rette per $x > 0$.

a. Scrivi l'espressione analitica della funzione $f(x)$.



b. Dimostra analiticamente che la funzione non è ovunque derivabile.

c. Determina i punti di massimo relativo e i punti di minimo relativo della funzione integrale:

$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t) dt,$$

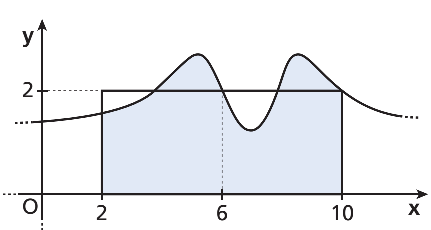
definita nell'intervallo $[-3; 7]$.

d. Scrivi l'espressione analitica della funzione integrale $F(x)$ e indica quanti e quali sono i suoi zeri.

e. Calcola $\int_{-6}^{14} f\left(\frac{t}{2}\right) dt$.

[b) $x = 0$ punto angoloso; c) min: $x = -1 - \sqrt{3}$, $x = 5$, max: $x = 2$; d) zeri: $x = -3$, $x = -\sqrt{6}$; e) 15]

99 **LEGGI IL GRAFICO** L'area del rettangolo nella figura a lato è la stessa del trapezoide curvilineo colorato, individuato dal grafico della funzione continua $f(x)$ nell'intervallo $[2; 10]$.



a. Stabilisci quali tra le seguenti uguaglianze sono sicuramente vere, motivando la risposta.

$$\int_2^{10} f(x) dx = 2 \qquad \frac{1}{8}\int_2^{10} f(x) dx = 2 \qquad \int_2^{6} f(x) dx = 8$$

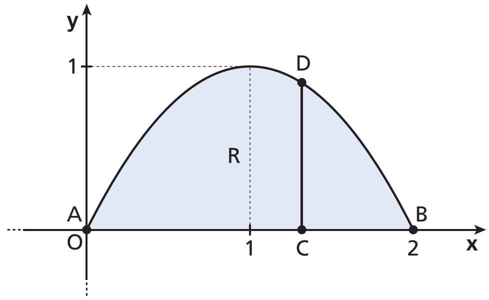
$$\int_2^{10} [f(x) - 2] dx = 0$$

b. Considera nell'intervallo $[2; 10]$ le funzioni: $F(x) = \int_2^x f(t) dt$, $G(x) = \int_2^x 2 dt$.

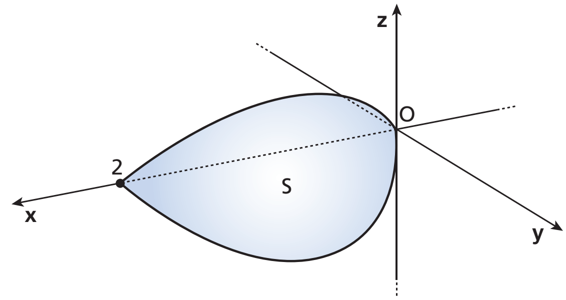
Dimostra che: $F(2) = G(2)$, $F(10) = G(10)$.

[a) $\frac{1}{8}\int_2^{10} f(x) dx = 2$, $\int_2^{10} [f(x) - 2] dx = 0$]

100 La regione R (figura **a**) è delimitata dall'asse x e dall'arco AB della parabola $y = -x^2 + 2x$ e rappresenta la sezione mediana di un solido S (figura **b**). Le sezioni di S con piani ortogonali all'asse x sono cerchi di diametro CD. Determina il volume del solido S.

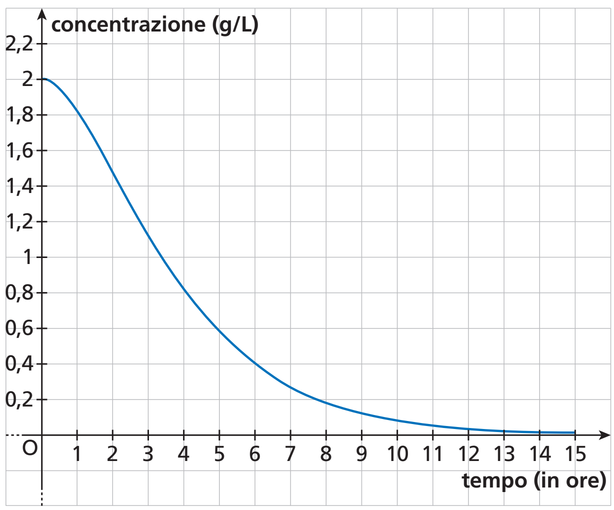


a



b

101 Il grafico descrive l'andamento della concentrazione nel sangue, in funzione del tempo, di un farmaco iniettato a un paziente.



Scegli quale delle seguenti funzioni può approssimare l'andamento della concentrazione del farmaco nel sangue del paziente

1. $f(x) = ax \cdot e^{bx} + 2$ **2.** $f(x) = \dfrac{a}{x+b}$ **3.** $f(x) = (x+a) \cdot e^{bx}$ **4.** $f(x) = \dfrac{a}{x^2 + x + b}$

a. La scelta della funzione e la ricerca dei coefficienti a e b dovrà fare riferimento al grafico riportato e ai suoi limiti di precisione. I valori trovati non saranno esatti ma dovrai scegliere valori che possano accordarsi con il grafico. I coefficienti andranno approssimati al decimo.

b. Confermata la scelta della funzione **3** con i valori $a = 2$, $b = -1/2 = -0,5$, calcola la sua derivata prima e determina il massimo.

c. Studia la derivata seconda della funzione e trova il flesso. Interpreta tale risultato nel contesto assegnato.

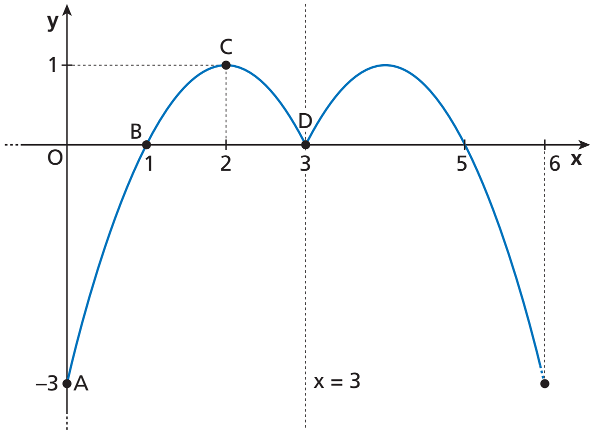
d. Il farmaco perde efficacia quando la sua concentrazione scende sotto la soglia di 0,1 g/L. Dopo quanto tempo succede?

e. Calcola $\int_0^{15} f(x)\,dx$ e interpreta il risultato nel contesto assegnato.

[tratto da Baccalauréat 2014]

[a) 3; b) $f'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$, $x_{MAX} = 0$ h, $f(x_{MAX}) = 2$ g/L; c) $F(2; 4e^{-1})$; d) circa 9,5 h; e) $-38e^{-\frac{15}{2}} + 8 \simeq 8\,\frac{g \cdot h}{L}$]

102 **LEGGI IL GRAFICO** Il grafico della funzione $f:[0;6] \to \mathbb{R}$ è formato da due archi di parabola tra loro simmetrici rispetto alla retta $x=3$.



Considera la funzione $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$.

a. Indica gli intervalli di crescenza e di decrescenza della funzione $F(x)$.

b. Spiega perché la funzione $F(x)$ non ammette derivata seconda in $x=3$. Determina i punti di flesso di $F(x)$.

c. Dopo aver determinato i valori di $F(0)$, $F(2)$, $F(3)$, $F(4)$, $F(5)$ e $F(6)$, traccia un grafico qualitativo della funzione $F(x)$ senza eseguirne lo studio e trova la tangente al grafico di $F(x)$ nel suo punto di ascissa 2.

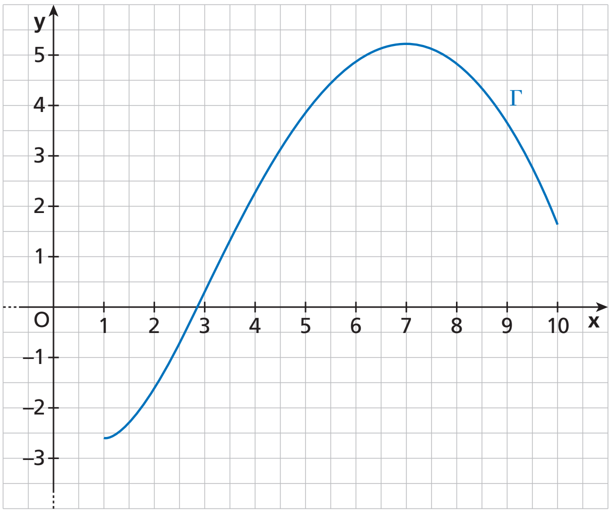
103 Un laboratorio farmaceutico produce e commercializza un farmaco in polvere. La produzione settimanale del laboratorio può essere al massimo di 10 kg.

a. Il costo marginale di produzione dipende dalla quantità x di farmaco prodotto. Uno studio mostra che, per questa impresa, il costo marginale può essere modellizzato dalla funzione

$$C_m(x) = x + \frac{16}{x+1}, \text{ con } x \in [0;10]$$

dove il costo $C_m(x)$ è in centinaia di euro, mentre x è in kg. Studia la variazione della funzione C_m nell'intervallo $[0;10]$.

b. In economia il costo marginale è la derivata prima della funzione che rappresenta il costo totale di produzione. Determina la funzione C che rappresenta il costo totale settimanale di produzione sull'intervallo $[0;10]$ con $C(0)=0$.
Il laboratorio produce almeno 1 kg di farmaco in una settimana e tutto il prodotto viene venduto. Il guadagno settimanale, in centinaia di euro, dipende dalla quantità x di farmaco prodotto. La funzione $B(x)$ che modellizza il guadagno settimanale ha il grafico mostrato in figura.
La funzione che corrisponde alla curva è del tipo



$$B(x) = ax^2 + bx - 16\ln(x+1),$$

inoltre $B(10) = 1{,}63$ e $B(x)$ ha un massimo per $x=7$. Determina i valori dei coefficienti a e b della funzione $B(x)$, arrotondando, se necessario, il valore nel punto $x=10$ all'unità.

c. Calcola il massimo guadagno corrispondente.

d. Determina la quantità x_0 minima di farmaco che la ditta deve produrre per non andare in perdita approssimando il risultato.

[tratto da Baccalauréat 2007]

[a) $C'_m(x) > 0$ per $3 < x \le 10$, $C'_m(x) = 0$ per $x = 3$, $C'_m(x) < 0$ per $0 \le x < 3$;
b) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + 16\ln(x+1)$ per $x \in [0;10]$, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 9$; c) € 523; d) 2,84 kg]

104 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **CALCOLO DELLE PRIMITIVE** La f.e.m. indotta $\mathcal{E}(t)$ in una spira immersa in un campo magnetico varia nel tempo secondo la legge $\mathcal{E}(t) = e^{-2t}\sin 4t$. Il flusso magnetico $\phi(t)$ che genera questa f.e.m. vale 0 nell'istante $t = 0$.
Determina la funzione $\phi(t)$, per $t \geq 0$, ricordando che per la legge di Faraday-Neumann-Lenz si ha $\mathcal{E}(t) = -\phi'(t)$.

$\left[\phi(t) = \frac{e^{-2t}}{10}[\sin 4t + 2\cos 4t] - \frac{1}{5}\right]$

105 **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE** **INTEGRALI DEFINITI** In un circuito di resistenza $R = 5\ \Omega$ circola una corrente alternata con periodo $T = \frac{2\pi}{3}$ s, che varia nel tempo secondo la legge

$$i(t) = \frac{V}{R}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = 2\sin(3t),$$

dove $i(t)$ è espressa in ampère e $V = 10$ V è il valore massimo della tensione.
Ricordando che il valore efficace di una funzione $f(t)$ periodica di periodo T è

$$v_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt},$$

dimostra che il valore efficace della corrente

$$i(t) \text{ è } i_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{V}{R} = \sqrt{2}\ \text{A}.$$

106 **CINEMATICA CLASSICA** **INTEGRALI DEFINITI** Consideriamo la caduta di una goccia d'acqua da una nuvola con velocità iniziale nulla. Un modello molto semplificato consente di stabilire che la velocità verticale istantanea, espressa in m/s, della caduta della goccia è data dalla funzione $v(t)$:

$$v(t) = g\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right),$$

dove la variabile t è il tempo di caduta in secondi, $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ è l'accelerazione di gravità, la costante m è la massa della goccia in milligrammi e la costante k è una costante strettamente positiva legata all'attrito dell'aria.

a. Determina l'unità di misura della costante k.

b. Studia come varia l'accelerazione $a(t)$ della goccia, interpretando il risultato ottenuto.

c. Calcola i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)$$

$$\lim_{t\to+\infty} a(t)$$

e giustifica il risultato ottenuto.

d. Uno scienziato sostiene che dopo un tempo di caduta di $5\frac{m}{k}$, la velocità della goccia supera il 99% della sua velocità limite calcolata nel punto precedente. Questa affermazione è corretta?

Consideriamo una goccia di massa $m = 6$ milligrammi e $k = 3{,}9$ milligrammi al secondo.

e. A un certo istante la goccia raggiunge la velocità di 15 metri al secondo. Da quanto tempo stava cadendo? Arrotonda il risultato al decimo di secondo.

f. Deduci la velocità media della caduta della goccia tra l'istante in cui si è staccata dalla nuvola e il momento in cui abbiamo misurato la sua velocità. Arrotonda la risposta al decimo di m/s.

[tratto da Baccalauréat 2017]

[a) milligrammi al secondo; b) $a(t) > 0$ per $t \in [0; +\infty[\rightarrow v(t)$ crescente; c) $g \cdot \frac{m}{k}$, 0; d) sì; e) 7, 8 s; f) 12, 1 m/s]

107 **ESERCIZIO SVOLTO** **TRASFORMAZIONE DELL'ENERGIA** **FUNZIONE INTEGRALE** La potenza P sviluppata dal motore di una bicicletta elettrica ha un andamento temporale rappresentato nel grafico, il cui massimo corrisponde all'ascissa $t = 3$ s.

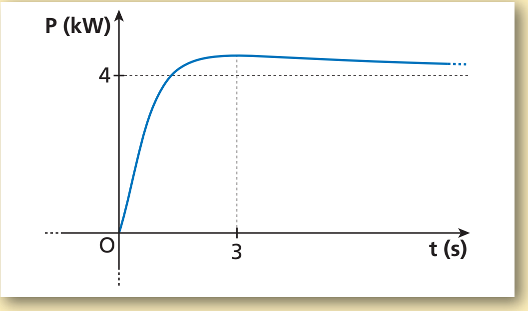
a. In base ai dati rappresentati, determina i valori delle costanti a e b in modo che la funzione

$$P(t) = \frac{at^2 + bt}{t^2 + 1}, \text{ con } t > 0$$

abbia come grafico quello assegnato e determina il valore di picco della potenza.

b. Ricava il lavoro $L(t)$ svolto dal motore tra 0 e t secondi, ricordando che $P = L'$. In particolare, determina $L(1)$.

c. Dimostra che deve esistere un istante $\bar{t} > 0$ in cui il lavoro $L(\bar{t})$ effettivamente svolto dal motore della bicicletta elettrica fino a quel momento è pari al lavoro che avrebbe svolto se la sua potenza fosse stata costante e pari a 4 kW.



a. Poiché $P = 4$ è un asintoto orizzontale, deve essere:

$$4 = \lim_{t \to +\infty} \frac{at^2 + bt}{t^2 + 1} = a \rightarrow a = 4.$$

Sostituiamo il valore 4 ad a e otteniamo $P(t) = \dfrac{4t^2 + bt}{t^2 + 1}$.

Calcoliamo $P'(t)$:

$$P'(t) = \frac{(8t + b)(t^2 + 1) - (4t^2 + bt)2t}{(t^2 + 1)^2} = \frac{\cancel{8t^3} + 8t + bt^2 + b - \cancel{8t^3} - 2bt^2}{(t^2 + 1)^2} = \frac{-bt^2 + 8t + b}{(t^2 + 1)^2}.$$

Poiché $t = 3$ è un punto di massimo, imponiamo che la derivata prima della funzione $P(t)$ calcolata in 3 valga 0:

$$0 = P'(3) = \frac{-9b + 24 + b}{100} = \frac{-8b + 24}{100} \rightarrow b = 3.$$

Dunque $P(t) = \dfrac{4t^2 + 3t}{t^2 + 1}$.

Poiché il massimo si realizza per $t = 3$ s, si ha $P_{max} = P(3) = \dfrac{36 + 9}{10}$ kW $= 4{,}5$ kW.

b. Il lavoro è l'integrale rispetto al tempo della potenza, per cui:

$$L(t) = \int_0^t \frac{4x^2 + 3x}{x^2 + 1} dx = \int_0^t \frac{4x^2 + 4 - 4 + 3x}{x^2 + 1} dx =$$

$$\int_0^t \frac{4x^2 + 4}{x^2 + 1} dx - 4\int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx + 3\int_0^t \frac{x}{x^2 + 1} dx = 4\int_0^t dx - 4\int_0^t \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{3}{2}\int_0^t \frac{2x}{x^2 + 1} dx =$$

$$4[x]_0^t - 4[\arctan x]_0^t + \frac{3}{2}[\ln(x^2 + 1)]_0^t = 4t - 4\arctan t + \frac{3}{2}\ln(t^2 + 1).$$

In particolare: $L(1) = 4 + \dfrac{3}{2}\ln 2 - \pi$, quindi il lavoro svolto dal motore dopo 1 s è circa 1,90 kJ.

c. Nel caso in cui la potenza sia costantemente uguale a 4 kW, il lavoro svolto fino all'istante t sarebbe $4t$. Dobbiamo perciò dimostrare che esiste un istante t tale che:

$$L(t) = 4t \;\rightarrow\; 4t - 4\arctan t + \frac{3}{2}\ln(t^2+1) = 4t \;\rightarrow\; \frac{3}{2}\ln(t^2+1) - 4\arctan t = 0.$$

Studiamo la funzione $f(t) = \frac{3}{2}\ln(t^2+1) - 4\arctan t$, che è contiua nel dominio $t \geq 0$ e dimostriamo che ha almeno uno zero positivo usando il teorema degli zeri. Abbiamo:

$$f(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{3}{2}\ln(t^2+1) - 4\arctan t\right] = +\infty.$$

Inoltre:

$$f'(t) = \frac{3}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1} - \frac{4}{1+t^2} = \frac{3t-4}{1+t^2}.$$

Poiché $f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0$, $f'(t) > 0$ per $t > \frac{4}{3}$ e $f'(t) < 0$ per $t < \frac{4}{3}$, si ha che $f(t)$ ha un minimo in $t = \frac{4}{3}$.

Poiché $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{16}{9}+1\right) - 4\arctan\frac{4}{3} < 0$ e $\lim_{t\to+\infty} f(t) > 0$, per il teorema degli zeri esiste $\overline{t} > \frac{4}{3}$ tale che $f(\overline{t}) = 0$.

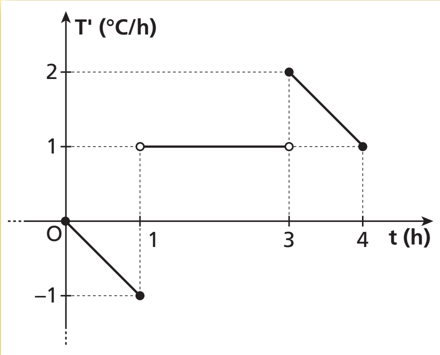
108 **ESERCIZIO SVOLTO** **RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE**

FUNZIONE INTEGRALE Il termografo di una stazione di rilevamento di dati meteorologici di alta montagna non ha funzionato nelle ultime 4 ore: a causa del guasto non è stato registrato il grafico dell'andamento nel tempo della temperatura rilevata. Tuttavia, nella stazione c'è anche un sensore che registra la velocità di variazione della temperatura. Il grafico semplificato di questa velocità di variazione è riportato sotto.

a. Ricava e rappresenta la funzione $T(t)$, che esprime in modo plausibile l'andamento temporale della temperatura nell'intervallo $0 \leq t \leq 4$, sapendo che all'istante $t = 2$ la temperatura era di 0 °C.

b. Qual è la temperatura minima raggiunta nel corso delle 4 ore?

c. Calcola la temperatura media $\overline{T}$ nelle 4 ore.



a. Ricaviamo dal grafico la funzione che esprime la velocità di variazione della temperatura, cioè $T'(x)$, dove x rappresenta il tempo misurato in ore:

$$T'(x) = \begin{cases} -x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 3 \\ -x+5 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

La funzione $T(t)$, che rappresenta la temperatura nelle quattro ore, è la primitiva di $T'(x)$, che vale 0 nell'istante $t = 2$, cioè la funzione integrale:

$$T(t) = \int_2^t T'(x)\,dx.$$

Per $0 \leq t \leq 1$ abbiamo:

$$T(t) = \int_2^t T'(x)dx = -\int_t^2 T'(x)dx = -\left(\int_t^1 -x\,dx + \int_1^2 1dx\right) = -\left[-\frac{x^2}{2}\right]_t^1 - [x]_1^2 =$$

$$-\left(-\frac{1}{2} + \frac{t^2}{2}\right) - (2-1) = -\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

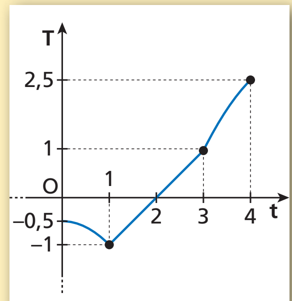
Per $1 < t < 3$ abbiamo:

$$T(t) = \int_2^t T'(x)dx = \int_2^t 1dx = t - 2.$$

Per $3 \leq t \leq 4$ abbiamo:

$$T(t) = \int_2^t T'(x)dx = \int_2^3 1dx + \int_3^t (-x+5)dx = [x]_2^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 5x\right]_3^t =$$

$$1 - \frac{t^2}{2} + 5t + \frac{9}{2} - 15 = -\frac{t^2}{2} + 5t - \frac{19}{2}.$$



Dunque:

$$T(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ t - 2 & \text{se } 1 < t < 3. \\ -\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{19}{2} & \text{se } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

b. Come si può dedurre anche dal grafico, la temperatura minima è $T(1) = -1$ °C.

c. La temperatura media $\overline{T}$ è la media integrale della funzione $T(t)$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 4$:

$$\overline{T} = \frac{1}{4}\int_0^4 T(t)dt = \frac{1}{4}\left[\int_0^1 \left(-\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)dt + \int_1^3 (t-2)dt + \int_3^4 \left(-\frac{1}{2}t^2 + 5t - \frac{19}{2}\right)dt\right] =$$

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3} + 0 + \frac{11}{6}\right) = \frac{7}{24} \simeq 0{,}3 \text{ °C}.$$

109 **LAVORO ED ENERGIA** **INTEGRALI IMPROPRI** Un punto materiale si muove lungo l'asse x sotto l'azione di una forza $\vec{F}$ che dipende dalla posizione del punto secondo la legge $F(x) = kx\,e^{\frac{-x^2}{l^2}}$, dove $k = 2$ N/m e $l = 4$ m.

a. Calcola l'energia potenziale associata alla forza.

b. Calcola il lavoro che la forza compie per portare il punto materiale della posizione $x = 0$ all'infinito.

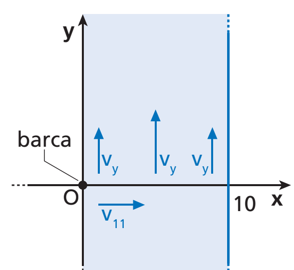
[a) $U(x) = -16e^{-\frac{x^2}{16}} + c$; b) 16 J]

110 **CINEMATICA CLASSICA** **FUNZIONE INTEGRALE** Una barca a remi attraversa un canale largo 10 m. La sua velocità ha una componente perpendicolare alle sponde del fiume di modulo $v_x = 1{,}5$ m/s e una componente v_y parallela alle sponde il cui modulo dipende dalla posizione per effetto della corrente e segue la legge $v_y(x) = \dfrac{x(10-x)}{25}$, dove x è la distanza della barca dalla riva sinistra.

a. Determina la traiettoria della barca durante l'attraversamento del fiume (considera la barca puntiforme) e rappresenta la traiettoria nel riferimento Oxy.

b. Calcola il tempo necessario per l'attraversamento e lo spostamento subìto dalla barca lungo la direzione y alla fine della traversata rispetto alla sua posizione di partenza.

[a) $y = \frac{2}{15}x^2 - \frac{2}{225}x^3$; b) circa 6,7 s, circa 4,4 m]



111 CINEMATICA CLASSICA FUNZIONE INTEGRALE Un punto materiale si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione $a = 0,4$ m/s^2, velocità iniziale $v(0) = 7$ m/s e posizione iniziale $s(0) = 0$ m. Usando il calcolo integrale, scrivi la legge della velocità $v(t)$ e la legge oraria $s(t)$ del moto del punto materiale per $t \geq 0$.

$[v(t) = 0,4t + 7;\ s(t) = 0,2t^2 + 7t]$

112 CINEMATICA CLASSICA FUNZIONE INTEGRALE Un punto materiale si muove di moto rettilineo con accelerazione che varia nel tempo secondo la legge $a(t) = \frac{4}{4+t^2}$, misurata in m/s^2. Il punto materiale ha velocità iniziale e posizione iniziale all'istante $t = 0$ nulle. Scrivi la legge oraria del moto del punto materiale.

$\left[s(t) = 2t\arctan\frac{t}{2} + 2\ln\left(\frac{4}{4+t^2}\right)\right]$

113 ESERCIZIO SVOLTO MOTO DI UN PUNTO MATERIALE INTEGRALI DEFINITI Un punto materiale è sottoposto all'azione di una forza impulsiva di modulo $F(t) = 10^4\sin^2(20\pi t)$, espresso in Newton, per un tempo $\Delta t = 0,05$ s.
Dopo aver determinato il periodo della funzione $F(t)$, calcola il modulo dell'impulso della forza e quello della forza costante che produce la stessa variazione della quantità di moto.

Possiamo scrivere $\sin^2\alpha$ come $\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$, quindi la funzione $\sin^2\alpha$ ha periodo $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.
Allora, la funzione $F(t)$ ha periodo $T_2 = \frac{\pi}{20\pi} = 0,05\ s$.
Il modulo dell'impulso della forza $F(t)$ è pari all'integrale rispetto al tempo della funzione $F(t)$. Dobbiamo quindi calcolare:

$$I = \int_0^{0,05} 10^4 \cdot \sin^2(20\pi t)dt = 10^4\int_0^{0,05}\frac{1-\cos(40\pi t)}{2}dt = 5000\int_0^{0,05}[1-\cos(40\pi t)]dt =$$

$$5000\left[t - \frac{\sin(40\pi t)}{40\pi}\right]_0^{0,05} = 5000\left[\left(0,05 - \frac{\sin(2\pi)}{40\pi}\right) - 0\right] = 250\ N\cdot s.$$

Per trovare la forza costante che produce la stessa variazione della quantità di moto calcoliamo il valore medio della forza $F(t)$ nell'intervallo $[0; 0,05]$, cioè:

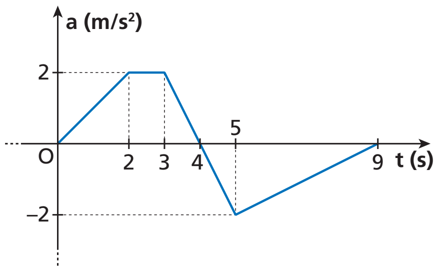
$$F_m = \frac{\int_0^{0,05} 10^4 \cdot \sin^2(20\pi t)dt}{0,05} = \frac{250}{0,05} = 5000\ N.$$

114 CINEMATICA CLASSICA INTEGRALI DEFINITI Un'automobile A sta viaggiando alla velocità $v_A = 30$ m/s quando frena con decelerazione di modulo $2t$. L'automobile B si trova 60 metri più avanti, sta viaggiando alla velocità $v_B = 22$ m/s e inizia a frenare con decelerazione costante pari a 2,0 m/s^2 nello stesso istante in cui inizia a frenare l'auto A.

a. Scelto un opportuno sistema di riferimento, scrivi le due leggi orarie delle due automobili.
b. Qual è lo spazio di frenata delle due auto?
c. Dimostra che l'auto A riesce a non tamponare B. Qual è la distanza minima tra le due auto?
d. Mantenendo le velocità iniziali, quale distanza iniziale dovrebbe esserci tra le due auto, se vogliamo che non ci sia il tamponamento?
e. Mantenendo la distanza iniziale tra le due auto a 60 metri, qual è la velocità che deve avere l'automobile B all'istante iniziale $t = 0$, se vogliamo che non ci sia il tamponamento e che la distanza minima sia raggiunta all'istante $t = 3$ s?

[a) $s_A(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 30t$, $s_B(t) = -t^2 + 22t + 60$; b) A: 110 m, B: 181 m;
c) 33,3 m, B davanti ad A di almeno 26,7 m; e) 27 m/s]

115 **CINEMATICA CLASSICA** **FUNZIONE INTEGRALE** Il grafico rappresenta l'accelerazione istantanea $a(t)$ di una persona che in 9 secondi percorre un breve tragitto rettilineo.



a. La velocità iniziale della persona è nulla. Traccia il grafico della sua velocità istantanea $v(t)$ per $0 \leq t \leq 9$. Stabilisci poi in quale istante la velocità è massima e quanto vale in tale istante.

b. Traccia un grafico della distanza $s(t)$ percorsa in funzione del tempo per $0 \leq t \leq 9$. Qual è la distanza totale percorsa dopo 9 secondi?

c. Qual è la velocità media della persona $\overline{v}$ nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 9$?

[a) $v_{max} = v(4) = 5$ m/s; b) 19 m; c) $\overline{v} \simeq 2{,}1$ m/s]

116 **ESERCIZIO SVOLTO** **MOTO DI UN PUNTO MATERIALE** **PROBLEMA DI CAUCHY** Un corpo di massa $m = 2{,}5$ kg è lanciato verticalmente dalla posizione iniziale $s_0 = 0$ m e con velocità iniziale $v_0 = 12$ m/s. Durante il moto il corpo è soggetto alla forza peso mg, con g accelerazione di gravità che supponiamo essere pari a $g = 10$ m/s^2, e alla forza di attrito dell'aria che è proporzionale alla velocità del corpo e segue la legge $F_a(t) = -\frac{1}{10}v(t)$.

a. Usando la seconda legge di Newton verifica che la velocità $v(t)$ del corpo deve soddisfare il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2{,}5\, v' = -\frac{1}{10}v - 25 \\ v(0) = 12 \end{cases}$$

b. Verifica che $v(t) = -250 + 262e^{-\frac{t}{25}}$ è la funzione che descrive la velocità del corpo per $t \geq 0$.

c. Determina l'espressione della posizione $s(t)$ del corpo all'istante t e il tempo necessario al corpo per raggiungere la massima altezza.

---

a. Per la seconda legge di Newton si deve avere che la risultante delle forze agenti sul corpo, cioè $-\frac{1}{10}v(t) - mg = -\frac{1}{10}v(t) - 25$ deve essere uguale a $ma = mv'(t)$. Poiché il corpo in $t = 0$ ha velocità 12 m/s, questo si traduce nel problema di Cauchy:

$$\begin{cases} 2{,}5\, v'(t) = -\frac{1}{10}v(t) - 25 \\ v(0) = 12 \end{cases}.$$

b. Sostituendo $t = 0$ nell'espressione di $v(t)$ vediamo che $v(0) = -250 + 262 = 12$. Inoltre:

$$v'(t) = -\frac{262}{25}e^{-\frac{t}{25}}.$$

Abbiamo perciò:

$$2{,}5\left(-\frac{262}{25}e^{-\frac{t}{25}}\right) = -\frac{1}{10}\left(-250 + 262e^{-\frac{t}{25}}\right) - 25 \rightarrow -262e^{-\frac{t}{25}} = 250 - 262e^{-\frac{t}{25}} - 250.$$

Dunque il problema di Cauchy è soddisfatto dalla funzione $v(t)$ data.

c. Poiché $v(t) = s'(t)$, tenendo conto che $s_0 = 0$ abbiamo:

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t\left(-250 + 262e^{-\frac{\tau}{25}}\right)d\tau = \left[-250\tau - 262 \cdot 25e^{-\frac{\tau}{25}}\right]_0^t =$$

$$-250t - 6550e^{-\frac{t}{25}} + 6550.$$

L'altezza massima viene raggiunta nell'istante in cui $v(t) = 0$:

$$v(t) = 0 \rightarrow -250 + 262e^{-\frac{t}{25}} = 0 \rightarrow e^{-\frac{t}{25}} = \frac{250}{262} \rightarrow -\frac{t}{25} = \ln\frac{250}{262} \rightarrow t = 25\ln\frac{262}{250},$$

cioè dopo circa 1,17 s.

117 RAPPRESENTAZIONE DI GRANDEZZE FISICHE PROBLEMA DI CAUCHY La legge di Newton sul raffreddamento afferma che la temperatura $T(t)$ di un corpo con temperatura iniziale T_0 immerso in un ambiente con temperatura più bassa T_a ha una velocità di raffreddamento $T'(t)$ tale che:

$$T'(t) = -r(T(t) - T_a),$$

dove r è la costante di raffreddamento e t è il tempo.
Una certa quantità di acqua a temperatura iniziale $T_0 = 100$ °C è posta in un locale con temperatura $T_a = 20$ °C.

a. Se dopo 5 minuti la temperatura dell'acqua è 70 °C, quanto vale la costante di raffreddamento r?

b. Dopo quanto tempo la temperatura dell'acqua è di 22 °C?

[a) $r \simeq 1{,}57 \cdot 10^{-3}$ s$^{-1} \simeq 0{,}094$ minuti^{-1}; b) circa 39,2 minuti]

RISOLVIAMO UN PROBLEMA CON LA CALCOLATRICE GRAFICA

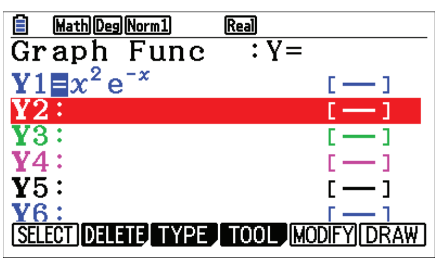
In questo svolgimento usiamo una calcolatrice grafica **Casio**.

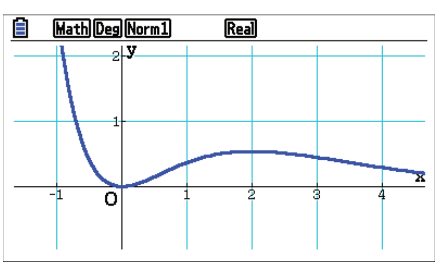
Valore medio

Calcola il valore medio della funzione $f(x) = x^2e^{-x}$ nell'intervallo $[0; 2]$ e determina il punto z di tale intervallo in cui la funzione assume tale valore.

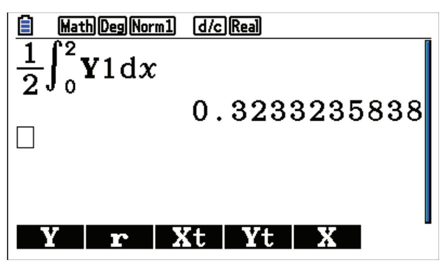
► Calcoliamo il valore medio.

Inseriamo nell'ambiente grafico della calcolatrice la funzione $f(x)$ e visualizziamola modificando opportunamente le impostazioni della finestra grafica.



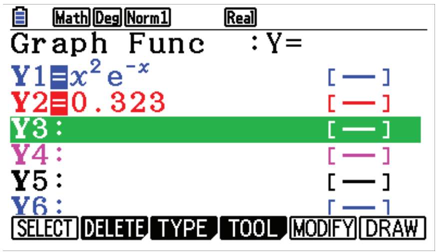


Determiniamo nell'ambiente di calcolo il valore medio della funzione data, che è continua in $\mathbb{R}$, con la formula $f(z) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$.

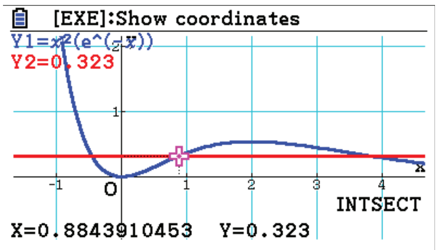


► Determiniamo il punto z.

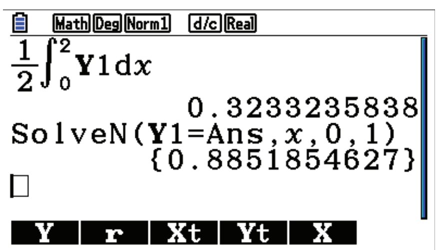
Determinare il punto z richiesto equivale a determinare l'ascissa del punto di intersezione della funzione data con la retta parallela all'asse x di equazione $y = 0{,}323$ (approssimiamo il valore medio trovato alla terza cifra decimale).
Torniamo nell'ambiente grafico e inseriamo la funzione costante.



Per determinare il punto di intersezione utilizziamo i comandi della calcolatrice *G-Solv* → *INTSECT*.



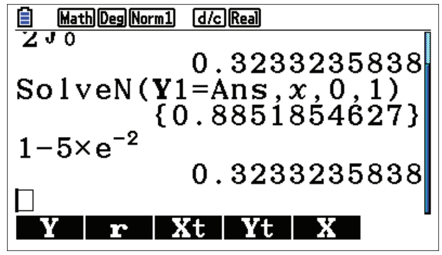
Deduciamo che $z \simeq 0,884$.
Se vogliamo calcolare z con una precisione maggiore possiamo spostarci nell'ambiente di calcolo e utilizzare un approccio più analitico. Se usiamo il comando *SolveN* otteniamo il seguente risultato.



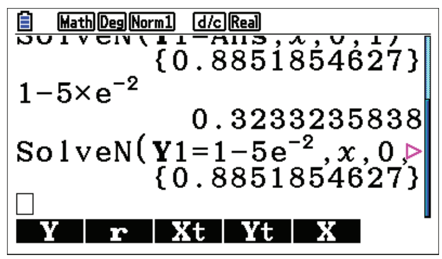
Eseguiamo il calcolo del valore medio senza la calcolatrice. Otteniamo:

$$\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 e^{-x}\,dx = 1 - 5e^{-2}.$$

Se nell'ambiente di calcolo determiniamo il valore approssimato di questo numero otteniamo un risultato in accordo con il calcolo precedente.



Possiamo calcolare con *SolveN* il valore di z anche con il valore esatto del valore medio: otteniamo lo stesso risultato.



VERSO L'ESAME

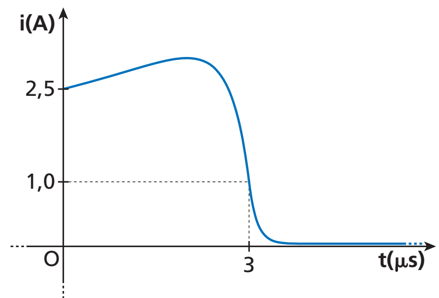
Prova 1

Problema

1 Il comune gesto di accendere o spegnere la luce di una stanza premendo un interruttore può essere a volte pericoloso. Infatti tra i contatti dell'interruttore potrebbe prodursi una scintilla che in alcuni casi, come per esempio se nella stanza c'è gas infiammabile, può provocare un'esplosione.
La formazione della scintilla, cioè la ionizzazione dell'aria dovuta a una scarica elettrica nel momento della chiusura o apertura di un circuito, è legata al fenomeno dell'autoinduzione elettromagnetica.
In particolare, se L è il coefficiente di autoinduzione di un circuito e $i(t)$ è l'intensità di corrente nel circuito all'istante t, la sovratensione autoindotta $V_L(t)$, detta anche *extra-tensione di apertura* o *di chiusura*, è data da

$$V_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt}.$$

Quando $V_L(t)$ supera una certa soglia si ha una scintilla.
Supponiamo che l'intensità di corrente $i(t)$, misurata in ampère, vari nel tempo t, misurato in µs, secondo una legge che ha il seguente grafico.



a. Dalle informazioni ricavabili dal grafico e osservato che il grafico rappresenta una funzione derivabile in $[0; +\infty[$, determina i valori delle costanti a, b e c in modo tale che la funzione

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 + at + b}{(t-4)^2} & \text{se } 0 \le t \le 3 \\ e^{-c(t-3)} & \text{se } t > 3 \end{cases}$$

abbia come grafico quello indicato.

b. Verificato che i valori richiesti sono

$$a = -16,\ b = 40 \text{ e } c = 8,$$

considera la funzione $i(t)$ ottenuta sostituendo questi valori e determina in quale istante la corrente raggiunge la sua massima intensità e qual è il valore massimo raggiunto.

c. Posto $L = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ H, utilizza la funzione $i(t)$ determinata e scrivi l'espressione dell'extra-tensione di apertura $V_L(t)$, misurata in kV, in funzione del tempo misurato in µs. Studia e rappresenta in un riferimento tensione-tempo la funzione $V_L(t)$.
Supponiamo che la scintilla si inneschi quando $V_L(t)$ supera la soglia di 2,0 kV, determina in quale istante t_S ciò avviene, utilizzando un metodo di calcolo approssimato ed esprimendo il risultato in un numero di microsecondi esatto alla prima cifra decimale.

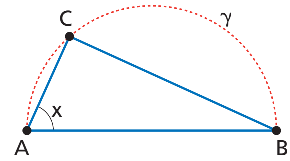
d. Si può schematizzare il processo di apertura dell'interruttore con un segnale «a gradino», approssimando $i(t)$ con una funzione del tipo

$$I(t) = \begin{cases} I_0 & \text{se } 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{se } t > 3 \end{cases}$$

lasciando, però, inalterata la quantità di carica totale che attraversa una sezione del circuito nell'intervallo di tempo $[0; +\infty[$.
Determina I_0.

Questionario

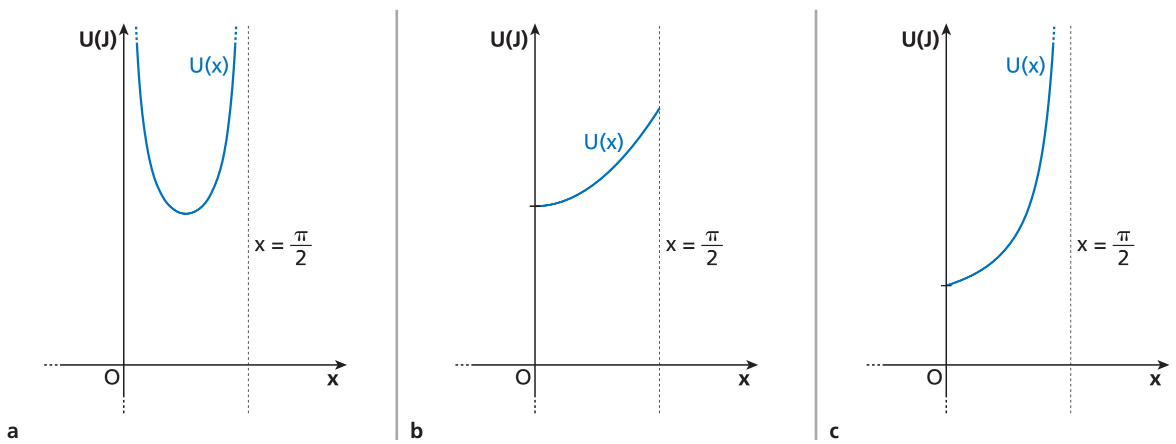
1 Due cariche puntiformi di valore q sono poste agli estremi di un segmento AB, di lunghezza $l = 1$ m, diametro della semicirconferenza γ.
Una terza carica, identica alle precedenti, è successivamente posta in C. Determina l'energia potenziale $U(x)$ del sistema in funzione dell'angolo x, nell'ipotesi che il sistema si trovi nel vuoto.



Ricorda che l'energia potenziale $U_{12}(r)$ relativa a un sistema di due cariche q_1 e q_2 poste nel vuoto a distanza r è

$$U_{12}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r}$$

e che l'energia potenziale di un sistema di n cariche è la somma delle energie potenziali delle cariche, prese a due a due in tutti i modi possibili.
Quale dei seguenti grafici può rappresentare la funzione $U(x)$? Motiva la risposta.



2 Il modulo della velocità di un corpo di massa m, in kg, in caduta sotto l'azione del suo peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e di una forza di attrito viscoso $\vec{F} = -k\vec{v}$ proporzionale alla sua velocità v, in m/s, dipende dal tempo, misurato in s, secondo la legge:

$$v(t) = \tau g - (\tau g - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}},$$

dove $\tau = \frac{m}{k}$ e v_0 è la velocità del corpo all'istante iniziale $t = 0$ s.

a. Verifica che $v(t)$ soddisfa l'equazione differenziale:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

Dimostra poi che la velocità limite $v_L = \lim_{t \to +\infty} v(t)$ è uguale a τg indipendentemente dal valore di v_0 e rappresenta in modo plausibile $v(t)$ per $t \geq 0$.

b. Nell'ipotesi che $v_0 = 0$ m/s, determina l'altezza minima h da cui deve essere lasciato cadere il corpo affinché giunga al suolo con una velocità pari al 90% della velocità limite v_L.

3 Un punto materiale P si muove nel piano Oxy secondo la legge oraria:

$$\begin{cases} x = 4 + 5\cos\omega t \\ y = 3\sin\omega t \end{cases},$$

dove $\omega = \frac{\pi}{2}\ \mathrm{s}^{-1}$.

a. Trova l'equazione cartesiana della traiettoria descritta dal punto P, verificando che si tratta di un'ellisse che ha un fuoco nell'origine.

b. Determina velocità e accelerazione del punto materiale all'istante $t = \tau$. Per quali valori di τ i due vettori sono ortogonali?

4 Due particelle identiche, ciascuna di massa a riposo m_0, si muovono l'una verso l'altra con velocità uniforme di modulo $v = \frac{3}{4}c$ rispetto al sistema di riferimento inerziale del laboratorio, dove c rappresenta la velocità della luce nel vuoto.
Ricorda inoltre che, in base alla teoria della relatività ristretta, vale la formula

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

dove u è la velocità di una particella che si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale S e u' è la velocità della stessa particella, misurata in un secondo sistema di riferimento inerziale che si muove rispetto a S, con una velocità $\vec{v}$, misurata nel sistema S, diretta lungo gli assi delle ascisse di entrambi i sistemi.

a. Qual è il modulo v_r, della velocità relativa delle due particelle, cioè la velocità dell'una nel riferimento dell'altra?

b. Posto $\beta = \frac{v}{c}$ e $\delta = \frac{v_r}{c}$, ricava e rappresenta δ in funzione di β.

Risoluzione

Problema

1 **a.** Dalle condizioni $i(0) = \frac{5}{2}$ e $i(3) = 1$, otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{b}{16} = \frac{5}{2} \\ 9 + 3a + b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 40 \\ a = -16 \end{cases}.$$

Poiché $i(3) = \frac{9 - 48 + 40}{(3-4)^2} = \lim_{t \to 3^-} i(t) = 1$ e $\lim_{t \to 3^+} i(t) = e^{-c(3-3)} = 1$, la funzione è continua anche in $t = 3$ qualunque sia il valore della costante c.
Imponiamo la derivabilità di $i(t)$ in $t = 3\ \mu\mathrm{s}$. Abbiamo:

per $0 < t < 3$: $i'(t) = \frac{(2t-16)(t-4)^2 - 2(t-4)(t^2 - 16t + 40)}{(t-4)^4} = \frac{8(t-2)}{(t-4)^3}$;

per $t > 3$: $i'(t) = -ce^{-c(t-3)}$.

La funzione è derivabile in $t = 3$ se $\lim_{t \to 3^-} i'(t) = \lim_{t \to 3^+} i'(t)$ cioè se:

$$\lim_{t \to 3^-} \frac{8(t-2)}{(t-4)^3} = \lim_{t \to 3^+} -ce^{-c(t-3)} \rightarrow -8 = -c \rightarrow c = 8.$$

Si può inoltre osservare che, come richiesto: $\lim_{t \to +\infty} i(t) = \lim_{t \to +\infty} e^{-8(t-3)} = 0$.

b. Sostituendo i valori trovati, otteniamo la funzione:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{t^2 - 16t + 40}{(t-4)^2} & \text{se } 0 \le t \le 3 \\ e^{-8(t-3)} & \text{se } t > 3 \end{cases}.$$

La derivata di $i(t)$ è:

$$i'(t)=\begin{cases}\dfrac{8(t-2)}{(t-4)^3} & \text{se } 0\le t\le 3\\ -8e^{-8(t-3)} & \text{se } t>3\end{cases},$$

e si annulla solo in $t=2\ \mu s$. Osservato inoltre che $i'(t)>0$ per $0\le t<2$, $i'(t)<0$ per $2<t<3$ e $i'(t)<0$ per $t\ge 3$, cioè $i'(t)<0$ per $t>2$, concludiamo che per $t=2$ la funzione $i(t)$ assume il suo valore massimo assoluto $i(2)=3$ A.

c. Scriviamo il coefficiente di autoinduzione L nell'unità di misura opportuna in modo da avere $V_L(t)$ espressa in kV quando il tempo t è misurato in μs:

$$L=1{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{H}=1{,}0\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}=1{,}0\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{kV}}{\text{A}}\cdot 10^{6}\ \mu\text{s}=1{,}0\ \frac{\text{kV}}{\text{A}}\mu\text{s}.$$

Usiamo il calcolo già effettuato di $i'(t)=\dfrac{di(t)}{dt}$ e otteniamo:

$$V_L(t)=-L\frac{di(t)}{dt}=\begin{cases}-\dfrac{8(t-2)}{(t-4)^3} & \text{se } 0\le t\le 3\\ 8e^{-8(t-3)} & \text{se } t>3\end{cases}.$$

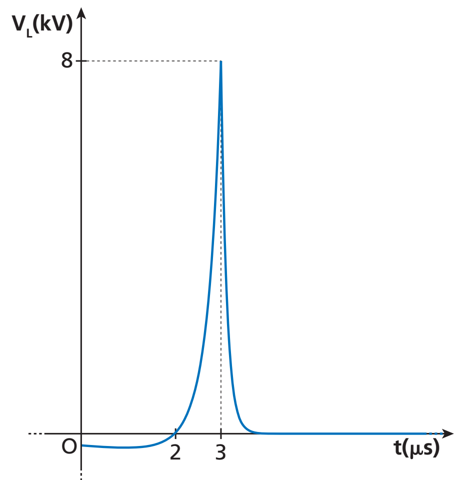
La funzione $V_L(t)$, per quanto già detto, è definita e continua per ogni $t\ge 0$, è negativa per $t<2$, nulla per $t=2$, positiva per $t>2$; inoltre si ha $\lim\limits_{t\to+\infty}V_L(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}8e^{-8(t-3)}=0$.
Calcoliamo la derivata di $V_L(t)$ per $t\ne 3\ \mu s$:

$$V_L'(t)=\begin{cases}\dfrac{16(t-1)}{(t-4)^4} & \text{se } 0\le t<3\\ -64e^{-8(t-3)} & \text{se } t>3\end{cases}.$$

Poiché:

$$\lim_{t\to 3^-}V_L'(t)=32\ne\lim_{t\to 3+}V_L'(t)=-64,$$

$V_L(t)$ non è derivabile in $t=3$ e il suo grafico presenta in $t=3$ un punto angoloso. Inoltre, osserviamo che $V_L'(t)$ si annulla solo in $t=1$, $V_L'(t)<0$ per $0\le t<1$ e $V_L'(t)>0$ per $1<t<3$ e $V_L'(t)<0$ per $t>3$.
Determinare l'istante di innesco della scintilla equivale a trovare il primo istante t per cui $V_L(t)=2$ kV; pertanto dobbiamo risolvere l'equazione:



$$-\frac{8(t-2)}{(t-4)^3}=2\ \rightarrow\ t^3-12t^2+52t-72=0.$$

Poniamo $f(t)=t^3-12t^2+52t-72$ e utilizziamo il metodo di bisezione a partire dall'intervallo $2\le t\le 3$ per ricavare lo zero di $f(t)$.

		(2 + 3) : 2	(3 + 2,5) : 2	(2,5 + 2,75) : 2	(2,75 + 2,625) : 2
2	3	2,5	2,75	2,625	2,6875
$f(2)$	$f(3)$	$f(2{,}5)$	$f(2{,}75)$	$f(2{,}625)$	$f(2{,}6875)$
-8	3	$-1{,}375$	1,047	$-0{,}100$	0,489

La soluzione dell'equazione appartiene all'intervallo $]2{,}625;\,2{,}6875[$ e dunque il valore approssimato di t_S alla prima cifra decimale è $t_S\simeq 2{,}6\ \mu s$.

d. Poiché l'integrale dell'intensità di corrente rappresenta la carica totale che attraversa una qualsiasi sezione del circuito nell'intervallo di tempo considerato, imponiamo $\int_0^{+\infty} i(t)\,dt = \int_0^{+\infty} I(t)\,dt$, per far sì che la funzione $I(t)$, pur essendo diversa da $i(t)$, lasci inalterata la quantità totale di carica passata attraverso ogni sezione del circuito. Calcoliamo l'integrale $Q = \int_0^{+\infty} i(t)\,dt$ come somma di due integrali:

$$Q = \int_0^{+\infty} i(t)\,dt = \int_0^3 \frac{t^2 - 16t + 40}{(t-4)^2}\,dt + \int_3^{+\infty} e^{-8(t-3)}\,dt.$$

Calcoliamo il primo integrale:

$$\int_0^3 \frac{t^2 - 16t + 40}{(t-4)^2}\,dt = \int_0^3 \frac{(t-4)^2 - 8(t-4) - 8}{(t-4)^2}\,dt = \int_0^3 dt - 8\int_0^3 \frac{1}{t-4}\,dt - 8\int_0^3 \frac{1}{(t-4)^2}\,dt =$$

$$[\,t\,]_0^3 - 8\big[\ln|\,t-4\,|\big]_0^3 + 8\left[\frac{1}{t-4}\right]_0^3 = 3 + 8\ln 4 - 6 = 8\ln 4 - 3.$$

Il secondo termine della quantità Q è un integrale generalizzato. Dobbiamo perciò calcolare:

$$\lim_{b\to+\infty} \int_3^b e^{-8(t-3)}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{8}e^{-8(t-3)}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{1}{8}e^{-8(b-3)}}_{\text{tende a 0}} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

In conclusione $Q = 8\ln 4 - 3 + \dfrac{1}{8} = 8\ln 4 - \dfrac{23}{8} \simeq 8{,}2$.

Poiché I_0 è una costante e $I(t) = 0$ per $t > 3$, abbiamo:

$$\int_0^{+\infty} I(t)\,dt = \int_0^3 \underbrace{I(t)\,dt}_{\text{in } [0;\,3],\ I(t) = I_0} + \int_3^{+\infty} \underbrace{I(t)\,dt}_{\text{in }]3;\,+\infty[,\ I(t) = 0} = \int_0^3 I_0\,dt = 3I_0.$$

Dobbiamo perciò avere:

$$8\ln 4 - \frac{23}{8} = 3I_0 \;\rightarrow\; I_0 = \frac{8\ln 4}{3} - \frac{23}{24} \simeq 2{,}738.$$

Questionario

1 L'energia potenziale elettrica di un sistema di cariche è uguale al lavoro che una forza esterna compie per trasportare le cariche dall'infinito alla loro posizione finale. L'ordine con il quale le cariche vengono posizionate non ha nessuna importanza.

La prima carica q viene posizionata in A senza compiere lavoro. Per trasportare la seconda carica q in B si deve compiere un lavoro pari all'energia potenziale $U_{AB} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q\cdot q}{r_{AB}}$ che la seconda carica ha nella sua posizione finale.

Per trasportare la terza carica q in C si deve compiere un lavoro pari a $U_{AC} + U_{BC} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q\cdot q}{r_{AC}} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q\cdot q}{r_{BC}}$ per effetto della presenza delle due cariche in A e in B.

Il lavoro totale compiuto è la somma dei singoli lavori. Quindi l'energia potenziale $U(x)$ del sistema è:

$$U(x) = U_{AB} + U_{AC} + U_{BC} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{AB}} + \frac{1}{r_{AC}} + \frac{1}{r_{BC}}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(1 + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}\right).$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} U(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot 2 + \lim_{x\to 0^+}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\frac{1}{\sin x} = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} U(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot 2 + \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}\cdot\frac{1}{\cos x} = +\infty.$$

$U(x)$ ammette i due asintoti verticali $x = 0$ e $x = \dfrac{\pi}{2}$, quindi l'unico grafico che può rappresentare $U(x)$ è **a**.

2 **a.** Per verificare che $v(t)$ soddisfa l'equazione differenziale calcoliamo la derivata prima di $v(t)$:

$$v'(t) = ge^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Sostituiamo $v'(t)$ nell'equazione:

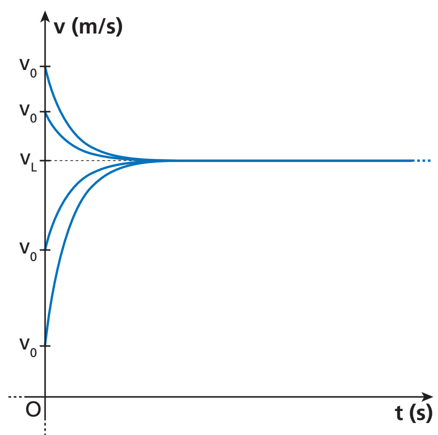
$$mge^{-\frac{t}{\tau}} - m\frac{v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = mg - k\tau g + k(\tau g - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow$$

$$mge^{-\frac{t}{\tau}} - kv_0e^{-\frac{t}{\tau}} = mg - \cancel{k}\frac{m}{\cancel{k}}g + \cancel{k}\frac{m}{\cancel{k}}ge^{-\frac{t}{\tau}} - kv_0e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow mge^{-\frac{t}{\tau}} - kv_0e^{-\frac{t}{\tau}} = mge^{-\frac{t}{\tau}} - kv_0e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Calcoliamo il valore limite della velocità:

$$v_L = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \tau g - (\tau g - v_0)\lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = \tau g - 0 = \tau g.$$

Dallo studio del segno di $v'(t) = \frac{1}{\tau}(\tau g - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ e di $v''(t) = -\frac{1}{\tau^2}(\tau g - v_0)e^{-\frac{t}{\tau}}$, risulta che $v(t)$ è strettamente crescente con concavità rivolta verso il basso quando la velocità iniziale v_0 è minore della velocità limite v_L, cioè quando $v_0 < v_L$, mentre $v(t)$ è decrescente con concavità rivolta verso l'alto quando $v_0 > v_L$.
Si nota in particolare che, quando il corpo viene lanciato con una velocità iniziale v_0 maggiore della velocità limite v_L, la velocità diminuirà progressivamente per raggiungere il valore limite v_L.
Quando $v_0 = v_L$ il corpo si muoverà di moto rettilineo uniforme.



b. Calcoliamo il tempo necessario affinché sia $v(t) = \frac{9}{10}v_L$, ricordando che $v_L = \tau g$ e, in questo caso, $v_0 = 0$:

$$v_L\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \frac{9}{10}v_L \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{10} \rightarrow t = \tau \ln 10.$$

Ora calcoliamo h come lo spazio percorso tra gli istanti 0 s e $t = \tau \ln 10$ s, cioè come integrale della velocità:

$$h = \int_0^{\tau\ln 10} v_L\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt = v_L\left[t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\tau\ln 10} = v_L\left(\tau \ln 10 + \frac{1}{10}\tau - \tau\right) = \tau v_L\left(\ln 10 - \frac{9}{10}\right) \simeq 1{,}4\frac{m^2 g}{k^2}\ \text{m}.$$

3 **a.** Riscriviamo la legge oraria di P:

$$\begin{cases} x = 4 + 5\cos\omega t \\ y = 3\sin\omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 4 = 5\cos\omega t \\ \sin\omega t = \frac{y}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \frac{x-4}{5} \\ \sin\omega t = \frac{y}{3} \end{cases}.$$

Per la relazione fondamentale della goniometria possiamo scrivere:

$$\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \rightarrow \left(\frac{x-4}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

La traiettoria è un'ellisse traslata, immagine dell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ nella traslazione $(4;0)$.
Quindi l'ellisse che rappresenta la traiettoria è centrata in $(4;0)$ e ha semiassi $a=5$ e $b=3$.
Calcoliamo $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$. I fuochi sono i punti $(0;0)$ e $(8;0)$.
Quindi, la traiettoria è un'ellisse con un fuoco nell'origine.

b. Le componenti della velocità all'istante $t=\tau$ si trovano derivando la legge oraria:

$$\vec{v}=\begin{cases} x'=-5\omega\sin\omega\tau \\ y'=3\omega\cos\omega\tau \end{cases}.$$

Mentre le componenti dell'accelerazione si trovano derivando quelle della velocità:

$$\vec{a}=\begin{cases} x''=-5\omega^2\cos\omega\tau \\ y''=-3\omega^2\sin\omega\tau \end{cases}.$$

Osserviamo che due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo. Calcoliamo:

$$\vec{v}\cdot\vec{a}=(-5\omega\sin\omega\tau)(-5\omega^2\cos\omega\tau)+(3\omega\cos\omega\tau)(-3\omega^2\sin\omega\tau)=$$
$$25\omega^3\sin\omega\tau\cdot\cos\omega\tau-9\omega^3\sin\omega\tau\cos\omega\tau=8\omega^3\sin(2\pi\tau).$$

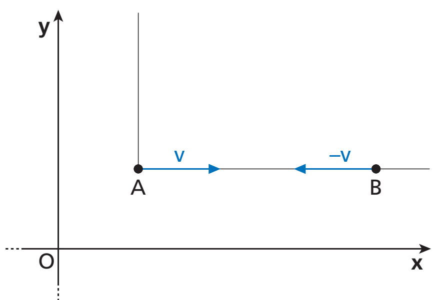
Quindi:

$$\vec{v}\perp\vec{a}\ \rightarrow\ \vec{v}\cdot\vec{a}=0\ \rightarrow\ \sin(2\omega\tau)=0\ \rightarrow\ \sin\left(2\frac{\pi}{2}\tau\right)=0\ \rightarrow\ \sin(\pi\tau)=0\ \rightarrow$$

$$\omega\tau=\frac{\pi}{2}\tau=k\cdot\pi,\ \text{con } k\in\mathbb{Z};$$

pertanto $\tau=2k$, con $k\in\mathbb{Z}$.
I due vettori $\vec{v}$ e $\vec{a}$ sono ortogonali se e solo se τ è un numero intero pari.

4 **a.** Detto O il riferimento del laboratorio, siano $(v_A)_O=v$ e $(v_B)_O=-v$ le velocità delle particelle A e B rispetto a O.
Se consideriamo la velocità $(v_B)_A$ della particella B rispetto al riferimento inerziale solidale con la particella A, il cui modulo è v_r, utilizzando la composizione relativistica delle velocità otteniamo:



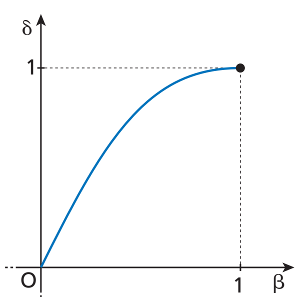
$$(v_B)_A=\frac{(v_B)_O-(v_A)_O}{1-\frac{(v_B)_O\cdot(v_A)_O}{c^2}}=\frac{-v-v}{1+\frac{v^2}{c^2}}=-\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}.$$

Pertanto, se $v=\frac{3}{4}c$, il modulo v_r della velocità relativa è

$$v_r=\frac{2\cdot\frac{3}{4}c}{1+\frac{9\cancel{c^2}}{16\cancel{c^2}}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{16}{25}c=\frac{24}{25}c.$$

b. Utilizzando per v_r l'epressione precedentemente trovata e dividendo entrambi i membri dell'uguaglianza per la velocità limite c, otteniamo:

$$\delta=\frac{v_r}{c}=\frac{2\frac{v}{c}}{1+\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2\beta}{1+\beta^2}.$$



La funzione $\delta(\beta)$ ha significato fisico solo nell'intervallo $0\leq\beta<1$, e in tale intervallo è nulla nell'origine e positiva altrove, con derivata prima sempre positiva, quindi la funzione $\delta(\beta)$ è monotòna crescente. Inoltre la derivata seconda è sempre negativa, quindi la funzione ha la concavità rivolta verso il basso:

$$\delta'=\frac{2(1-\beta^2)}{(1+\beta^2)^2},\quad \delta''=\frac{2\beta(\beta^2-3)}{(1+\beta^2)^3}.$$

Griglia di valutazione per la prova 1 di Matematica con Fisica

<table>
<tr><th rowspan="2">Indicatori</th><th rowspan="2">Livelli</th><th rowspan="2">Descrittori</th><th colspan="2">Evidenze</th><th colspan="2" rowspan="2">Punti</th></tr>
<tr><th>PROBLEMA</th><th>QUESITI</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Analizzare
Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.</td><td>1</td><td>• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo superficiale o frammentario
• Non deduce, dai dati o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica
• Individua nessuna o solo alcune delle grandezze fisiche necessarie</td><td rowspan="4">☐ Converte le unità di misura
☐ Riconosce i punti di non derivabilità
☐ Conosce il significato fisico di I_0</td><td rowspan="4">☐ 1
☐ 2
☐ 4</td><td>0 - 5</td><td rowspan="4">.............</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo parziale
• Deduce in parte o in modo non completamente corretto, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica
• Individua solo alcune delle grandezze fisiche necessarie</td><td>6 - 12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo completo, anche se non critico
• Deduce quasi correttamente, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrive la situazione problematica
• Individua tutte le grandezze fisiche necessarie</td><td>13 - 19</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo completo e critico
• Deduce correttamente, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o la legge che descrive la situazione problematica
• Individua tutte le grandezze fisiche necessarie</td><td>20 - 25</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Sviluppare il processo risolutivo
Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.</td><td>1</td><td>• Individua una formulazione matematica non idonea, in tutto o in parte, a rappresentare il fenomeno
• Usa un simbolismo solo in parte adeguato
• Non mette in atto il procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata</td><td rowspan="4">☐ Impone che la funzione i(t) sia continua e derivabile
☐ Studia il segno della derivata prima per trovare il valore massimo dell’intensità di corrente
☐ Calcola con un metodo di approssimazione l’istante in cui $V_L(t) = 2$ kV
☐ Impone che l’integrale di I(t) sia uguale a quello di i(t)</td><td rowspan="4">☐ 1
☐ 2
☐ 3
☐ 4</td><td>0 - 6</td><td rowspan="4">.............</td></tr>
<tr><td>2</td><td>• Individua una formulazione matematica parzialmente idonea a rappresentare il fenomeno
• Usa un simbolismo solo in parte adeguato
• Mette in atto in parte il procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata.</td><td>7 - 15</td></tr>
<tr><td>3</td><td>• Individua una formulazione matematica idonea a rappresentare il fenomeno, anche se con qualche incertezza
• Usa un simbolismo adeguato
• Mette in atto un adeguato procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata.</td><td>16 - 24</td></tr>
<tr><td>4</td><td>• Individua una formulazione matematica idonea e ottimale a rappresentare il fenomeno
• Usa un simbolismo necessario
• Mette in atto il corretto e ottimale procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata</td><td>25 - 30</td></tr>
</table>

Questa griglia contiene una **proposta di descrittori e di punteggi**, elaborata a partire dalla Griglia di valutazione per la seconda prova di matematica e fisica (https://bit.ly/2toqEaT).
Secondo le *Indicazioni per la definizione delle griglie di valutazione* (https://bit.ly/2Fxjp8U), gli indicatori sono declinati in descrittori delle prestazioni, la cui definizione è compito della Commissione di Esame.

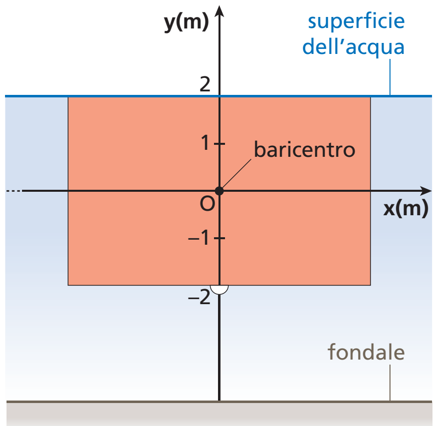
Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	1	• Fornisce una spiegazione sommaria o frammentaria del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • Non è in grado di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza	☐ Determina le costanti a, b e c in accordo con il grafico ☐ Rappresenta il grafico di $V_L(t)$ ☐ Calcola I_0	☐ 1 ☐ 2 ☐ 4	**0 - 5**	....
	2	• Fornisce una spiegazione parzialmente corretta del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado solo parzialmente di collegare i dati in una forma simbolica o grafica			**6 - 12**	
	3	• Fornisce una spiegazione corretta del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza, anche se con qualche incertezza.			**13 - 19**	
	4	• Fornisce una spiegazione corretta ed esaustiva del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado, in modo critico e ottimale, di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza			**20 - 25**	
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	1	• Giustifica in modo confuso e frammentato le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui non riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica • Non formula giudizi di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema	☐ Sa spiegare perché il massimo dell'intensità di corrente corrisponde al punto in cui la derivata prima cambia segno ☐ Sa spiegare perché l'integrale di $I(t)$ deve essere uguale a quello di $i(t)$ ☐ Argomenta i passaggi della risoluzione	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4	**0 - 4**	....
	2	• Giustifica in modo parziale le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare solo in parte la coerenza con la situazione problematica • Formula giudizi molto sommari di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**5 - 10**	
	3	• Giustifica in modo completo le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente adeguato anche se con qualche incertezza le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica • Formula giudizi un po' sommari di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**11 - 16**	
	4	• Giustifica in modo completo ed esauriente le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente corretto le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare completamente la coerenza con la situazione problematica • Formula correttamente ed esaustivamente giudizi di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**17 - 20**	
					PUNTEGGIO	......./100

Rielaborata dalla documentazione del MIUR (https://aifnapoli2.blogspot.com/2018/10/materiali-seminario-ispettore-esposito.html)

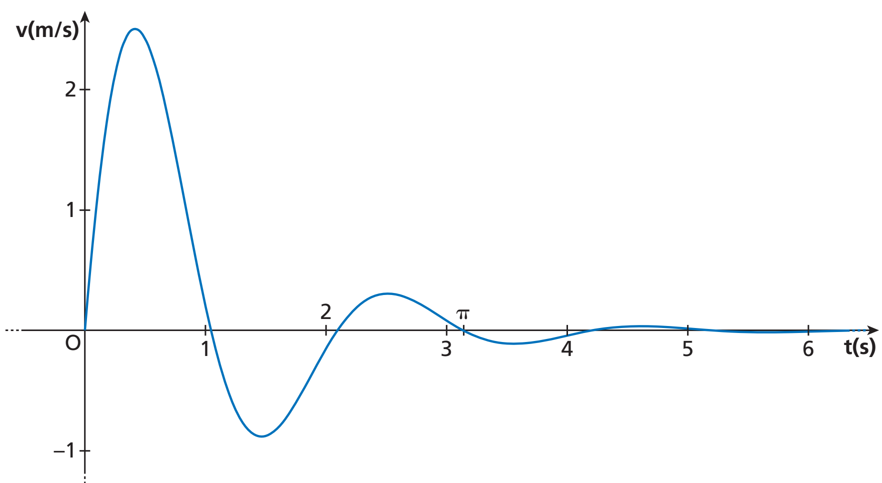
Prova 2

Problema

1 Negli ultimi anni sono stati ideati e realizzati diversi progetti che hanno l'obiettivo di usare il moto ondoso per produrre energia elettrica. Uno di questi è il progetto CETO 5 dell'Agenzia Australiana per le Energie Rinnovabili ARENA che sfrutta il galleggiamento sotto la superficie dell'oceano di grandi boe ancorate al fondale marino.
Supponi per semplicità che una di queste boe sia un cilindro omogeneo, di altezza 4 m e sezione S costante, con densità d minore di quella dell'acqua marina che è circa 1,03 kg/dm^3; supponi inoltre che il baricentro della boa si trovi inizialmente a una profondità di 2 m, in modo che la base superiore del cilindro sia al livello della superficie dell'acqua, come schematizzato in figura.



Se nell'istante $t = 0$ la boa si sgancia dall'ancoraggio e diventa quindi libera di muoversi la componente verticale $v(t)$ della velocità del suo centro di massa nel riferimento xy, misurata in m/s, varia in funzione del tempo t, misurato in secondi, in base a una legge che ha il seguente grafico.



a. Dai un'interpretazione fisica dell'andamento della velocità. Determina poi i parametri reali positivi A, B e ω in modo che la funzione $v(t)$, rappresentata dal grafico precedente, sia della forma:

$$v(t) = Ae^{-Bt}\sin(\omega t),\ \text{con } t \geq 0,$$

sapendo che le prime due intersezioni in ordine di ascisse crescenti di tale grafico con il grafico della funzione $g(t) = Ae^{-Bt}$ hanno ordinate rispettivamente $4e^{-\frac{\pi}{6}}$ e $4e^{-\frac{5\pi}{6}}$.

b. Dopo aver verificato che $A = 4$, $B = 1$ e $\omega = 3$ sono i valori cercati, sostituiscili nella funzione $v(t)$ e dimostra che $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t) = 0$.

c. Considera la funzione integrale $f(t)=\int_0^t v(u)du$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 6$. Dopo averne dato un'interpretazione fisica nel contesto del problema, disegna un possibile grafico qualitativo di $f(t)$ e verificalo quantitativamente trovando l'espressione analitica di $f(t)$. Verifica infine che $y=f(t)$ soddisfa l'equazione differenziale: $y''+2y'+10y-12=0$.

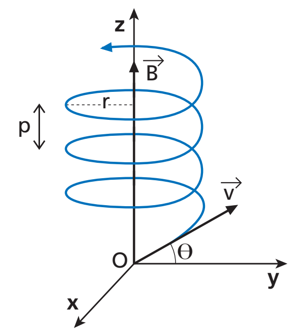
d. Calcola $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e utilizza il risultato, interpretato dal punto di vista fisico, per stimare il valore della densità d della boa in kg/dm^3. Stabilisci se ci sono intervalli di tempo nei quali il centro di massa della boa è fuori dall'acqua.
$\left[c)\ f(t)=-\frac{2}{5}e^{-t}\sin 3t-\frac{6}{5}e^{-t}\cos 3t+\frac{6}{5};\ d)\ \lim_{t\to+\infty} y(t)=\frac{6}{5}\right]$

Questionario

1 Una particella dotata di carica elettrica q e massa m entra con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ diretto come l'asse z del riferimento in figura. Come rappresentato in figura la traiettoria della particella è un'elica che si avvolge in senso antiorario intorno all'asse z.
Ricorda che il raggio r e il passo p dell'elica sono dati dalle formule

$$r=\frac{mv_\perp}{|q|B} \quad \text{e} \quad p=v_{/\!/}\frac{2\pi m}{|q|B},$$

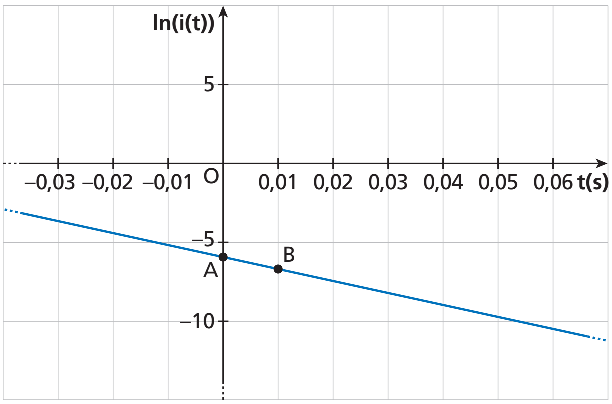
dove $v_\perp$ e $v_{/\!/}$ sono le componenti della velocità $\vec{v}$ rispettivamente perpendicolare e parallela al campo $\vec{B}$.



a. Stabilisci, motivando la risposta, qual è il segno della carica q.

b. Determina il modulo v della velocità della particella in funzione del raggio r dell'elica, del suo passo p e delle grandezze B, q ed m. Determina un'approssimazione in gradi e primi dell'angolo θ che il vettore $\vec{v}$ forma con il piano xy nel caso in cui valga $p=\frac{\pi}{4}r$. [a) negativo; b) 7° 7,5′]

2 Marco ti ha chiesto di aiutarlo con una relazione di laboratorio di fisica sulla carica di un condensatore. Un circuito in cui ai poli di un generatore di tensione sono collegati in serie il condensatore da caricare e una resistenza misura l'andamento nel tempo della corrente che attraversa la resistenza. Il grafico riporta i dati ottenuti nell'esperimento: in ascissa il tempo, misurato in secondi, e in ordinata il logaritmo naturale dell'intensità di corrente, misurata in ampère. L'andamento del grafico è lineare.



Analizzando i dati ricavi che la retta passa per i punti $A(0;-5{,}915)$ e $B(0{,}01;-6{,}672)$.

a. Aiuta Marco a scrivere la relazione $i=i(t)=i_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ tra la corrente che attraversa la resistenza del circuito nella fase di carica e il tempo. Trova poi il valore iniziale della corrente e il tempo caratteristico del circuito. [2,7 mA; 13,21 ms]

b. Dopo quanto tempo la corrente che circola nel circuito si è ridotta a $\frac{1}{100}$ del suo valore iniziale? [60,83 ms]

3 Su un piano è fissato un sistema di riferimento Oxy con versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$. Su tale piano un punto materiale si muove secondo la legge oraria:

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t+2}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{2t^2}{t^2+1} \end{cases},$$

dove x e y sono misurati in metri e $t \geq 0$ è misurato in secondi.

a. Scrivi il vettore posizione $\vec{r}$, il vettore velocità $\vec{v}$ e il vettore accelerazione $\vec{a}$ del punto negli istanti $t = 0$ e $t = 1$. A quale distanza dall'origine del riferimento si trova il punto quando t tende a $+\infty$?

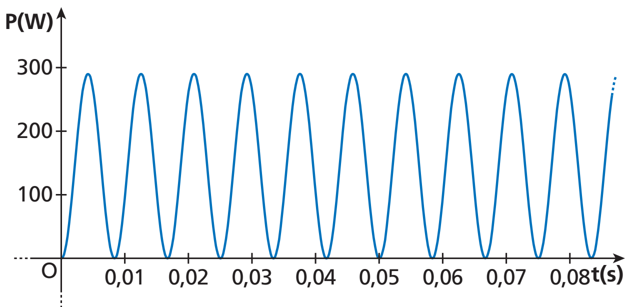
b. Determina l'equazione della traiettoria del punto nel piano e rappresentala nel riferimento Oxy. Verifica che nel punto di flesso della traiettoria i vettori $\vec{v}$ e $\vec{a}$ hanno entrambi la direzione della retta tangente alla traiettoria stessa.

$\left[\text{a) } \sqrt{5}; \text{ b) } y = \dfrac{2x^2-8x+8}{2x^2-6x+5}\right]$

4 Un alternatore è costituito da una bobina che ruota tra le espansioni polari di un magnete. Tra i due poli dell'alternatore è collegata una resistenza e la potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza in funzione del tempo segue la relazione

$$P(t) = P_{max} \cdot \sin^2(\omega t).$$

Il grafico in figura ne evidenzia l'andamento, in una scala opportuna.



a. Determina l'istante t_n in cui $P(t)$ assume l'n-esimo massimo in funzione del parametro ω.

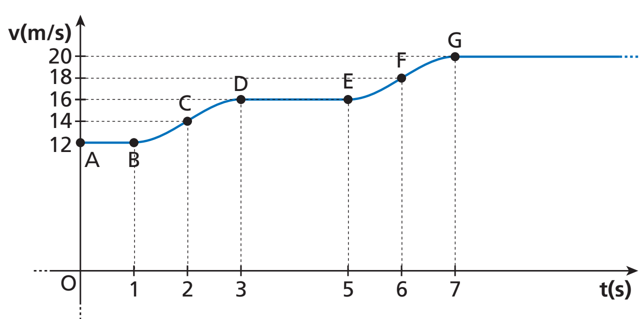
b. Determina il periodo della funzione $P(t)$ sapendo che il ventesimo massimo è ottenuto per $t = \dfrac{3\pi}{58}$ s e trova la frequenza della f.e.m. indotta $V(t)$.

$\left[\text{a) } t_n = \dfrac{\pi}{2\omega} + (n-1)\dfrac{\pi}{2\omega}; \text{ b) } T_P = \dfrac{\pi}{377} \text{ s}\right]$

Prova 3

Problema

1 Mattia sta guidando un'automobile di piccola cilindrata. Si immette in tangenziale all'istante $t = 0$, alla velocità di 12 m/s; raggiunti i 20 m/s, Mattia inserisce la quinta e procede a velocità costante, fino al termine della tangenziale. La figura seguente mostra il diagramma velocità/tempo della situazione descritta.



In base ai dati letti sul tachimetro, il tratto di accelerazione AG può essere descritto dalla funzione:

$$v(t)=\begin{cases}12 & \text{se } 0\le t<1\\ -t^3+6t^2-9t+16 & \text{se } 1\le t<3\\ 16 & \text{se } 3\le t<5\\ -t^3+18t^2-105t+216 & \text{se } 5\le t\le 7\end{cases}.$$

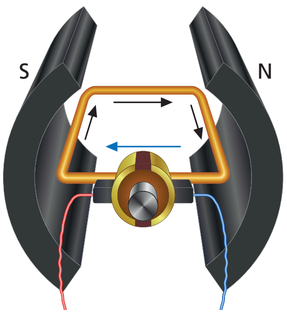
a. Dopo aver verificato che l'arco BD è simmetrico rispetto al punto C e l'arco EG è simmetrico rispetto al punto F, analizza la derivabilità della funzione v nei punti B, D ed E.

b. Determina l'accelerazione media a_m dell'auto nei primi 7 s dall'ingresso in tangenziale. Detta $a(t)$ l'accelerazione istantanea, puoi affermare che esiste almeno un istante t in cui l'accelerazione istantanea coincide con l'accelerazione media? In caso di risposta affermativa, determina gli istanti in cui $a(t)=a_m$.

c. Calcola lo spazio percorso da Mattia nei primi 10 s dall'ingresso in tangenziale. Quanto tempo impiega a percorrere i primi 2 km dall'istante in cui ha effettuato l'immissione?

Il diametro delle ruote dell'auto è $D = 510$ mm; il mozzo della ruota anteriore destra è collegato ad un dispositivo che fa ruotare con la stessa velocità angolare $\omega(t)$ della ruota ad una bobina formata da $N = 100$ spire di sezione $S = 5\ \text{cm}^2$.

La bobina è immersa in un campo magnetico uniforme, perpendicolare all'asse di rotazione della bobina, di intensità $4\cdot 10^{-4}$ T ed è collegata a una resistenza $R = 0{,}5\ \Omega$. Indica con $\alpha(t)$ la funzione che rappresenta come varia l'angolo formato dalla direzione normale alla bobina con quella del campo magnetico al variare del tempo.



d. Determina l'espressione $f_i(t)$ della f.e.m. indotta nella bobina in funzione della velocità angolare $\omega(t)$.

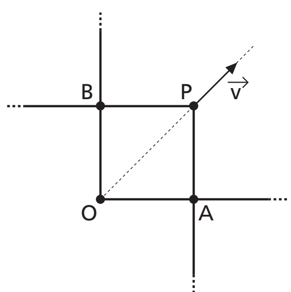
e. Verifica che la corrente efficace $i_e(t)$, che passa attraverso la resistenza, è direttamente proporzionale alla velocità del veicolo e trova il valore della costante di proporzionalità k.

f. Determina la potenza media dissipata per effetto Joule sulla resistenza, quando l'auto viaggia alla velocità di 70 km/h.

[b) 1,21 s, 2,79 s, 5,21 s, 6,79 s; c) 108 m, 101,6 s; d) $f_i(t) = NBS\omega\sin(\omega t)$; e) $k = 11{,}09\cdot 10^{-5}$ Tm/Ω; f) $2{,}3\cdot 10^{-6}$ W]

Questionario

1 Un campo magnetico costante di intensità B è diretto perpendicolarmente al piano, con verso entrante. Sul piano è fissato un filo conduttore di lunghezza indefinita, piegato ad angolo retto con vertice nel punto O. Un altro filo uguale, con vertice retto in P, può scorrere a velocità costante $\vec{v}$ diretta lungo la bisettrice dell'angolo $A\widehat{O}B$; i due fili sono elettricamente in contatto, in modo da formare un circuito quadrato $OAPB$. In particolare, nell'istante $t = 0$ i vertici P e O coincidono.



a. Scrivi l'espressione e disegna il grafico della funzione che rappresenta l'andamento nel tempo del valore assoluto della f.e.m. $V(t)$ indotta nel circuito, calcolandone in particolare il valore all'istante $t = 1$.

b. Dimostra che se i fili hanno una resistenza per unità di lunghezza pari a r Ω/m, la corrente indotta nella spira $OAPB$ si mantiene costante e indica la sua intensità e il suo verso.

[a) $V(t) = Bv^2t$]

2 La corrente di carica di un dispositivo ha un'intensità che dipende dal tempo t, misurato in millisecondi, secondo la legge:

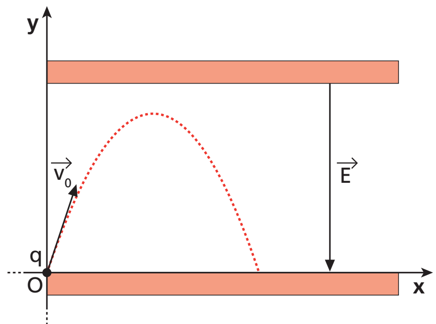
$$i(t) = 20t \cdot e^{-\frac{t}{4}}, \text{ con } t \geq 0.$$

a. Determina in quale istante la corrente ha la massima intensità e qual è l'intensità massima raggiunta.

b. Supponi che il dispositivo sia un condensatore e che all'istante $t = 0$ ms il condensatore sia scarico. Calcola la carica totale presente sulle sue armature dopo 4 ms e dopo un tempo infinito.

[a) $t = 4$ ms, 29,4 A; b) 84,56 C, 320 C]

3 Una gocciolina d'olio, elettrizzata positivamente per strofinio come nell'esperimento di Millikan, viene iniettata tra le armature di un condensatore con una velocità $\vec{v}_0$ le cui componenti, espresse in cm/s, nel sistema di riferimento della figura, sono $\vec{v}_0(1; 3)$.



Sapendo che il campo elettrico $\vec{E}$ presente tra le armature del condensatore produce sulla gocciolina un'accelerazione uniforme di intensità $a = 2$ cm/s^2 e trascurando gli effetti di bordo, determina:

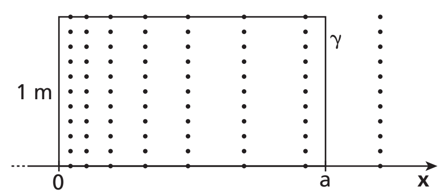
a. l'equazione cartesiana della traiettoria nel sistema di riferimento in figura e il tempo impiegato dalla gocciolina a cadere sull'armatura negativa;

b. le componenti cartesiane della velocità e dell'accelerazione dopo 2 s dall'ingresso della gocciolina nel campo elettrico.

[a) $y = 3x - x^2$, 3 s; b) $\vec{v}(2) = (1; -1)$, $\vec{a}(2) = (0; -2)$]

4 Un campo magnetico $\vec{B}$ è diretto perpendicolarmente al piano del foglio, in verso uscente, e la sua intensità varia lungo la direzione x secondo la funzione:

$$B(x) = \frac{B_0}{a^2 + x^2},$$



dove a è una costante positiva e tutte le grandezze sono espresse in unità SI. Al piano è fissata una spira conduttrice γ rettangolare di larghezza a m e altezza 1 m.

a. Calcola il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie delimitata da γ.

b. Determina la f.e.m. V_0 indotta nella spira all'istante $t = 0$ e il verso della corrente indotta, supponendo che B_0 vari nel tempo secondo la legge $B_0(t) = a\left(e^{-\frac{t}{\pi}} + 1\right)$, con t in secondi.

$\left[\text{a) } \frac{B_0 \pi}{4a}\text{; b) } \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{\pi}}\right]$

SUGGERIMENTO PER I QUESITI 1 E 4 Ricorda che il flusso di un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ attraverso una superficie piana descritta dal vettore $\vec{S}$ è dato dal prodotto scalare $\Phi_{\vec{S}}(\vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{S}$ e che la forza elettromotrice indotta in un circuito conduttore posto lungo il contorno della superficie $\vec{S}$ è $f_{em} = -\dfrac{d\Phi_{\vec{S}}(\vec{B})}{dt}$.

Fisica con matematica

di Gianni Melegari

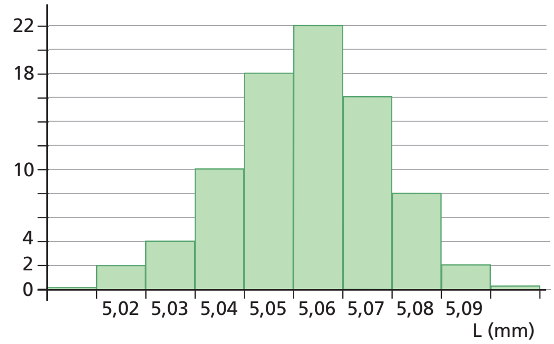
Gli esercizi della sezione *Mettiti alla prova* sono tratti dai seguenti testi Zanichelli:

Ugo Amaldi, L'*Amaldi per i licei scientifici.blu*, seconda edizione
John D. Cutnell, Kenneth W. Johnson, David Young, Shane Stadler, *La fisica di Cutnell e Johnson*
John D. Cutnell, Kenneth W. Johnson, David Young, Shane Stadler, *I problemi della fisica*
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, *Fondamenti di fisica*, quarta edizione
Claudio Romeni, *Fisica e realtà.blu*, seconda edizione
Claudio Romeni, *Realtà e fisica.blu*, seconda edizione

METTITI ALLA PROVA

Incertezza di misura

1 Uno studente ha misurato con un micrometro la lunghezza L di un chiodino 82 volte. Nel grafico è rappresentato, per ogni valore sperimentale, il numero di volte N che è stato ottenuto.



- ▸ Ricava la semidispersione massima delle misure.
- ▸ Riporta sul grafico il valore della media delle misure.
- ▸ Come deve presentare il risultato al professore?

2 Le misure sperimentali dei lati di un parallelepipedo sono $a = (5{,}4 \pm 0{,}1)$ cm, $b = (7{,}9 \pm 0{,}1)$ cm e $c = (11{,}7 \pm 0{,}1)$ cm.

- ▸ Qual è il valore più plausibile del volume del parallelepipedo?
- ▸ Calcola la corrispondente incertezza.

[$(5{,}0 \pm 0{,}2) \times 10^{-4}$ m]

3 Misurazioni ripetute della lunghezza di un'aula hanno dato i seguenti risultati:

8,75 m 8,76 m 8,74 m 8,75 m

8,74 m 8,76 m 8,76 m 8,73 m 8,77 m

- ▸ Scrivi la misura della lunghezza L dell'aula.

[$L = (8{,}75 \pm 0{,}02)$ m]

4 Il campione di massa di 1 kg conservato a Sèvres è un cilindro di platino-iridio con altezza h e diametro D uguali. Una copia, non particolarmente precisa del campione, è stata realizzata con le misure di $(3{,}90 \pm 0{,}01)$ cm.

- ▸ Calcola la misura in cm³ del volume

$$V = \frac{1}{4}\pi h D^2$$

di questo cilindro. [$(46{,}6 \pm 0{,}4)$ cm^2]

5 Le dimensioni di un foglio sono $a = (21{,}1 \pm 0{,}1)$ cm e $b = (29{,}7 \pm 0{,}1)$ cm. Determina:

- ▸ l'area minima del foglio compatibile con le misure;
- ▸ l'area massima del foglio compatibile con le misure;
- ▸ il valore medio dell'area;
- ▸ l'incertezza della misura indiretta dell'area.

[(21,0 cm)(29,6 cm) = 622 cm^2; (21,2 cm)(29,8 cm) = 632 cm^2; 627 cm^2; 5 cm^2]

---

6 La concentrazione di una soluzione si esprime spesso in moli di soluto per litro di soluzione. Un laboratorio specializzato deve produrre una soluzione di glucosio e acqua con una concentrazione di $(0{,}30 \pm 0{,}02)$ mol/L. Una mole di glucosio ha una massa di 174 g. Un chimico prepara 5 campioni di soluzione da 10 mL e per la quantità di glucosio disciolta ottiene questi valori usando una bilancia di sensibilità pari al milligrammo:

509 mg; 514 mg; 501 mg; 512 mg; 498 mg.

- ▸ Determina il valore più probabile della massa di glucosio con la corretta incertezza.
- ▸ Calcola quindi la concentrazione con la relativa incertezza.
- ▸ La concentrazione della soluzione preparata soddisfa la richiesta iniziale?

[$(0{,}507 \pm 0{,}008)$ g; $(0{,}291 \pm 0{,}005)$ mol/L; sì]

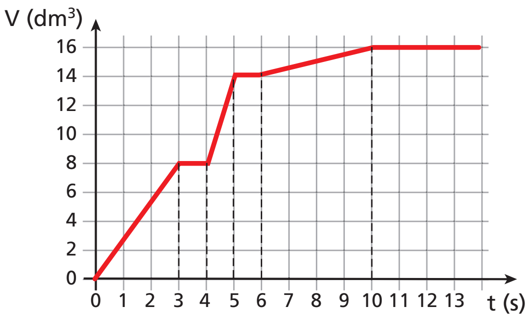
7 Enrico Fermi osservò una volta che la durata normale di una lezione (50 minuti) è molto vicina a 1 microsecolo. (a) Quanto dura un microsecolo in minuti? (b) Qual è in percentuale l'approssimazione dell'affermazione di Fermi? Si usi la seguente formula:

$$\begin{matrix}\text{approssimazione} \\ \text{percentuale}\end{matrix} = \left(\frac{\text{valore vero} - \text{valore approssimato}}{\text{valore vero}}\right)100.$$

[52,6 min; 4,9%]

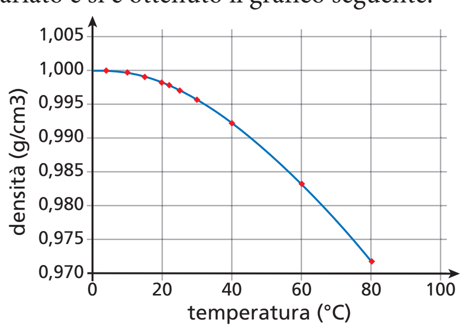
Rappresentazione di grandezze fisiche

8 Giovanni ha gonfiato un palloncino. Il grafico seguente rappresenta l'aumento del volume del palloncino durante il gonfiaggio. Analizzando il grafico:



- Determina il volume finale del palloncino in m^3.
- Sai dire quante volte Giovanni ha ripreso fiato prima di finire?
- Riesci a indicare in quale intervallo di tempo l'espansione del palloncino è stata più veloce? Di quanto è aumentato il volume in questo tempo?

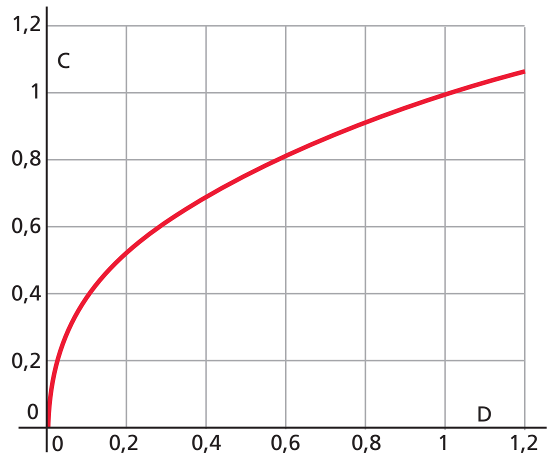
9 In un laboratorio è stata misurata la densità dell'acqua al variare della temperatura fino a 80 °C. La massa di acqua era di 1 kg, ma il volume è variato e si è ottenuto il grafico seguente.



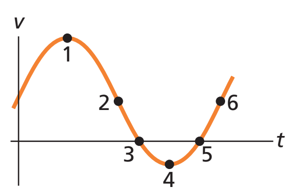
- Quanto vale la densità dell'acqua a 40 °C in kg/m^3?
- Dall'inizio alla fine il volume è aumentato o diminuito? Di quanti cm^3?

10 Il grafico riporta l'andamento del costo *C* in euro di un download (*D*) in funzione dei gigabyte scaricati.

- Stima quanto si spende se si scaricano 0,4 gigabyte.
- Stima quanti gigabyte sono stati scaricati se la spesa è stata 1 €. [0,7 €; 1 gigabyte]



11 La figura mostra un diagramma della velocità rispetto al tempo di una particella che si muove lungo un asse. I punti 1 e 4 rappresentano il massimo e minimo della funzione, rispettivamente, mentre i punti 2 e 6 hanno medesima ordinata. Stabilire la direzione del moto (a) all'istante $t = 0$ e (b) nel punto 4. (c) In quale dei punti indicati la particella cambia verso? (d) Ordinare i sei punti secondo i valori decrescenti del modulo dell'accelerazione.



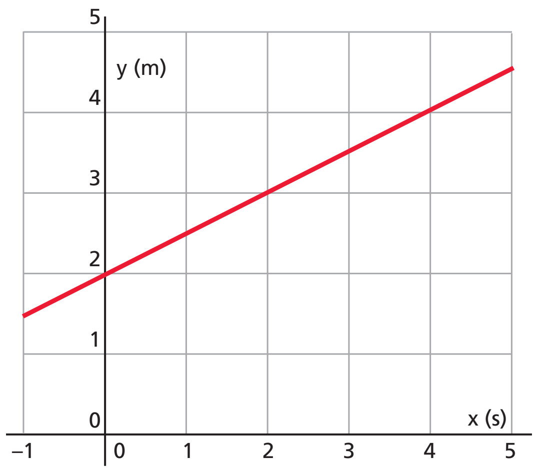
12 Considera la tabella seguente:

x	0,5	2	4	8
y			2	

▶ Completala in modo che y e x siano inversamente proporzionali. [16, 4, 1]

13 Il grafico rappresenta la dipendenza lineare di y da x.

▶ Scrivi la relazione che lega le due grandezze.



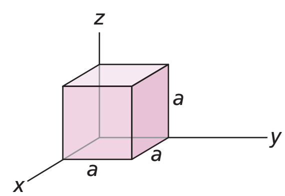
[$y = 2\ \mathrm{m} + (0{,}5\ \mathrm{m/s})\ x$]

14 Sull'etichetta di una bottiglia di acqua minerale leggi il dato: residuo fisso 210 mg/L. Il residuo fisso è la massa di sali che rimane allo stato solido una volta fatto evaporare un litro di acqua.

▶ Quale massa di sali è sciolta nell'acqua di un pentolino contenente 789 mL di acqua versata dalla bottiglia?

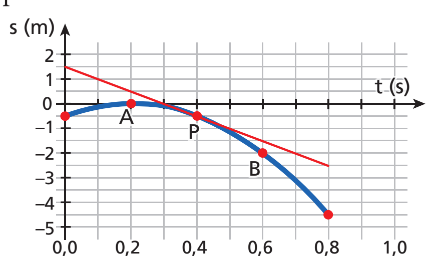
▶ Se si vuole fare in modo di non ingerire più di 0,30 g di sali provenienti dall'acqua al giorno, quanti litri di quella particolare acqua minerale si possono bere al massimo? [166 mg; 1,4 L]

15 Usando i vettori unitari, esprimete la diagonale di un cubo in funzione dei suoi spigoli (di lunghezza a, come illustrato nella figura) che si estende dal vertice di coordinate (a) (0, 0, 0), (b) (a, 0, 0), (c) (0, a, 0) e (d) (0, 0, a). (e) Determinate l'angolo che le diagonali formano con gli spigoli adiacenti. (f) Determinate la lunghezza delle diagonali in funzione di a.



I moti non relativistici su una retta

16 Nel grafico spazio-tempo, traccia la retta secante fra i punti A e B.



▶ Calcola la velocità media fra A e B.

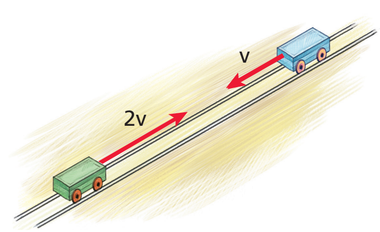
▶ Calcola la velocità istantanea nel punto P. [–5 m/s; –5 m/s]

17 Immaginate che su un pallone aerostatico a un passeggero distratto sfugga una mela fuori dal parapetto, mentre il pallone è in ascesa. All'istante in cui la mela comincia a cadere il pallone sta accelerando verso l'alto con intensità di 4,0 m/s^2 e ha una velocità sempre verso l'alto di modulo 2,0 m/s. Stabilire (a) il modulo e (b) il verso dell'accelerazione al momento del rilascio. (c) In tale momento la velocità della mela è positiva, negativa o nulla? (d) E qual è il suo modulo nel medesimo istante? (e) Nei momenti immediatamente successivi la velocità della mela aumenta, diminuisce o resta costante? [9,8 m/s^2; 2 m/s]

18 Dagli estremi di una rotaia lunga 4,20 m sono fatti partire contemporaneamente due carrelli che si muovono a velocità costante. La velocità di un carrello è, in valore assoluto, doppia di quella dell'altro. I due carrelli si urtano dopo 0,70 s.

▶ Qual è la velocità di ciascun carrello?

[2,0 m/s, –4,0 m/s]



19 Con un arco da competizione, una freccia passa da 0 m/s a 50 m/s in soli 60 cm.

► Quale accelerazione media subisce la freccia?

[2100 m/s^2]

Diego Barbieri / Shutterstock

20 Un corpo si muove lungo una retta con la legge oraria

$$s = 5\text{ m} - (1{,}2\text{ m/s})\,t + (1{,}8\text{ m/s}^2)\,t^2$$

► Completa la tabella seguente:

t (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s (m)											

► Traccia il corrispondente diagramma posizione-tempo.

► Determina la sua posizione e la sua velocità all'istante $t = 2{,}8$ s.

[16 m; 8,9 m/s]

21 Un elicottero sale in verticale verso l'alto a velocità costante pari a 6,0 m/s quando viene lasciata cadere una sacca di rifornimenti alimentari, che cade per 2,0 s.

► Calcola la velocità della sacca alla fine della caduta.

► Calcola la posizione dalla sacca alla fine della caduta.

► Calcola la distanza fra la sacca e l'elicottero dopo i 2,0 s di caduta.

SUGGERIMENTO Fissa il verso positivo dell'asse verticale in alto e l'origine nel punto in cui cade la sacca.

[−14 m/s; −7,6 m; 20 m]

22 **ESERCIZIO SVOLTO** Due automobili si muovono lungo la stessa direzione e nello stesso verso. L'automobile *A* si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_A = 55$ km/h, mentre *B* si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $a = 0{,}88$ m/s^2. L'automobile *B* precede *A* e parte da ferma nell'istante $t = 0$ s, quando la distanza tra le due automobili è $d_0 = 250$ m.

a. Che relazione deve esistere tra la velocità *v* di *A* e la velocità istantanea *u* di *B* affinché la distanza *d* tra *A* e *B* diminuisca?

b. In che istante le velocità di *A* e *B* diventano uguali?

c. Qual è la corrispondente distanza minima tra le due automobili?

d. Affinché *A* riesca a raggiungere *B* occorre che la distanza *d* si annulli in un certo istante. Occorre perciò che la corrispondente equazione ammetta soluzioni reali nell'incognita *t*.

e. Calcola la velocità di *A* al di sopra della quale *A* riesce a raggiungere *B*.

f. Calcola l'accelerazione di *B* al di sotto della quale *A* riesce a raggiungere *B*.

Fintanto che la velocità di *A* si mantiene maggiore della velocità di *B*, l'automobile *A* riduce la sua distanza da *B*, dopo di che la distanza aumenta. La distanza minima si ha perciò nell'istante in cui le due velocità sono uguali:

$$t = \frac{v_A}{a}$$

La distanza d tra le due automobili evolve nel tempo secondo l'espressione:

$$d = d_0 + \Delta s_B - \Delta s_A = d_0 + \frac{1}{2}at^2 - v_A t$$

La distanza minima è pertanto:

$$d_{min} = d_0 + \frac{1}{2}a\left(\frac{v_A}{a}\right)^2 - v_A\frac{v_A}{a} = d_0 - \frac{v_A^2}{2a}$$

Affinché l'automobile A raggiunga l'automobile B, la distanza d tra le due automobili si deve annullare:

$$\frac{1}{2}at^2 - vt + d_0 = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono:

$$t = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 - 2ad_0}}{a}$$

Affinché l'equazione ammetta soluzioni reali, occorre che il discriminante sia maggiore o uguale a zero:

$$v_A^2 \geq 2ad_0$$

per cui

$$v_A \geq \sqrt{2ad_0}$$

Equivalentemente, deve essere:

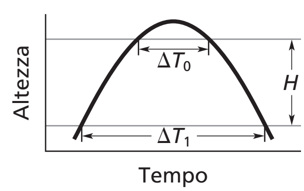
$$a \leq \frac{v_A^2}{2d_0}$$

23 Una palla cade da ferma da un balcone alto 3,5 m. Claudia si trova a 1,6 m dalla verticale lungo la quale sta cadendo la palla e corre per afferrarla. Le sue braccia si trovano a 1,0 m dal suolo e le mani si estendono di 41 cm rispetto al corpo.

► Con quale velocità media deve muoversi Claudia per afferrare la palla?

[1,7 m/s]

24 Al laboratorio nazionale di fisica in Inghilterra è stata fatta una misurazione di g lanciando verticalmente verso l'alto una sfera di vetro nel vuoto all'interno di una torre e lasciandola ricadere. Come indicato nella figura, sia ΔT_0 l'intervallo di tempo fra i due passaggi della sfera a un livello inferiore, ΔT_1 l'intervallo di tempo fra i due passaggi della sfera a un livello superiore, e H la distanza fra i due livelli. Dimostrare che



$$g = \frac{8H}{\Delta T_1^2 - \Delta T_0^2}.$$

I principi della dinamica e le loro applicazioni

25 Per trascinare un carrello di massa 400 kg un operaio applica una forza di 50 N a una corda inclinata di 30° rispetto al pavimento.

► Calcola la distanza percorsa dal carrello in 30 s.

► Calcola il tempo necessario perché il carrello raggiunga la velocità di 5,0 m/s partendo da fermo.

► Caricato con un baule, il carrello impiega 67 s per raggiungere la velocità di 5,0 m/s. Qual è la massa del baule?

[49 m; 46 s; $1,8 \times 10^2$ kg]

26 Un carico di massa 83 kg si trova in un ascensore agganciato a un dinamometro. L'ascensore sale con velocità costante di 1,1 m/s e poi si ferma in 2,2 s.

- Quanto vale la forza registrata dal dinamometro mentre l'ascensore sale a velocità costante?
- Quanto vale la forza registrata dal dinamometro nel tempo in cui l'ascensore rallenta?

[$8,1 \times 10^2$ N; $7,7 \times 10^2$ N]

27 Un muratore di 74 kg si cala da una impalcatura alta 5 m mediante un fune che passa in una carrucola. All'altro capo della fune è attaccato un sacco di sabbia di massa 51 kg.

- Con quale velocità tocca terra?

[4,2 m/s]

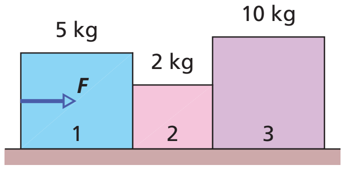
28 Un cubetto di 2,6 kg si trova su un piano orizzontale privo di attrito. Esso è collegato a una molla orizzontale di costante elastica 520 N/m mantenuta compressa e quindi rilasciata al fine di imprimere al cubetto un'accelerazione iniziale uguale a g.

- Di quanto è inizialmente compressa la molla?

[4,9 cm]

29 La figura mostra un gruppo di tre blocchi spinti su un piano privo di attrito da una forza $\boldsymbol{F}$. Qual è la massa totale accelerata verso destra da (a) la forza $\boldsymbol{F}$, (b) la forza $\boldsymbol{F}_{21}$ esercitata dal blocco 1 sul blocco 2 e (c) la forza $\boldsymbol{F}_{32}$ esercitata dal blocco 2 sul blocco 3? (d) Fate una classifica dei blocchi secondo i valori decrescenti delle loro accelerazioni. (e) Fate una classifica delle tre forze citate secondo i valori decrescenti delle loro intensità.

[17 kg; 12 kg; 10 kg; tutti uguali; 3, 2, 1]



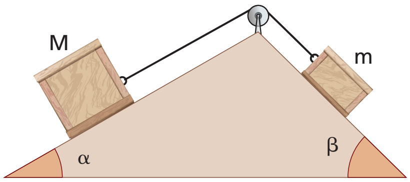
30 I coefficienti d'attrito statico e dinamico tra gli pneumatici di un'automobile 4 × 4 e la strada sono rispettivamente $\mu_s = 0,60$ e $\mu_d = 0,50$.

- Qual è l'accelerazione massima dell'automobile se la forza risultante che agisce su di essa è la forza d'attrito statico che viene esercitata dalla strada?
- Determina lo spazio di frenata se l'automobile sta viaggiando a 30 m/s e le ruote non slittano.
- Determina lo spazio di frenata se le ruote slittano.

[5,9 m/s^2; 77 m; 92m]

31 Due casse di massa $M = 3,8$ kg e $m = 3,0$ kg si trovano su due piani inclinati come è mostrato nella figura. Gli angoli di inclinazione dei due piani sono $\alpha = 30°$ e $\beta = 45°$. Tra il piano a sinistra e la cassa di massa M è presente attrito, con coefficienti di attrito statico $\mu_s = 0,15$ e dinamico $\mu_d = 0,12$. Il piano a destra invece è liscio.

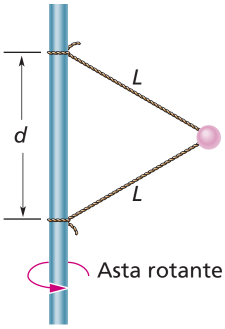
- Determina l'accelerazione delle due casse, prima in assenza di attrito, poi considerando l'attrito.
- Determina la tensione della fune in assenza di attrito.



[0,32 m/s^2 e 0 m/s^2; 20 N]

32 Come si vede nella figura, una palla di massa 1,34 kg è collegata da due fili lunghi L = 1,70 m privi di massa a un'asta verticale rotante. I fili tesi formano con l'asta, alla quale sono fissati, un triangolo equilatero. La tensione nel filo superiore è 35 N. (a) Quanto vale la tensione nella corda più bassa? (b) Qual è la risultante delle forze agenti sulla palla nella situazione illustrata dalla figura? (c) Qual è la velocità della palla?

[8,74 N; 37,9 N; 6,45 m/s]



La relatività galileiana

33 Un'auto viaggia verso nord con una velocità di modulo 35 km/h. Un caravan viaggia verso ovest con una velocità di modulo 42 km/h.

► Qual è la velocità del caravan secondo il guidatore dell'auto? [15 m/s; verso sud-ovest]

34 Carla è seduta nello scompartimento di un treno che viaggia alla velocità di 68 km/h lungo un tratto rettilineo. Guardando fuori dal finestrino vede delle gocce di pioggia, che scendono a velocità costante, con componenti

$v_x = -16$ m/s e $v_y = 3{,}0$ m/s.

► Quanto vale la velocità delle gocce di pioggia misurata da un osservatore che si trova a terra? [4,2 m/s]

35 Un aereo in volo orizzontale a velocità costante di 350 km/h rispetto al terreno sgancia un pacco soccorso. Trascurando la resistenza dell'aria, quali sono le componenti (a) verticale e (b) orizzontale della velocità iniziale del pacco? (c) Qual è la componente orizzontale della sua velocità subito prima dell'impatto? (d) Se la velocità dell'aereo fosse stata invece di 450 km/h, il tempo di caduta sarebbe stato maggiore, minore o uguale? [0; 350 km/h; 350 km/h, uguale]

36 Sono dati due sistemi di riferimento cartesiani ortogonali Oxy e $O'x'y'$ su un piano Π con gli assi paralleli tra loro. Supponi che all'istante $t = 0$ s l'origine O' abbia coordinate $x_{O'}(0\text{ s}) = 10$ m e $y_{O'}(0\text{ s}) = -10$ m. Inoltre O' si muove con velocità $\vec{v} = \left(2\frac{\text{m}}{\text{s}}, -2\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$ rispetto a Oxy. Assumi che un punto materiale si muova con le seguenti equazioni del moto rispetto a Oxy:

$$\begin{cases} x(t) = 5t^2 + 2t \\ y(t) = -2t - 2 \end{cases}$$

a. Determina le formule che esprimono le coordinate di un generico punto del piano rispetto a $O'x'y'$ in relazione alle coordinate Oxy.

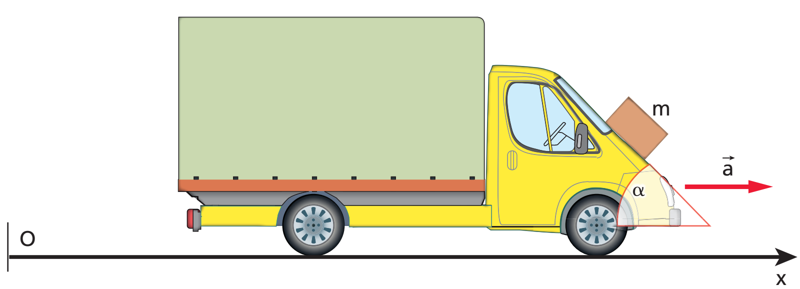
b. Il sistema di riferimento $O'x'y'$ è inerziale se Oxy è inerziale?

c. Scrivi le equazioni del moto del punto materiale rispetto a $O'x'y'$.

$$\left[\begin{cases} x' = x - 10 - 2t \\ y' = y + 10 + 2t \end{cases}; \text{ sì}; \begin{cases} x'(t) = 5t^2 - 10 \\ y'(t) = 8 \end{cases}\right]$$

---

37 Consideriamo un camioncino che si muove con un'accelerazione $a > 0$ rispetto all'asse x. Sul lato obliquo è posizionato un piccolo blocchetto di massa m, come mostrato in figura. Supponiamo che μ_s sia il coefficiente di attrito statico fra il lato obliquo e la massa m.



a. Scrivi il secondo principio della dinamica per la massa m, rispetto a un riferimento solidale con il camioncino, nell'ipotesi che la massa resti attaccata al lato obliquo. Dimostra che in questa situazione l'espressione della forza di attrito è data da:

$F_{att} = m(g\sin\alpha - a\cos\alpha)$ $[\vec{F}_{att} + \vec{N} + \vec{P} + \vec{F} = \vec{0}]$

38 Due aerei si muovono con verso opposto lungo la rotta che va dalla città A alla città B, distanti 300 km, in un giorno in cui spira un vento a 150 km/h da A a B. Entrambi gli aerei hanno una velocità di crociera di 750 km/h rispetto all'aria.

► Calcola il tempo che ciascuno di essi impiega per spostarsi da una città all'altra. [da A a B 20 min; da B ad A 30 min]

39 Lanciando da ferma, una giavellottista è in grado di imprimere all'attrezzo la velocità iniziale di 18 m/s. In gara, l'atleta lancia l'attrezzo con un angolo di 35° rispetto al terreno dopo aver raggiunto la velocità di 6,2 m/s.

- ▶ Calcola il modulo della velocità iniziale dell'attrezzo rispetto al terreno. [23 m/s]

40 Un'imbarcazione attraversa un fiume largo 300 m, mantenendo una velocità media di 1,2 m/s rispetto all'acqua. La velocità della corrente è 0,5 m/s.

- ▶ Calcola il modulo della velocità dell'imbarcazione rispetto alla riva.
- ▶ Quanto tempo impiega l'imbarcazione ad attraversare il fiume?
- ▶ Di quanto si sposta verso valle?

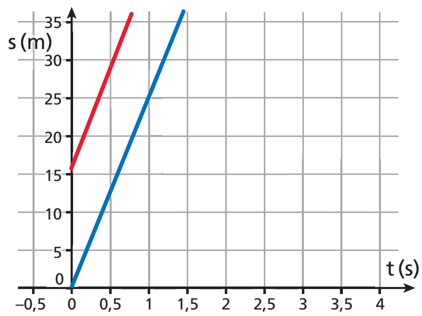
[1,3 m/s; 250 s; 125 m]

41 Andrea e Beatrice si trovano sul ponte di una nave che viaggia alla velocità di 11 m/s, a distanza di 6 m l'uno dall'altra, e si lanciano una palla che impiega 3 s per percorrere la distanza che li separa. Giovanni si trova su una seconda nave che viaggia parallelamente alla prima, e osserva che la palla si sposta di 12 m quando Andrea, che si trova a poppa, lancia la palla a Beatrice che si trova a prua.

- ▶ Con quale velocità si muove la nave su cui viaggia Giovanni?
- ▶ Qual è la velocità della palla secondo Giovanni quando Beatrice la lancia ad Andrea?

[9 m/s; 0 m/s]

42 Un camion viaggia in autostrada. La figura mostra il grafico spazio-tempo di un suo punto anteriore A (rosso) e di un punto posteriore P (blu) osservati da un sistema di riferimento solidale col terreno e con asse spaziale nella direzione del moto.



- ▶ Calcola la lunghezza del camion e la sua velocità.
- ▶ Considera un sistema di riferimento C solidale col camion e scrivi le coordinate spazio-tempo di A e di P in tale sistema. Specifica la velocità del camion in questo sistema.

Un motociclista all'istante $t = 0$ si trova all'altezza del punto P e viaggia alla velocità di 60 km/h.

- ▶ Considera un sistema di riferimento M solidale col motociclista e scrivi le coordinate spazio-tempo di A e di P in tale sistema. Specifica la velocità del camion in questo sistema.

[15 m; 25 m/s; 0 m/s; 8,3 m/s]

43 **SISTEMI DI RIFERIMENTO E TRASFORMAZIONI** **DERIVATE** La nave A si trova 4,0 km a nord e 2,5 km a est rispetto alla nave B. La nave A naviga alla velocità di 22 km/h verso sud, mentre la nave B è diretta a 37° a nord rispetto all'est con velocità di 40 km/h. (a) Trovare la velocità vettoriale di A rispetto a B (esprimere il risultato in termini di versori con $\mathbf{i}$ rivolto a est). (b) Scrivere un'espressione in termini di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ per la posizione di A rispetto a B in funzione del tempo, ponendo $t = 0$ all'istante descritto. (c) Quando è minima la distanza tra le navi? (d) Quant'è la minima distanza?

$[(-32\ \text{km/h})\mathbf{i} - (46\ \text{km/h})\mathbf{j};\ [(2{,}5\ \text{km}) - (32\ \text{km/h})t]\mathbf{i} + [(4{,}0\ \text{km}) - (46\ \text{km/h})t]\mathbf{j};\ 0{,}084\ \text{h};\ 2\cdot 10^2\ \text{m}]$

I moti non relativistici nel piano

44 Possiamo assumere che il Sole si muova di moto circolare uniforme attraverso la Via Lattea. Il raggio dell'orbita solare è $2{,}4 \times 10^{20}$ m e la sua frequenza è di 1 giro ogni circa 220 milioni di anni.

- ▶ Calcola l'accelerazione centripeta del Sole.
- ▶ Qual è il modulo della velocità del Sole?

[$2{,}0 \times 10^{-10}$ m/s^2; $2{,}2 \times 10^5$ m/s]

45 All'aeroporto una valigia di 25 kg, posta su una piattaforma in rotazione su un piano orizzontale, si muove di moto circolare uniforme. Il raggio della traiettoria è 2,8 m e l'accelerazione centripeta è 8,3 m/s^2. Calcola:

- ▶ il valore della forza che agisce sulla valigia;
- ▶ la velocità della valigia.

[$2{,}1 \times 10^2$ N; 4,8 m/s]

46 Una freccia viene lanciata orizzontalmente verso il bersaglio, che dista 11 m. La freccia, lanciata con una velocità di 32 m/s, non fa centro e colpisce più in basso. Trascura l'attrito dell'aria.

- Calcola dove la freccia colpisce il bersaglio.

[58 cm sotto il centro]

47 Paolo calcia una palla ferma al suolo con una velocità iniziale di modulo 10,0 m/s, inclinata di 45,0° rispetto all'orizzontale. Lucia si trova esattamente nel punto medio della gittata della palla calciata da Paolo e lancia a sua volta verso l'alto una seconda palla, con una velocità in modulo di 8,00 m/s.

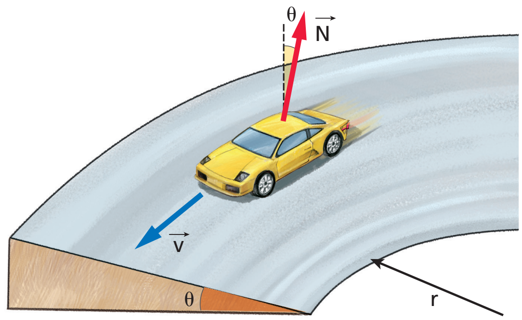
- Calcola dopo quanti secondi dal calcio di Paolo, Lucia deve lanciare la sua palla affinché questa colpisca quella di Paolo in fase di ascesa.

[0,29 s]

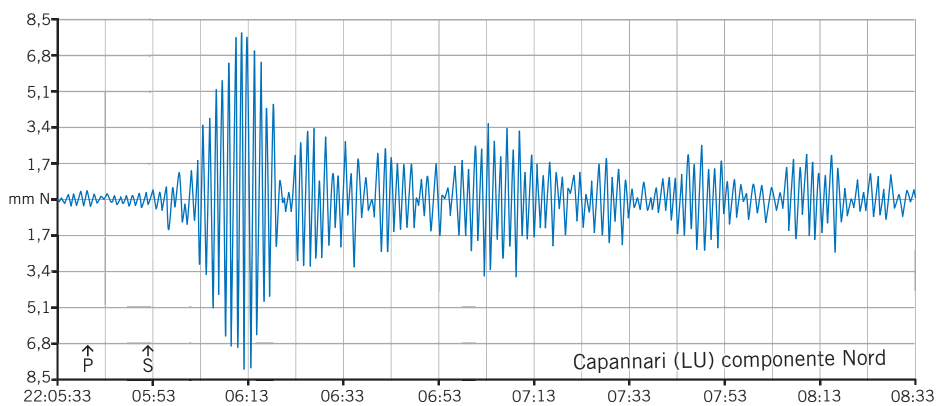
48 La curva di un circuito ha un raggio $r = 190$ m misurato nel centro della carreggiata. La curva è sopraelevata in modo che un'auto la percorre alla velocità costante $v = 130$ km/h senza che si eserciti alcuna forza d'attrito radiale fra gli pneumatici e l'asfalto.

- Calcola l'angolo di inclinazione della curva.

[35°]



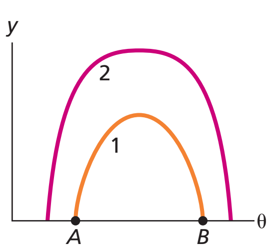
49 Il grafico riporta il sismogramma registrato alla stazione di Capannari (LU) il 12 gennaio 2010, in occasione di un devastante terremoto ad Haiti.



- Ricava approssimativamente la frequenza di oscillazione dal grafico.
- A che velocità si muoveva la Terra nelle oscillazioni più ampie?

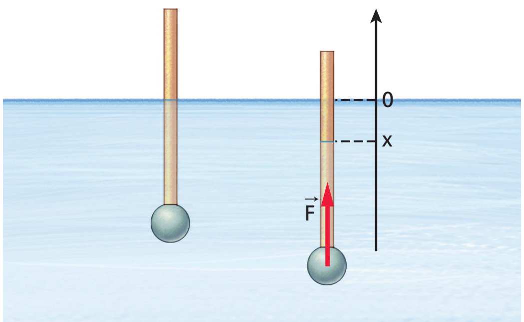
[0,017 Hz; 0,80 mm/s]

50 La curva 1 della figura descrive l'altezza di una palla in funzione dell'angolo θ compreso tra le direzioni della velocità e dell'accelerazione durante il volo. (a) Quale dei punti marcati sulla curva corrisponde all'atterraggio della palla? (b) La curva 2 è analoga alla precedente, ma per un lancio con angolo iniziale diverso. Ora la palla atterra più vicino o più lontano di prima al punto di lancio?



51 Un galleggiante è formato da un lungo cilindro di materiale a bassa densità di sezione $A = 4,0\ \text{cm}^2$, appesantito da una sfera di metallo in modo che galleggi mantenendosi verticale. L'oggetto ha una massa $m = 180$ g ed è immerso in acqua (densità $1,00\ \text{g/cm}^3$). Se lo immergi un poco e lo lasci andare, il galleggiante oscilla. Supponi che la densità del cilindro sia trascurabile e che l'attrito non influenzi in modo apprezzabile le prime oscillazioni.

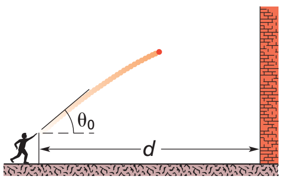
- Dimostra che si tratta di un moto armonico.
- Calcola il periodo di oscillazione del galleggiante. [T = 1,3 s]



52 Un cestista alto 2,0 m effettua un tiro libero. La linea del tiro libero dista in orizzontale 4,6 m dal canestro che si trova a 3,05 m dal suolo. Il cestista tira la palla con un angolo di inclinazione di 45° rispetto al suolo.

- Quale velocità deve dare il cestista alla palla per fare canestro? [7,6 m/s]

53 Una palla viene lanciata contro un muro con la velocità iniziale di 25,0 m/s a un angolo $\theta_0 = 40,0°$ rispetto al suolo orizzontale, come indicato nella figura 4.31. Il muro si trova alla distanza $d = 22,0$ m dal punto di lancio. (a) Per quanto tempo rimane in aria prima di colpire la parete? Quali sono le componenti (b) orizzontale e (c) verticale della sua velocità all'istante in cui colpisce la parete? (d) In questo istante ha già superato il vertice della traiettoria?



Il lavoro e l'energia

54 Un carrello di massa 2,0 kg viene trainato lungo un binario rettilineo da una forza costante di 50 N per 10 m.

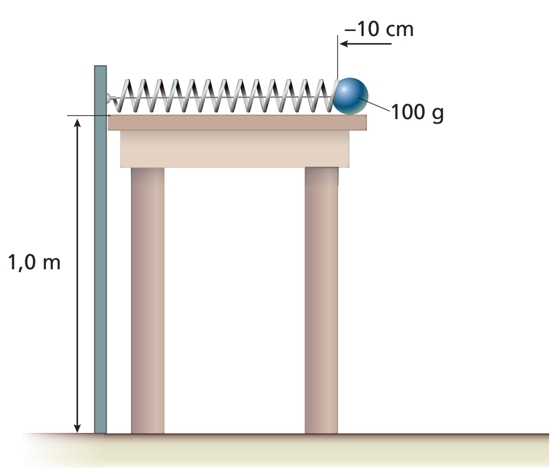
- Che velocità acquista? Trascura l'effetto dell'attrito.
- A che altezza arriverebbe se venisse lanciato verso l'alto con quella velocità?

[22 m/s; 26 m]

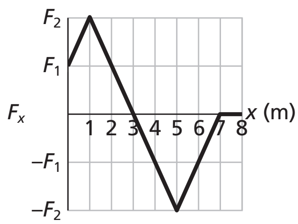
55 Una molla di massa trascurabile e costante elastica 3,0 N/m è disposta su un tavolo di altezza 1,0 m come mostrato nella figura. La molla è compressa di 10 cm tramite un filo di massa trascurabile. In corrispondenza dell'estremo libero della molla al bordo del tavolo è appoggiata una biglia di 100 g e il tavolo è privo di attrito. La molla, tagliato il filo, spinge la biglia.

- A che distanza dal tavolo cadrà la biglia? Trascura l'attrito con l'aria.

[25 cm]

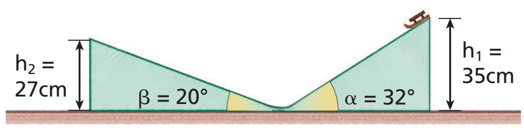


56 La figura mostra i valori di una forza F_x, diretta lungo l'asse x, che agisce su una particella, in funzione di corrispondenti valori di x. Se la particella parte da ferma al punto $x = 0$, quali sono le sue coordinate quando possiede (a) la massima energia cinetica, (b) la massima velocità, (c) velocità nulla? (d) Qual è la sua direzione quando raggiunge il punto $x = 6$ m? [3 m; 3 m; 0 e 6 m; $-x$]



57 Marco ha costruito una pista giocattolo per slitte: a una discesa pendente di 32° rispetto all'orizzontale, segue una salita di 20°. Il coefficiente di attrito dinamico tra slitta e pista è di 0,3. Marco posiziona la slitta sulla sommità della discesa.

- Con quale velocità minima Marco deve lanciare la slitta affinché questa giunga fino alla sommità della salita? [2,5 m/s]



58 Un carrello di massa 250 g è lanciato da una molla di costante elastica $k = 400$ N/m lungo una pista che presenta un anello di raggio r = 80 cm, come indicato in figura. Trascura gli attriti.

- Calcola di quanto devi comprimere la molla affinché il carrello riesca a effettuare il giro completo senza staccarsi dalla pista.

[16 cm]

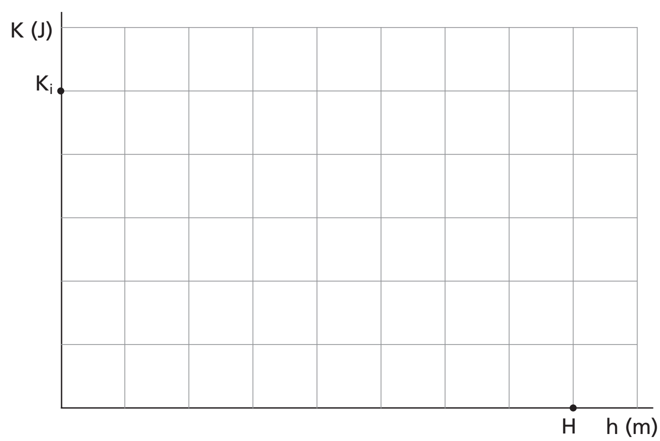
59 Un trenino di montagna avente una massa di 200 t sale di 510 m in un viaggio di 30 km effettuato alla velocità media di 25 km/h. L'insieme degli attriti ha l'effetto di una forza resistente pari al 2,0 % del peso del treno.

- Qual è l'energia cinetica media del treno?
- Calcola la variazione di energia potenziale gravitazionale occorsa durante il viaggio.
- Che lavoro compiono gli attriti?
- Quale potenza sviluppano in media i motori del treno?

[4,8 MJ;1,0 GJ;1,2 GJ; 0,5 MW]

---

60 Un carrello di massa $m = 1{,}70$ kg viene lanciato su una rotaia inclinata di 30° mediante una molla di costante elastica $k = 3{,}70$ kN/m inizialmente compressa di 35 cm. Poni uguale a zero la quota alla quale la molla cessa di spingere il carrello. Supponi che l'attrito sia trascurabile.



a. Il lancio avviene in 0,25 s. Calcola la potenza media erogata dalla molla.

b. Calcola l'altezza massima H raggiunta dal carrello.

c. Traccia il grafico dell'energia cinetica del carrello in funzione dell'altezza (K_i = energia cinetica iniziale).

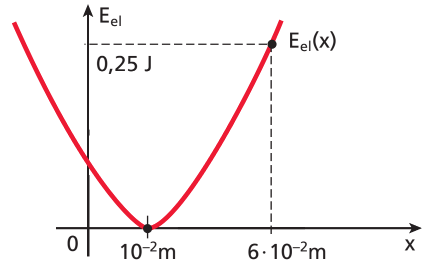
d. Supponi che la rotaia termini a un'altezza inferiore ad H e che il carrello esca dalla rotaia e prosegua il suo moto. A quale altezza massima arriva?

e. Considera ora la situazione nel caso di attrito tra carrello e rotaia (coefficiente di attrito dinamico μ_d). Dimostra che il carrello raggiunge l'altezza massima

$$H_{at} = \frac{1}{1 + \sqrt{3}\,\mu_d} H$$

[900 W; 13,4 m; 13,4 m]

61 L'energia elastica E_{el} di una molla è descritta dal grafico a fianco.



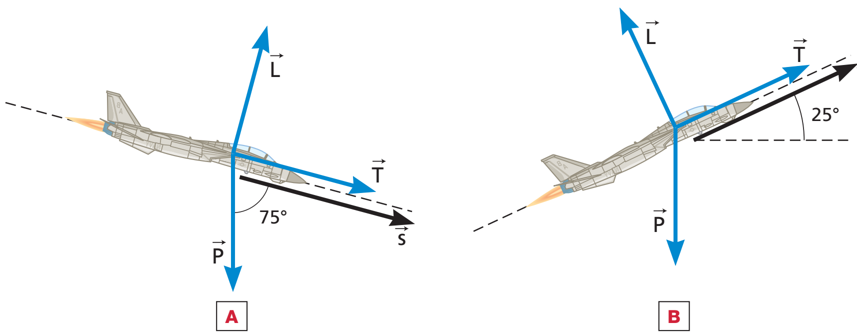
- Dimostra che il modulo della velocità di un punto materiale, di massa 1 kg, collegato alla molla, è dato da:

$$v(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{50}(100x - 1)^2}$$

nel caso di energia totale del sistema pari a 1 J.

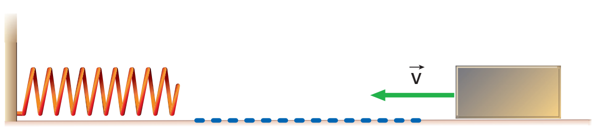
62 La figura mostra un aereo che prima compie una picchiata verso terra e poi risale verso l'alto. La forza di sollevamento o portanza $\vec{L}$ che agisce sull'aereo è perpendicolare allo spostamento $\vec{s}$, che in entrambi i casi ha modulo $1{,}7 \cdot 10^3$ m. I motori dell'aereo esercitano una spinta $\vec{T}$ che ha la stessa direzione dello spostamento e ha lo stesso modulo sia durante la picchiata sia durante la risalita. Il peso dell'aereo è $5{,}9 \cdot 10^4$ N. In entrambi i moti la risultante delle forze $\vec{L}$, $\vec{T}$ e $\vec{P}$ compie un lavoro sull'aereo.

- È maggiore il lavoro compiuto durante la picchiata o quello compiuto durante la risalita?
- Calcola la differenza tra il lavoro compiuto durante la picchiata e quello compiuto durante la risalita.

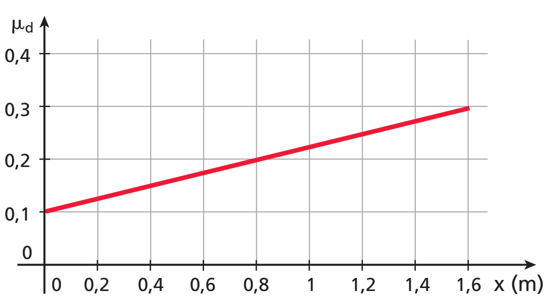


$[6{,}8 \cdot 10^7$ J]

63 Un blocco di massa 1,0 kg si muove su un piano orizzontale a velocità di 2,8 m/s verso una molla orizzontale, di costante elastica 160 N/m con una estremità attaccata a una parete.



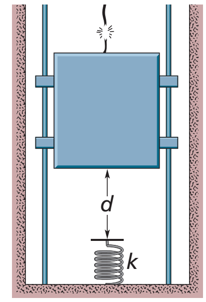
Prima di arrivare a toccare la molla, il blocco attraversa una zona in cui è presente attrito; in questa zona disegnata in blu, lunga 1,6 m, il coefficiente di attrito dinamico μ_d varia con la posizione nel modo indicato da questo grafico ($x = 0$ m corrisponde all'estremità della molla).



- In base ai valori che ricavi dal grafico, calcola il valore minimo e il valore massimo della forza di attrito.
- Disegna il grafico della forza di attrito così calcolata in funzione della posizione x e ricava dal grafico il lavoro compiuto dalla forza di attrito.
- Applica il teorema lavoro-energia e calcola la massima compressione della molla.

[0,98 N, 2,9 N; 0,10 m]

64 Il cavo dell'ascensore di massa 2000 kg della figura a fianco si spezza quando la cabina si trova ferma al primo piano, col fondo a una distanza $d = 3{,}7$ m al disopra di una molla ammortizzatrice avente costante elastica $k = 0{,}15$ MN/m. Un dispositivo di sicurezza agisce da freno sulle guide in modo da far loro sviluppare in caso di emergenza una forza d'attrito costante pari a 4,4 kN che si oppone al moto dell'ascensore. (a) Calcolate la velocità dell'ascensore prima che urti la molla. (b) Trovate di quale lunghezza x verrà compressa la molla. (c) Trovate di quale lunghezza rimbalzerà l'ascensore lungo le guide. (d) Applicando la legge di conservazione dell'energia, calcolate la distanza approssimativa percorsa dall'ascensore fino al punto d'arresto inferiore.



[7,3 m/s; 1,0 m; 3,0 m; 16 m]

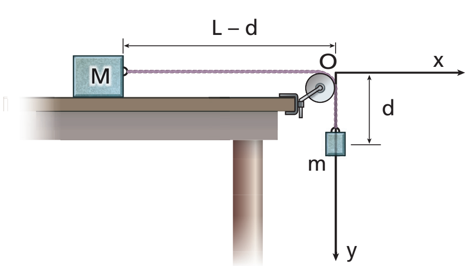
La quantità di moto

65 Un balestriere scaglia una freccia da 250 g contro un bersaglio di legno ($m = 2{,}5$ kg) non ancorato a terra. La freccia rimane conficcata nel legno che in seguito all'urto si sposta di 3,0 m (nella direzione del moto della freccia). Tra il bersaglio di legno e la superficie su cui è appoggiato si esercita una forza di attrito con coefficiente d'attrito $\mu_D = 0{,}40$. Calcola:

- l'accelerazione del sistema (freccia + bersaglio) dovuta alla forza d'attrito;
- la velocità del sistema (freccia + bersaglio) subito dopo l'urto;
- la velocità della freccia.

[3,9 m/s^2; 4,8 m/s; 53 m/s]

66 **MOTO DI UN PUNTO MATERIALE** **SISTEMI DI RIFERIMENTO E LUOGHI GEOMETRICI** La figura mostra un sistema di due masse ($M = 6{,}0$ kg, $m = 3{,}0$ kg) collegate da una fune di lunghezza totale $L = 3{,}0$ m.



- Determina le coordinate della posizione del centro di massa in funzione di d, cioè della distanza dall'origine O della massa m.
- Il centro di massa può passare per il punto A (0, 1,0 m)?

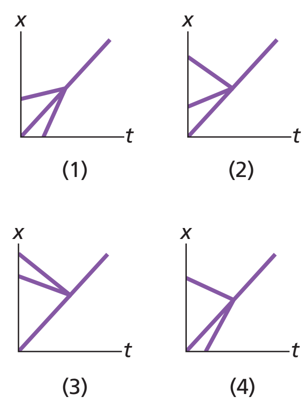
SUGGERIMENTO Centra il sistema di riferimento sulla carrucola, come è mostrato nella figura.

[(−2,0 m + 2/3 d, 1/3 d); sì]

67 Due carrelli, rispettivamente di massa $m_1 = 2{,}3$ kg e $m_2 = 3{,}2$ kg sono posti su un piano privo di attrito. Tra i due carrelli, in quiete, c'è una molla, di massa trascurabile, compressa tramite un filo. L'energia elastica della molla nella configurazione iniziale è di 0,38 J.

- Calcola le velocità dei due carrelli dopo che il filo è stato tagliato e la molla è tornata a riposo. [0,44 m/s; − 0,32 m/s]

68 La figura mostra quattro andamenti della posizione rispetto al tempo per due corpi e il loro centro di massa. I due corpi subiscono un urto completamente anelastico unidimensionale lungo l'asse x. Con riferimento al grafico 1, dire se (a) i due corpi e (b) il loro centro di massa si muovono nel verso positivo o negativo delle x. (c) Quali grafici descrivono situazioni impossibili? Commentate.



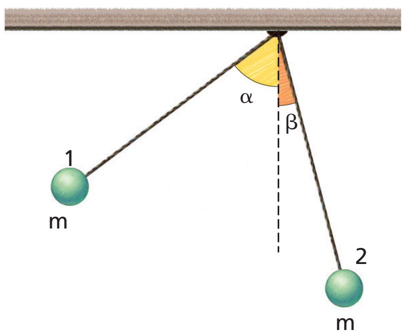
69 Un filo di lunghezza 30 cm con appesa una massa di 120 g è libero di oscillare in un piano verticale. A partire dalla posizione orizzontale e con filo teso, la massa è lasciata scendere finché, quando raggiunge la posizione più bassa, colpisce elasticamente un secondo corpo di massa 55 g inizialmente fermo e appoggiato su un piano orizzontale. A causa dell'attrito, il secondo corpo si arresta in un intervallo di tempo di 1,2 s dopo l'urto.

- Quanto vale il coefficiente di attrito dinamico tra il secondo corpo e il piano su cui esso appoggia? [0,28]

70 Due fili uguali, lunghi 1,5 m con appese due masse identiche, sono liberi di oscillare in un piano verticale. I due fili vengono posizionati come in figura e lasciati liberi contemporaneamente. Supponi che le due masse si urtino nel punto più basso.

- Calcola gli angoli α e β sapendo che le velocità prima dell'urto sono rispettivamente 5,1 m/s e 2,2 m/s.
- A quale angolo arrivano le palline dopo un urto elastico?
- Calcola a quale angolo arrivano le palline in caso di urto totalmente anelastico.

[83°, 33°; 33°, 83°; 22° dal lato della pallina 2]



71 Un'automobile di massa 800 kg e velocità 54 km/h si muove lungo una traiettoria rettilinea. Una seconda automobile di massa 900 kg e velocità 72 km/h si muove lungo una traiettoria rettilinea perpendicolare a quella precedente. All'istante $t = 0$ s esse si urtano nell'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale e poi procedono unite.

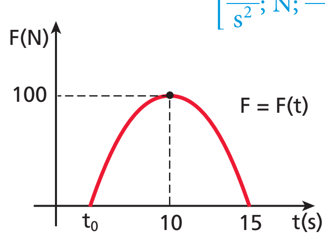
- Qual è la quantità di moto totale del sistema prima dell'urto?
- Qual è il modulo della velocità finale delle due auto?

[$2{,}2 \times 10^4$ kg · m/s; 13 m/s]

72 **MOTO DI UN PUNTO MATERIALE** **SISTEMI DI RIFERIMENTO E LUOGHI GEOMETRICI** Su di un punto materiale di massa m agisce una forza di modulo $F(t) = \alpha(t - 10)^2 + \beta$ nell'intervallo $[t_0, 15\ \text{s}]$, che è quindi rappresentata dal grafico sotto.

- Determina le unità di misura di α, β e l'impulso della forza nell'intervallo di tempo dato.

$\left[\frac{\text{N}}{\text{s}^2}; \text{N}; \frac{2000}{3}\ \text{N} \cdot \text{s}\right]$



73 Alla guida delle loro auto, Marco e Clara hanno uno scontro frontale. Giunta sul posto, una pattuglia della Polizia Stradale registra i fatti seguenti:

1. l'auto di Marco si stava immettendo da uno svincolo autostradale nella strada da cui proveniva in verso opposto Clara;
2. le due macchine si sono incastrate nell'urto e gli airbag risultano esplosi;
3. non risultano strisciate sull'asfalto, né prima né dopo l'urto;
4. a seguito dell'urto le automobili si sono accartocciate per circa 40 cm;
5. l'auto di Marco è un'utilitaria (massa 850 kg) mentre quella di Clara è una grossa berlina (massa 1550 kg).

a. Spiega perché puoi concludere che la quantità di moto totale del sistema formato dai due autoveicoli era nulla prima dell'urto.

b. Marco promuove una causa legale contro Clara, accusandola di aver avuto prima dell'urto una velocità molto maggiore della sua. Clara smentisce Marco dimostrando che prima dell'urto Marco procedeva a una velocità che era circa 1,8 maggiore della sua. Spiega come ha fatto.

c. Per rendere più evidente la propria conclusione al giudice, Clara ricostruisce lo scontro con due modellini di auto. Tu come realizzeresti la simulazione dell'urto?

d. Supponi che la velocità iniziale di Clara fosse 50 km/h. Stima l'accelerazione media subita da Clara durante l'impatto in unità g.

e. Alla luce del dato precedente, ritieni che sia ben fondato l'obbligo di utilizzare sistemi passivi di protezione, come le cinture di sicurezza e gli airbag? Spiega.

Consideriamo invece due auto A e B che viaggiano con velocità costanti di verso opposto e che, all' istante $t = 0$ s, si vengono a trovare a una certa distanza d con quantità di moto totale $Q > 0$.

f. Indichiamo con m_A e m_B le masse delle due auto. Se, all'istante $t = 0$, i valori assoluti q_A e q_B delle loro quantità di moto soddisfano le seguenti relazioni:

$$q_A = \frac{1}{2} q_B \quad \text{e} \quad -q_A + q_B = Q$$

dimostra che l'istante di impatto è dato dalla formula:

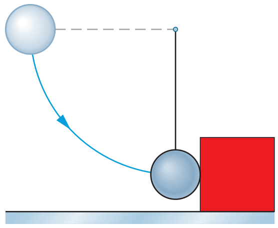
$$t = \frac{d\, m_A m_B}{Q(m_B + 2m_A)}$$

[25g]

74 Un'asta di massa $M = 0{,}75$ kg e lunghezza $l = 16$ cm può ruotare in un piano orizzontale, attorno a un asse passante per la sua estremità A. Un blocco di massa $m = 0{,}050$ kg si dirige verso l'altra estremità B con velocità $v_0 = 2{,}0$ m/s, perpendicolarmente all'asta, e vi rimane attaccato. Trascura gli effetti della gravità e degli attriti.

- Calcola la velocità di rotazione del sistema asta + blocco dopo l'urto.
- Considera la stessa situazione senza il vincolo dell'asse nell'estremità A. Che tipo di moto compie il sistema asta + blocco dopo l'urto?
- Calcola le velocità di traslazione e di rotazione dopo l'urto.

75 Una palla d'acciaio con massa 0,500 kg, attaccata a un filo di lunghezza 70,0 cm fissato all'altra estremità, è lasciata libera da una posizione in cui il filo era orizzontale. Come mostra la figura sotto, nel punto più basso della sua corsa la palla colpisce un blocco d'acciaio di massa 2,50 kg stazionario su un piano privo di attrito. L'urto è elastico. Trovate (a) la velocità della palla e (b) la velocità del centro di massa subito dopo l'urto.



[2,74 m/s; 1,23 m/s]

Il momento angolare

76 Un ragazzo gioca a far girare più velocemente possibile una corda con un sasso attaccato all'estremità. La lunghezza della corda (dalla mano al sasso) è 50 cm.

- Quanta corda deve recuperare per aumentare del 10% la velocità del sasso?
- Quanta corda deve recuperare per aumentare del 10% la velocità angolare del sasso?

[5 cm, 2 cm]

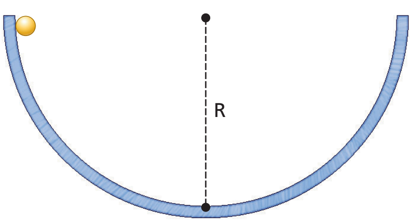
77 Un lanciatore di martello scaglia il suo attrezzo dopo averlo fatto accelerare per 2,0 s applicandogli una forza media di 35 N tangente alla traiettoria. Il martello pesa 2,5 kg e la catena a cui è attaccato è lunga 90 cm.

- Quanto vale il momento angolare del martello al momento del lancio?

[$63\ \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$]

78 Una piccola sfera è lasciata rotolare senza strisciare dentro un contenitore di forma semisferica e di raggio $R = 0{,}50$ m. Inizialmente la sfera è ferma.

- Calcola la velocità con cui transita nel punto più basso. [2,6 m/s]



79 Una donna di 60 kg è ferma sul bordo esterno di una giostra con massa 250 kg e raggio 3,2 m. La giostra ruota a 0,35 giri/s. La donna cammina verso l'asse della giostra e si ferma a 1,1 m da esso. Considera la giostra come se fosse un disco.

- Quanto vale la velocità di rotazione finale della giostra? [3,1 rad/s]

---

80 Un disco di raggio 25 cm e massa 850 g ruota liberamente a 2,5 giri/s attorno al suo asse. Un secondo disco inizialmente fermo di raggio 15 cm e massa 1,5 kg viene appoggiato in modo coassiale sul primo. In seguito viene applicato un momento torcente di 35 mN per riportare il sistema alla frequenza di rotazione originaria.

- Qual è la frequenza di rotazione subito dopo che il secondo disco è stato appoggiato sul primo?
- Dopo quanto tempo dall'applicazione del momento torcente, il sistema raggiunge la velocità originaria?

[1,5 giri/s; 7,8 s]

81 Un disco di massa $m_1 = 5{,}0$ kg e raggio $R_1 = 0{,}28$ m sta ruotando senza attrito attorno a un asse ed effettua 10 giri/s. Su questo disco viene impilato un altro disco di massa $m_2 = 4{,}0$ kg e raggio $R_2 = 0{,}18$ m che per attrito inizia a ruotare sull'altro disco fino a quando i due dischi non hanno la medesima velocità angolare. Calcola:

- la velocità finale di rotazione;
- l'energia dissipata per attrito. [47 rad/s; 96 J]

82 Una stella di raggio $7{,}0 \cdot 10^5$ km compie un giro su se stessa in 30 giorni. Alla fine della sua vita collasserà in una stella di neutroni rotante di raggio 15 km chiamata *pulsar*.

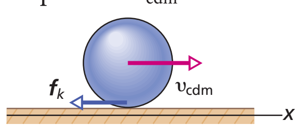
- Quanti giri compirà la pulsar in un secondo? [840]

83 Un proiettile di massa $m = 15$ g è sparato alla velocità di 140 m/s contro un bersaglio di legno che può ruotare attorno un asse verticale. La pallottola colpisce e attraversa il bersaglio a 20 cm dall'asse, e poi continua a velocità dimezzata. Dopo il colpo ricevuto, il bersaglio compie un giro in 5,0 s.

- Calcola il momento angolare del proiettile rispetto all'asse di rotazione del corpo, un istante prima dell'urto.
- Qual è il momento d'inerzia del bersaglio rispetto all'asse di rotazione?

SUGGERIMENTO La quantità di moto non si conserva (ci sono forze esterne), ma si conserva il momento angolare. Prima dell'urto il momento angolare totale è quello del proiettile, dopo l'urto è dato dalla somma del momento angolare del proiettile e di quello del bersaglio che ruota. [0,42 kg · m²/s; 0,17 kg · m²]

84 Un giocatore di bowling lancia la palla di raggio $R = 11$ cm lungo la corsia. La palla scivola sulla corsia con velocità iniziale $v_{cdm,0} = 8{,}5$ m/s e velocità angolare iniziale $\omega_0 = 0$. Il coefficiente di attrito dinamico tra la palla e la corsia è 0,21. La forza di attrito dinamica f_k che agisce sulla palla figura sotto imprime un'accelerazione lineare alla palla e nello stesso tempo applica un momento torcente che imprime un'accelerazione angolare alla palla. Quando la velocità v_{cdm} è diminuita opportunamente e la velocità angolare ω è cresciuta abbastanza, la palla cessa di strisciare e rotola con moto volvente. (a) Come si può esprimere v_{cdm} in termini di ω? Durante lo slittamento quali sono (b) l'accelerazione lineare e (c) l'accelerazione angolare della palla? (d) Per quanto tempo la palla striscia? (e) Quale distanza percorre la palla strisciando? (f) Qual è la velocità della palla quando inizia il rotolamento senza strisciare?



[$-(0{,}11$ m$)\omega$; $-2{,}1$ m/s²; -47 rad/s²; 1,2 s; 8,6 m; 6,1 m/s]

Il campo gravitazionale

85 Il raggio equatoriale della Luna è $1{,}738 \times 10^6$ m e la sua massa vale $7{,}35 \times 10^{22}$ kg.

- Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla superficie della Luna? [1,62 m/s²]

86 Un razzo lanciato verso la Luna si arresta nel punto in cui la forza di attrazione gravitazionale dovuta alla Terra e quella dovuta alla Luna hanno lo stesso modulo e la stessa direzione ma versi opposti.

- In quale punto del segmento che unisce il centro della Terra e il centro della Luna si trova il razzo? [A $3{,}46 \times 10^8$ m dal centro della Terra]

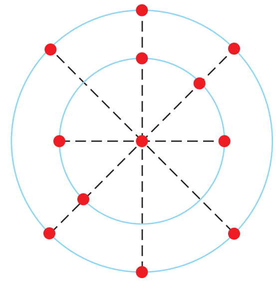
87 I satelliti che assicurano il servizio GPS per la localizzazione sulla superficie terrestre orbitano a un'altezza $h = 20\,200$ km.

- Calcola il loro periodo orbitale T in ore. [12 h]

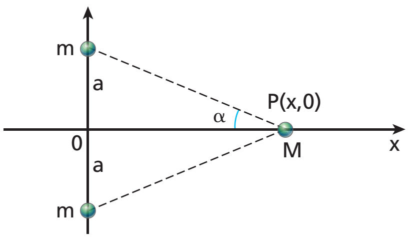
88 Un proiettile viene lanciato verticalmente dalla superficie terrestre con una velocità iniziale uguale a quella di fuga.

- Calcola la velocità del proiettile quando si trova a un'altezza uguale al raggio terrestre. [7,9 km/s]

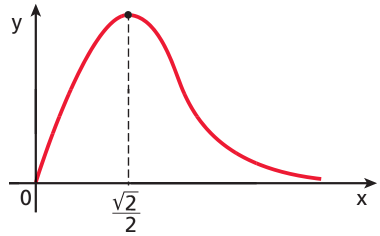
89 Nella figura un particella centrale è circondata da particelle poste su due anelli circolari di raggi r e R, con $R > r$. Tutte le particelle hanno massa m. Determinare modulo e direzione della forza gravitazionale netta esercitata sulla particella centrale dalle altre particelle.



90 **CAMPO GRAVITAZIONALE** **CALCOLO DIFFERENZIALE** Consideriamo, in una regione di spazio, due punti materiali aventi la medesima massa m e un punto P di massa M equidistante da essi, come indicato in figura **A**.



A



B

a. Determina l'espressione del modulo della forza $F(x)$ che agisce su P.

b. Con l'aiuto del grafico (figura **B**), che rappresenta la funzione

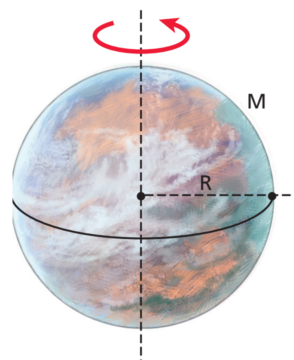
$$y = f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}}$$

determina la posizione del punto P, con $x > 0$, affinché la forza $F(x)$ sia massima.

$\left[\dfrac{2GMmx}{(x^2+a^2)^{3/2}},\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right]$

91 Un pianeta non potrebbe ruotare troppo velocemente perché la forza di gravità non sarebbe sufficiente a tenerlo insieme. Una velocità di rotazione troppo alta conferisce al pianeta una forma di ellissoide, ma assumiamo che il pianeta rimanga in questo caso di forma sferica.

- Calcola qual è la velocità massima di rotazione per un pianeta di massa M e raggio R.
- Calcola questo valore per la Terra e confrontalo con la velocità di rotazione terrestre.



92 La cometa di Halley si muove attorno al Sole lungo un'orbita ellittica che percorre in 75,8 anni.

- Calcola la lunghezza del semiasse maggiore dell'orbita.

La minima distanza dal Sole a cui arriva la cometa di Halley è 0,596 UA.

- Calcola la sua massima distanza dal Sole in UA.

Nel punto più vicino al Sole la velocità della cometa è 54,5 km/s.

- Calcola la sua velocità nel punto più lontano.

[2,68 · 10^{12} m; 35,2 UA; 923 m/s]

93 Un satellite di 200 kg è in orbita circolare intorno alla Terra. La sua energia potenziale gravitazionale vale $-1{,}14 \times 10^{10}$ J.

- A che distanza si trova dal centro della Terra?
- Quanto vale la sua energia cinetica?

[$6{,}99 \times 10^6$ m; $5{,}70 \times 10^9$ J]

94 Quali sono (a) la velocità e (b) il periodo di un satellite di massa 220 kg su un'orbita circolare posta 640 km sopra la superficie terrestre? Supponiamo che durante ogni rivoluzione perda energia meccanica per $1,4 \cdot 10^5$ J. Accettando la ragionevole semplificazione che la traiettoria sia una «circonferenza di raggio lentamente decrescente», determinate per il satellite (c) l'altitudine, (d) la velocità e (e) il periodo alla fine della millecinquecentesima rivoluzione. (f) Qual è l'intensità media della forza frenante? Il momento angolare intorno al centro della Terra si conserva (g) per il satellite e (h) per il sistema Terra-satellite (se il sistema è isolato)?
[7,5 km/s; 97 min; $4,1 \cdot 10^2$ km; 7,7 km/s; 93 min; $3,2 \cdot 10^{-3}$ N]

La temperatura e il calore

95 Un proiettile di piombo che si muove a 300 m/s si conficca in un blocco di legno. La metà della sua energia cinetica contribuisce al riscaldamento del proiettile: per questo la temperatura del proiettile aumenta di circa 180 K.

- ▸ Stima l'ordine di grandezza del calore specifico del piombo. [$1,3 \times 10^2$ J/(kg · K)]

96 Un calorimetro di massa equivalente in acqua uguale a 10 g contiene 200 g di acqua a 18 °C. Un oggetto di ferro $c = 499$ J/(kg.K) di 50 g alla temperatura di 80 °C viene immerso nell'acqua del calorimetro.

- ▸ Indica le quantità di calore scambiate e se si tratta di quantità assorbite o cedute.
- ▸ Calcola la temperatura di equilibrio. [20 °C]

97 Una vecchia lampada a incandescenza (oggi in disuso) contiene un filamento di tungsteno cilindrico che raggiunge, a regime, i 3000 K. La potenza della lampada è 100 W e la lunghezza del filamento è di circa 30 cm. L'emissività del tungsteno è del 35%.

- ▸ Calcola il diametro del filamento. [$0,66 \times 10^{-4}$ m]

98 La camera d'aria di una ruota è gonfiata con aria a 20 °C, la pressione è di 103 kPa. Quando la ruota è in movimento, l'attrito con l'asfalto fa sì che si scaldi raggiungendo una temperatura di circa 35 °C. Lo pneumatico esterno permette di mantenere costante il volume della camera d'aria.

- ▸ Calcola la pressione cui è sottoposta la camera d'aria quando la ruota è in movimento.
- ▸ Se la pressione della ruota in movimento fosse 104 kPa, quale sarebbe l'incremento di temperatura dovuto all'attrito? [108 kPa ; 2,8 °C]

99 Per una buona frittura la temperatura dell'olio deve essere almeno 160 °C. Una friggitrice ha una potenza di 1,0 kW e contiene 2,5 L d'olio d'oliva ($\rho = 0,92$ g/cm^3), che inizialmente è alla temperatura di 20 °C. Trascura il calore disperso.

- ▸ Quanto tempo si deve attendere dall'accensione prima di immergere nell'olio le patatine? [≈ 9 min]

100 Un frigorifero presenta le seguenti dimensioni: 60 cm × 50 cm × 200 cm. Le sue pareti sono costituite da due sottili strati di acciaio, che hanno la sola funzione di supporto meccanico, distanti 4,0 cm. Lo spazio tra le pareti è riempito di materiale isolante avente una conducibilità termica $\lambda = 0,10$ W/(m · K). La temperatura esterna è di 25 °C, mentre quella all'interno del frigorifero è di 5 °C.

- ▸ Valuta la potenza termica, ovvero la quantità di calore che deve essere portata all'esterno del frigorifero. [0,25 kW]

101 Una barra di rame (conducibilità termica 390 W/(m · K) lunga 2,0 m ha una sezione circolare di raggio 1,0 cm. Un'estremità è tenuta a 100 °C, mentre l'altra è a 0 °C; la superficie laterale è isolata in modo che la perdita di calore attraverso essa sia trascurabile.

- ▸ Quanto vale la quantità di calore che fluisce attraverso la barra nell'unità di tempo?
- ▸ Determina il gradiente di temperatura $\Delta T/\Delta x$, cioè la variazione di temperatura per unità di lunghezza.
- ▸ Qual è il valore di temperatura a 25 cm dall'estremità calda? [6,1 J/s; 50 K/m; 88 °C]

102 Non vi funziona il fornello e decidete di far bollire l'acqua per un tè agitandola dentro un thermos. Supponiamo che vi introduciate l'acqua a temperatura di 19 °C, che agitiate con 27 colpi al minuto e che a ogni colpo l'acqua cada di un'altezza pari a 32 cm. Trascurando qualsiasi perdita, quanti minuti impiegherete per scaldarla a 100 °C? [$4,0 \cdot 10^3$ min]

103 Prendiamo in esame una semplice reazione chimica, in cui le molecole reagenti X e Y danno luogo alla molecola Z (il prodotto della reazione):

$X + Y \rightarrow Z$

In termini semplificati, si può affermare che la reazione avviene solo se le molecole X e Y si avvicinano abbastanza da riorganizzare parte della loro struttura elettronica e formare la molecola Z. L'agitazione termica fornisce l'energia necessaria, detta energia di attivazione E_a. Se le molecole X e Y non possiedono l'energia E_a, la reazione non avviene: solo una piccola frazione delle molecole con energia sufficiente dà luogo alla reazione.

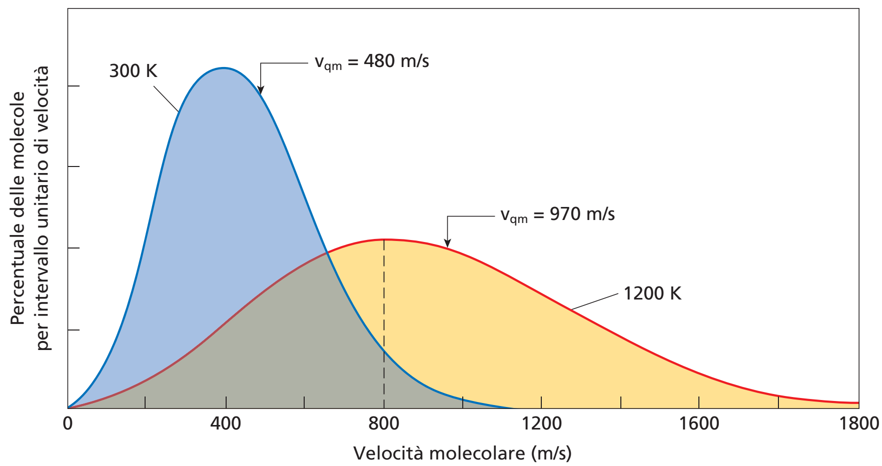
a. Considera la reazione di combustione tra due gas, l'idrogeno e l'ossigeno:

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

L'aria contiene sia idrogeno che ossigeno, eppure questa reazione non avviene nelle normali condizioni atmosferiche. Come puoi spiegare questo fatto?

b. La reazione avviene al di sopra di una temperatura di soglia T_s pari a circa 560 °C. Supponi che l'energia di attivazione E_a sia uguale all'energia cinetica media delle molecole. Calcola E_a.

c. Verifica che la velocità quadratica media delle molecole di ossigeno a 560 °C è di circa 800 m/s.



d. Osserva i grafici precedenti che rappresentano la percentuale di molecole nell'aria per intervallo di velocità.Spiega perché la reazione non avviene a 300 K.

e. I grafici suggeriscono che la reazione avvenga tanto più velocemente quanto maggiore è la temperatura: infatti con T cresce il numero di molecole con energie più elevate di E_a. Puoi verificare questa ipotesi servendoti di due compresse effervescenti, un bicchiere di acqua fredda e un bicchiere di acqua calda. In quale dei due bicchieri la compressa dà l'effervescenza maggiore? Spiega.

f. Disegna il grafico della funzione $t = t(v_{rqm})$, ovvero il grafico della temperatura t in gradi centigradi in relazione alla radice della velocità quadratica media.

Dati: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K [$1{,}7 \cdot 10^{-20}$ J]

I principi della termodinamica

104 Una macchina termica assorbe dalla sorgente calda $4{,}2 \times 10^3$ J di calore per ogni ciclo e ne trasforma il 12% in lavoro, generando una potenza di 16 kW.

- Calcola la quantità di calore ceduta alla sorgente fredda in un ciclo.
- Calcola il numero di cicli al secondo che la macchina compie.

[$3{,}7 \times 10^3$ J; 32]

105 Una macchina termica reversibile lavora tra due sorgenti ideali di calore con una differenza di temperatura di 250 °C e produce in un ciclo un lavoro di $4{,}1 \times 10^3$ J.
La macchina produce una potenza di $3{,}4 \times 10^2$ W e in un ciclo assorbe dalla sorgente calda $9{,}4 \times 10^3$ J di calore.

- ▸ Calcola il rendimento della macchina reversibile.
- ▸ A quali temperature si trovano le due sorgenti?
- ▸ Quanto calore viene ceduto alla sorgente fredda in un ciclo?

[0,44; $T_1 = 45$ °C; $T_2 = 295$ °C; $Q_1 = -5{,}3 \times 10^3$ J]

106 Una centrale utilizza del vapore per azionare le turbine e generare energia elettrica. La potenza erogata dalla centrale è di $1{,}5 \times 10^3$ MW, ma il rendimento del processo di conversione in energia elettrica è del 30%. Trascura l'energia utilizzata dalla centrale per funzionare, e supponi che tutto il calore in eccesso venga trasferito a un fiume la cui portata è pari a 75 m^3/s.

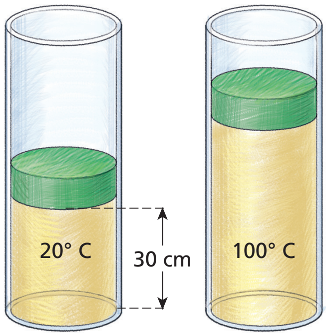
- ▸ Calcola quanto calore viene smaltito nel fiume ogni secondo.
- ▸ Determina l'aumento di temperatura dell'acqua del fiume.

[$3{,}5 \times 10^3$ MJ; 11 K]

107 Un cilindro di sezione 100 cm^2 contiene gas ed è a temperatura $T = 20$ °C. Il cilindro è chiuso con un tappo che scorre quasi senza attrito lungo le pareti. Il peso del tappo è 10 N. Inizialmente il tappo è fermo a 30 cm dalla base del cilindro. Il gas viene portato lentamente a 100 °C. Assumi che la pressione esterna sia nulla.

- ▸ Calcola:
  - – lo spostamento del tappo;
  - – il lavoro compiuto dal gas.

[8,2 cm; 0,82 J]



108 Un proiettile di piombo ha una temperatura di 20 °C e si muove alla velocità di 200 m/s. Viene fermato da un blocco di legno. Supponi che tutta la variazione di energia riscaldi il proiettile.

- ▸ Qual è la temperatura del proiettile immediatamente dopo l'urto? [174 °C]

---

109 Una bolla di 1,0 m^3 di aria raggiunge la temperatura di 21 °C a contatto col suolo. Assumi che la bolla sia formata da 42 moli di gas perfetto biatomico ($\gamma = 1{,}4$) e che non sia presente vapore acqueo. La bolla riceve una spinta idrostatica dall'aria più fredda circostante e sale fino alla quota di 3,0 km, dove la temperatura è $-2{,}0$ °C e la pressione è $p = 7{,}0 \cdot 10^4$ Pa. La risalita è abbastanza veloce da rendere trascurabili gli scambi di calore con l'aria circostante.

a. Calcola il volume finale V della bolla.

b. Calcola il lavoro compiuto dalla bolla d'aria durante la risalita.

c. Spiega perché in montagna la temperatura è in media inferiore a quella sul livello del mare.

d. In realtà l'aria contiene una percentuale di vapore acqueo che poi si condensa e dà luogo alle goccioline delle nubi. Avrai probabilmente osservato che normalmente le nubi si formano in quota: spiega perché.

e. Quando il vapore acqueo si condensa, rilascia calore latente. Utilizza il primo principio della termodinamica per spiegare questo fatto: ogni 100 m di quota, la temperatura dell'aria secca diminuisce di circa 1 °C, mentre quella dell'aria umida diminuisce di soli 0,6 °C.

f. Considera un volume V di aria umida, alla temperatura T, contenente n_a moli di aria secca e n_v moli di vapore acqueo. Assumi l'aria secca e il vapore acqueo come gas perfetti. Dimostra la seguente formula:

$$\frac{p_v}{p_t} = 1 - \frac{n_a}{n_t}$$

dove p_v, p_t sono rispettivamente la pressione parziale del vapore e la pressione dell'aria umida nel volume V, mentre $n_t = n_a + n_v$.

Costanti: $\gamma = 7/5$; $R = 8{,}31$ J/(K · mol).

[1,3 m^3; 12 kJ]

110 L'entropia ad ogni ciclo aumenta, diminuisce o resta invariata per (a) una macchina di Carnot, (b) un motore reale e (c) un motore perfetto (che ovviamente è impossibile da realizzare)?

111 Un frigorifero lavora mantenendo una temperatura interna di 5,0 °C mentre l'ambiente esterno si trova a 28 °C. Per raffreddare un pollo da 750 g, inizialmente a temperatura ambiente, consuma 9000 J di energia. Supponi che il calore specifico del pollo sia 2700 J/(kg K).

a. Calcola quanto vale il coefficiente di prestazione del frigorifero.

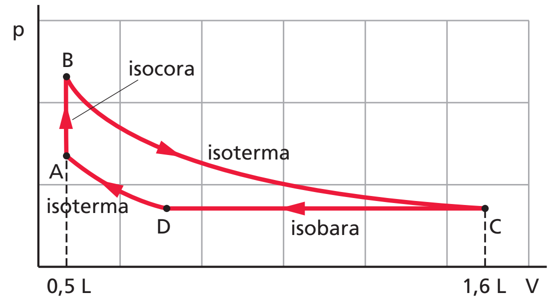
b. Si tratta di una macchina frigorifera reversibile?

c. Calcola la variazione di entropia dell'ambiente di questo processo.

d. Che segno ha la variazione di entropia del pollo? La variazione di entropia del pollo, in valore assoluto, è maggiore o minore di quella dell'ambiente?

[10,35; no; 2,15 J/K]

112 Il ciclo termico rappresentato in figura è costituito da quattro trasformazioni. Questo ciclo è effettuato da una macchina termica che contiene 0,150 mol di gas biatomico ($C_V = 5/2$ R). Nello stato iniziale, cioè nel punto A, il volume è $V_A = 0{,}500$ L e la temperatura è quella ambiente, $T_a = 293$ K. Dopo il riscaldamento a volume costante la temperatura è salita al valore $T_B = 620$ K. L'espansione isoterma porta il volume a 1,60 L mantenendo costante la temperatura. La compressione a pressione costante riporta il gas alla temperatura iniziale. La seconda isoterma è una compressione che ripristina il valore iniziale di pressione.



- Determina i valori di pressione, volume e temperatura nei punti A, B, C e D del ciclo.
- Calcola il lavoro, il calore e la variazione di energia interna per le quattro trasformazioni del ciclo.
- Quanto vale il rendimento del ciclo?

[Risposta:

	T (K)	p (Pa)	V (L)
A	293	$7{,}30 \cdot 10^5$	0,50
B	620	$1{,}54 \cdot 10^6$	0,50
C	620	$4{,}81 \cdot 10^5$	1,60
D	293	$4{,}81 \cdot 10^5$	0,76

	ΔU (J)	L (J)	Q (J)
Isocora $A \to B$	$1{,}02 \cdot 10^3$	0	$1{,}02 \cdot 10^3$
Isoterma $B \to C$	0	899	899
Isobara $C \to D$	$-1{,}02 \cdot 10^3$	-405	$-1{,}43 \cdot 10^3$
Isoterma $D \to A$	0	-152	-152

$\eta = 18\%$]

113 (a) Una macchina termica ideale lavora tra una sorgente calda a 320 K e una sorgente fredda a 260 K. Se a ogni ciclo essa assorbe 500 J di calore dalla sorgente calda, quanto lavoro viene liberato per ogni ciclo? (b) Se la stessa macchina termica lavorasse in senso opposto, funzionando come un frigorifero tra le stesse due sorgenti, quanto lavoro si dovrebbe fornire a ogni ciclo per estrarre 1000 J di calore dal serbatoio freddo?

[93,8 J; 231 J]

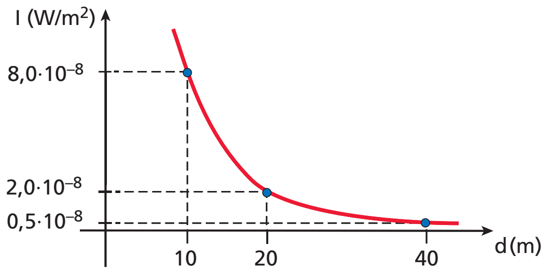
Onde sonore e luminose

114 Una delle armoniche su una corda lunga 1,30 m ha una frequenza di 15,6 Hz. La successiva armonica superiore ha una frequenza di 23,4 Hz. Trova:

- la frequenza fondamentale.
- la velocità di propagazione delle onde su questa corda.

[7,8 Hz; 20 m/s]

115 Il seguente grafico rappresenta l'intensità di un suono in funzione della distanza dalla sorgente.



► Qual è la potenza del suono emesso?

► Disegna il grafico del livello di intensità sonora (in dB) in funzione della distanza.

[$1{,}0 \cdot 10^{-4}$ W]

116 **ONDE ARMONICHE** **FUNZIONI ELEMENTARI** L'onda $y(x, t)$ si propaga lungo l'asse x e ha la seguente espressione:

$$y(x, t) = 8M \sin^2(2ax + 6bt) - 4M$$

dove M, a, b sono positivi.

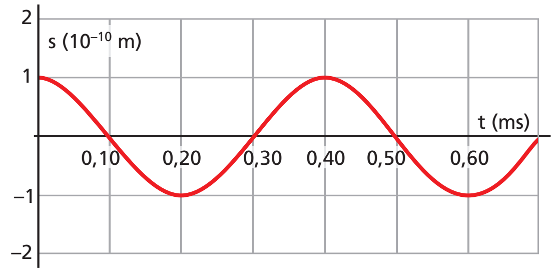
a. Dimostra che l'onda trovata è sinusoidale regressiva e determina la sua ampiezza massima A, il numero d'onda k e la frequenza angolare o pulsazione ω.

[$4M$, $4a$, $12b$]

117 Una corda di chitarra è tesa con una forza $F_0 = 60{,}0$ N. Quando viene pizzicata al centro, produce un suono che dà battimenti, a una frequenza di 2,5 Hz, con il suono prodotto da una corda di riferimento, intonata sulla nota *la* a 440,0 Hz.

► Di quanto dobbiamo cambiare la tensione della prima corda per accordarla con la seconda?

118 **ONDE ARMONICHE** **FUNZIONI ELEMENTARI** Un'onda sonora armonica si propaga lungo una rotaia di acciaio ($v_s = 5{,}1$ km/s e $\rho = 7{,}96 \cdot 10^3$ kg/m³). Il grafico rappresenta la legge oraria di un punto ρ della rotaia investito dall'onda.



► Determina frequenza e lunghezza d'onda dell'onda sonora.

► Calcola la massima variazione di pressione dell'onda sonora. [2,5 kH; 2,0 m; 64 Pa]

119 Una sottilissima lamina di quarzo ($n = 1{,}46$) è attraversata perpendicolarmente da luce rossa la cui lunghezza d'onda nel vuoto è 644 nm. All'uscita della lamina la luce rossa è sfasata di mezza lunghezza d'onda rispetto a un'onda che compie lo stesso cammino nel vuoto.

► Qual è il minimo spessore d della lamina?

[700 nm]

120 Le canne più corte usate in un organo sono lunghe circa 7,5 cm.

► Qual è la frequenza fondamentale di una canna di questa lunghezza aperta a entrambe le estremità?

► Qual è la più alta armonica compresa nel campo di udibilità per una tale canna?

[2,3 kHz; 18 kHz]

121 Un cavo lungo 1,50 m ha una massa di 8,70 g ed è sottoposto a una tensione di 120 N. Il cavo è teso rigidamente a entrambe le estremità e viene fatto vibrare. Calcolare (a) la velocità delle onde sul cavo, le lunghezze d'onda delle onde che producono onde stazionarie sulla corda con (b) uno e (c) due occhielli, e le frequenze delle onde che producono onde stazionarie con (d) uno e (e) due occhielli.

[144 m/s; 3,00 m; 1,50 m; 48,0 Hz; 96,0 Hz]

L'interferenza di onde

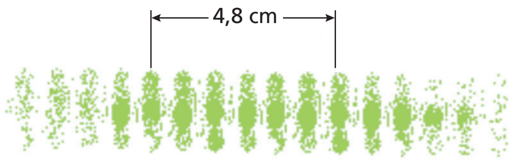
122 Due altoparlanti si trovano contro una parete a una distanza di 4,0 m l'uno dall'altro. Ti trovi davanti a uno di essi a una distanza di 3,0 m. Gli altoparlanti emettono un suono armonico di cui puoi regolare la frequenza. La frequenza iniziale è 400 Hz.

- Aumentando la frequenza, qual è la prima frequenza per la quale si verifica interferenza costruttiva nella tua posizione?

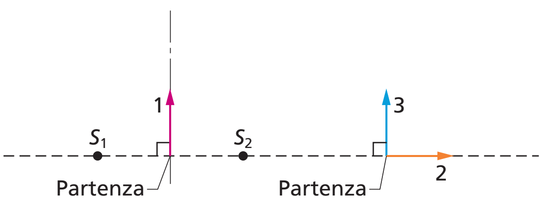
[510 Hz]

123 Un fascio di luce monocromatica verde di lunghezza $\lambda = 546$ nm passa attraverso due fenditure e forma, su un muro a distanza $L = 5{,}0$ m, la figura di interferenza mostrata nell'immagine.

- Calcola la distanza d tra le due fenditure.



124 La figura sotto presenta due sorgenti S_1 ed S_2 che emettono isotropicamente radioonde di lunghezza d'onda λ. Le sorgenti sono perfettamente in fase e distanti tra loro $1{,}5\lambda$. Nel disegno è tracciata la linea mediana tra le sorgenti. (a) Cominciando con l'osservazione dal punto di partenza e proseguendo lungo il cammino 1, l'interferenza osservata è sempre un massimo lungo tutto il percorso, oppure è sempre un minimo, oppure ancora un'alternanza di massimi e minimi? (b) Si ripeta l'osservazione e la risposta sul percorso 2. (c) Idem per il percorso 3.



125 Due flauti identici, schematizzabili come due tubi aperti di lunghezza 40 cm, suonano la stessa nota corrispondente alla loro prima armonica. Uno dei due, però, è soffiato in prossimità di un termosifone, mentre l'altro è vicino a una finestra da cui passa uno spiffero freddo, così che uno suona aria a una temperatura di 20 °C, nella quale il suono si propaga a 343 m/s, mentre l'altro a 25 °C. Vogliamo capire se gli spettatori, equidistanti dai due flauti, si accorgono della differente frequenza dei due suoni con i battimenti.

- A che frequenza avvengono i battimenti?
- Quanto dovrebbe durare la nota affinché sicuramente si possa udire che c'è un momento in cui i due flauti interferiscono l'uno con l'altro fino a cancellarsi a vicenda? (*Suggerimento*: calcola il rapporto tra le velocità del suono alle due temperature per determinare quella a 25 °C.)

[4 Hz; 0,13 s]

126 Considera un DVD (spaziatura tra le tracce 0,74 μm) su cui incide perpendicolarmente un fascio di luce bianca.

- Qual è la massima lunghezza d'onda relativa ai massimi principali del secondo ordine? È visibile?
- Effettua lo stesso calcolo per i massimi principali del quarto ordine di un CD (spaziatura tra le tracce 1,6 μm).
- Spiega perché un massimo del quarto ordine è visibile nonostante in un CD siano osservabili solamente 2 iridi complete (per incidenza normale della luce).

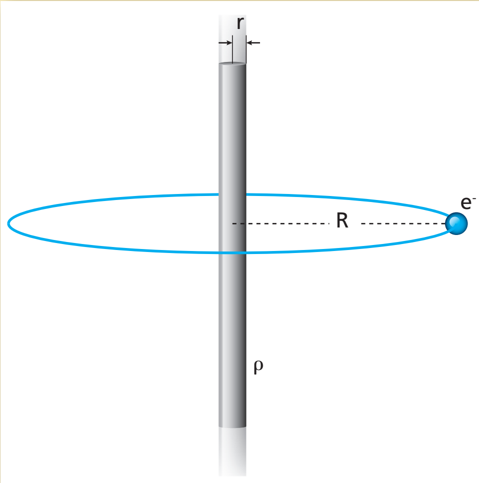
[370 nm; 400 nm]

Cariche elettriche e campi elettrici

127 **ESERCIZIO SVOLTO** In una certa regione dello spazio si trova un cilindro carico di lunghezza infinita, di raggio pari a $r = 1{,}00$ cm e di densità di volume $\rho = 1{,}00 \cdot 10^{-7}$ C/m^3. All'esterno del cilindro, si muove un elettrone su un'orbita circolare, con asse coincidente a quello del cilindro, di raggio $R = 50{,}0$ cm.

a. Dopo aver determinato il campo elettrico $|\vec{E}|$ agente su tale particella, trova la sua velocità v.

b. Tale velocità dipende dal raggio dell'orbita dell'elettrone?



Per determinare il campo elettrico è sufficiente considerare un cilindro di altezza L coassiale al cilindro carico di raggio R e applicare il teorema di Gauss unito alle usuali considerazioni di simmetria, e al fatto che il flusso di campo elettrico attraverso le due basi del cilindro è nullo. Si ottiene:

$$ES = \frac{\rho V}{\varepsilon_0}$$

dove $S = 2\pi RL$, $V = \pi r^2$. Dunque, si ha:

$$E = \rho \frac{r^2}{2\varepsilon_0 R} = 1{,}13 \text{ N/C}$$

Inoltre, per le stesse ragioni di simmetria, il campo agente sull'elettrone è radiale verso l'esterno.
Per determinare la velocità dell'elettrone, è sufficiente osservare che la forza elettrostatica agente su di esso determina la forza centripeta; dunque, si ha:

$$eE = \frac{mv^2}{R}$$

da cui si ha:

$$v = \sqrt{\frac{eER}{m}} = r\sqrt{\frac{\rho e}{2m\varepsilon_0}} = 3{,}15 \cdot 10^5 \text{ m/s}$$

Dall'espressione della velocità risulta che essa non dipende dalla distanza a cui si trova l'elettrone rispetto all'asse del cilindro.

128 Un *dipolo elettrico* è un sistema formato da due cariche puntiformi uguali e opposte Q e $-Q$, separate da una distanza d. Considera come asse x la retta che passa per le due cariche e come verso positivo sulla retta quello che va dalla carica negativa a quella positiva. Le cariche sono poste nel vuoto.
Indica con A il punto occupato dalla carica negativa e con B quello in cui si trova la carica positiva. Considera poi una terza carica puntiforme positiva q, che può essere posta in qualunque punto P dello spazio, diverso da A e da B.

a. Mostra che, quando P si trova sull'asse x all'esterno del segmento AB, la forza su q ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'asse x. Mostra anche che, per i punti P compresi tra A e B, la forza sulla carica positiva q è rivolta verso A.

b. Calcola il modulo della forza su q quando questa è posta nel punto medio tra A e B.

c. Trova il modulo della forza su q quando essa si trova in un punto C dell'asse x, che dista d da A e $2d$ da B.

d. Determina il modulo, la direzione e il verso della forza su q quando essa si trova in un punto D che forma, con le posizioni delle cariche del dipolo, un triangolo equilatero ABD.

$$\left[8\,k_0\,\frac{qQ}{d^2};\,3\,k_0\,\frac{qQ}{4d^2};\,k_0\,\frac{qQ}{d^2}\right]$$

129 Nello spazio vuoto sono dati un piano infinito e omogeneo di carica positiva con densità di carica σ e una distribuzione sferica omogenea di carica negativa di raggio R, carica complessiva Q e centro C. La distanza tra C e il piano di carica è uguale a $2R$.
Indichiamo con a una semiretta che passa per C, che è perpendicolare al piano di carica e ha l'origine sul piano stesso.

a. Determina qual è la parte di a, interna alla sfera di carica, in cui è possibile che il campo elettrico complessivo sia nullo.

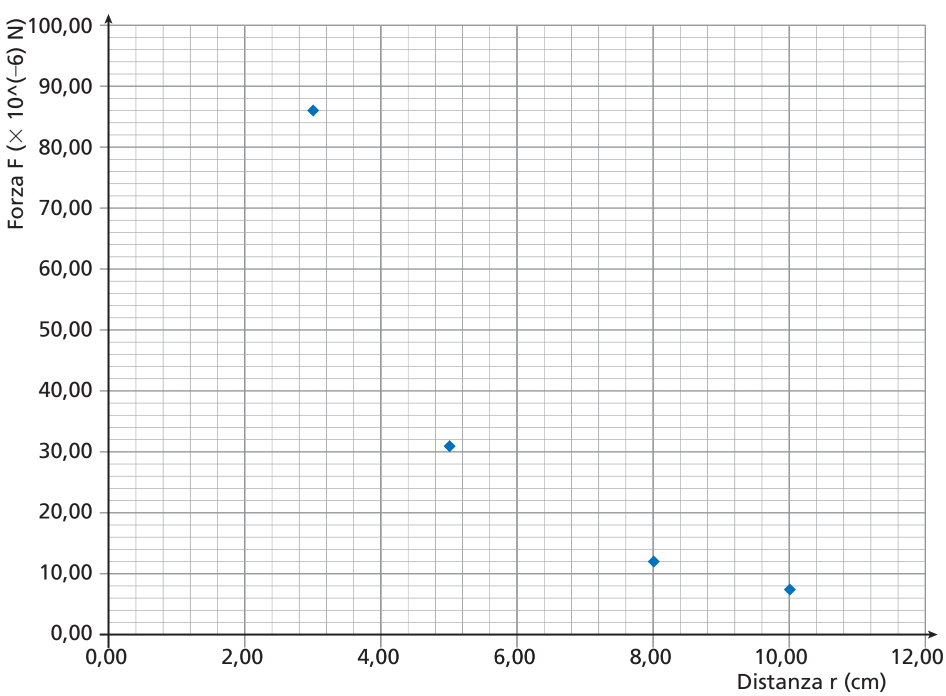
b. Stabilisci qual è il valore di Q per il quale il campo elettrico si annulla, nella zona individuata in precedenza, a distanza $R/2$ da C.

c. Trova la posizione dell'altro punto P di a in cui, con il valore di Q appena calcolato, il campo elettrico complessivo è nullo.

d. Dimostra che non esiste nessun altro punto dello spazio, oltre ai due già individuati, in cui il campo elettrico complessivo possa essere nullo.

$$[Q=-4\pi\sigma R^2;\,\overline{CP}=\sqrt{2}\,R]$$

130 Sono date tre sferette A, B e C conduttrici identiche, tutte dotate di supporti isolanti.
All'inizio la sfera A è elettrizzata con una carica positiva Q, mentre le sfere B e C sono scariche. Poi B è messa a contatto con A, C è posta in contatto con B e infine C è messa in contatto ancora con A.
La figura seguente mostra i risultati di un esperimento in cui si è misurata la forza di repulsione tra le sfere A e B nella loro condizione finale e poste in aria. La distanza r è quella tra i centri delle sferette.



a. Individua la legge sperimentale che si può dedurre dall'analisi dei dati.

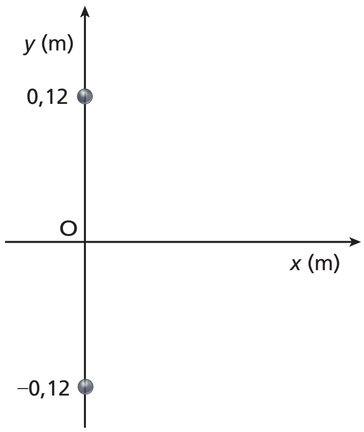
b. Sulla base del risultato precedente, calcola la forza che si sarebbe dovuta misurare tra le sferette se la misura fosse stata effettuata anche con $r = 6{,}0$ cm.

c. Individua quanto valgono, in funzione di Q, le tre cariche che si trovano sulle diverse sferette prima che inizi l'esperimento.

d. Determina i valori della carica Q posta all'inizio sulla sferetta A e quelli delle due cariche Q_A e Q_B utilizzate per l'esperimento.

[$F = (7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m^2})/r^2$; $2{,}2 \cdot 10^{-5}$ N; $3Q/8$, $Q/4$; $3Q/8$; 9,6 nC, 3,6 nC, 2,4 nC]

131 Una sfera con centro fisso nel punto $A = (0\ \mathrm{m}; 0{,}12\ \mathrm{m})$ e raggio $R = 1{,}0$ cm ha una carica $Q = +2{,}8$ nC distribuita in modo uniforme nel suo volume. Una carica puntiforme $q = +2{,}8$ nC è fissa nel punto $B = (0{,}0\ \mathrm{m}; -0{,}12\ \mathrm{m})$. Supponi che la carica q non alteri la distribuzione di carica elettrica sul guscio.

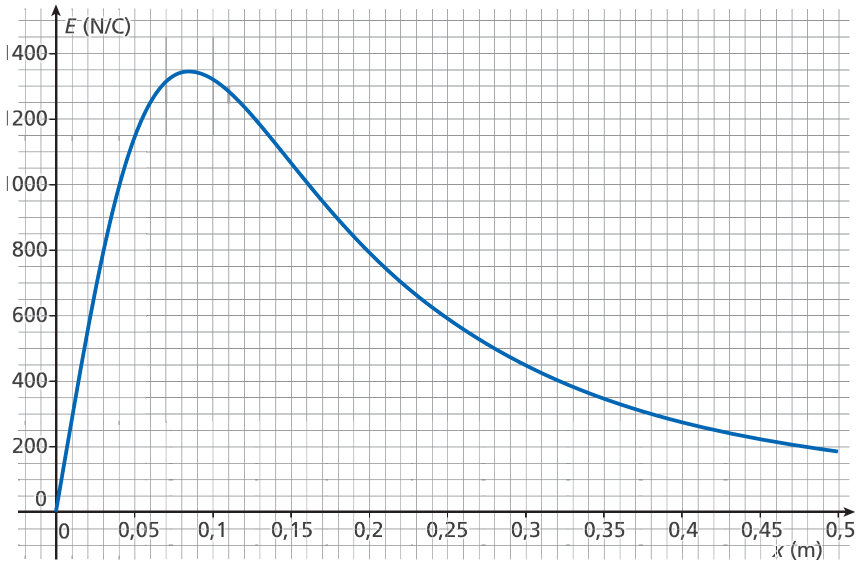


a. Spiega perché nell'origine degli assi O è nullo il campo elettrico totale generato dalla sfera e dalla carica.

b. Dimostra che nei punti dell'asse x il modulo E_t del campo elettrico è

$$E_t = (50{,}4\ \mathrm{N \cdot m^2/C})\frac{x}{[(0{,}12\ \mathrm{m})^2 + x]^{3/2}}$$

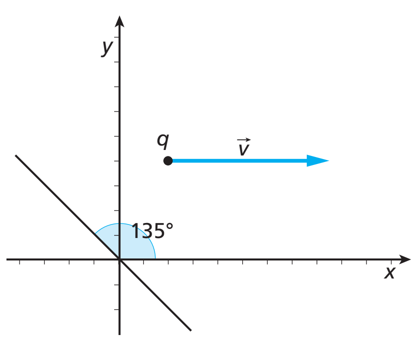
c. Il grafico mostra i valori del modulo E_t del campo elettrico totale nei punti dell'asse x da $x = 0$ m a $x = 0{,}50$ m. Stabilisci direzione e verso del campo elettrico nei punti dell'asse x.



d. Descrivi il moto di una particella avente carica $q_2 = 1{,}3$ nC lasciata libera nel punto $D = (0{,}001\ \mathrm{m}; 0{,}0\ \mathrm{m})$. Supponi che la particella carica abbia una massa $m = 2{,}4$ g. Calcola il valore massimo dell'accelerazione che subisce nei primi 50 cm del suo moto.

[$7{,}3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}$]

132 La figura mostra un piano infinito di carica inclinato di 45° rispetto alla verticale e disposto in modo da formare un angolo di 135° con la direzione positiva dell'asse delle ascisse, che è orizzontale.
Una pallina di massa $m = 2{,}5$ g e carica $q = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$ C si trova nel vuoto ed è lasciata partire da ferma da un punto A che si trova nel primo quadrante del sistema di riferimento indicato.



a. Stabilisci di quale segno deve essere la carica presente sul piano infinito, per fare in modo che la pallina acquisti una velocità orizzontale come quella indicata nella figura.

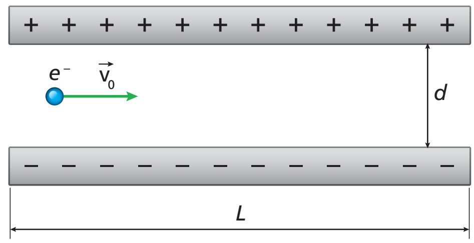
b. Stabilisci, nella maniera più rapida, qual è il valore dell'accelerazione con cui la pallina si muove quando procede in orizzontale. Quanto valgono la velocità della pallina e la distanza percorsa rispetto al punto A dopo 0,40 s dal momento in cui la pallina è stata libera di muoversi?

c. Descrivi un esperimento ideale, effettuato con oggetti che si trovano normalmente in casa, in cui si fornisce a una pallina da ping-pong lo stesso moto descritto nella figura precedente mediante una forza analoga a quella dovuta al piano di carica.

d. Calcola quanto deve valere la densità superficiale di carica elettrica del piano infinito per fare sì che il moto della pallina sia orizzontale. [g, 3,9 m/s, 78 cm; $8{,}5 \cdot 10^{-6}$ C/m^2]

Il potenziale elettrico

133 Un elettrone con la velocità di modulo $v_0 = 6{,}00 \cdot 10^6$ m/s viene sparato fra le piastre di un condensatore con le seguenti caratteristiche geometriche: $d = 8{,}10 \cdot 10^{-1}$ cm, $L = 3{,}20$ cm. Inoltre, il condensatore presenta una differenza di potenziale di 300 V.



a. Stabilisci se l'elettrone è deviato verso l'alto o verso il basso.

b. Determina poi il tempo di uscita e il modulo della velocità di uscita di tale particella. (Dato il rapidissimo tempo di transito in relazione alla lunghezza del condensatore, trascura la caduta di questa particella nel campo gravitazionale. Inoltre, per semplicità, svolgi i calcoli nell'ambito della meccanica classica.) [$5{,}33 \cdot 10^{-9}$ s; $6{,}43 \cdot 10^6$ m/s]

134 Dato un sistema di due cariche $q_1 = 3{,}0 \cdot 10^{-9}$ C e $q_2 = 7{,}0 \cdot 10^{-9}$ C poste nel vuoto, supponiamo che la prima si trovi nel punto (−1,0; 2,0) mentre la seconda sia posizionata in (2,0; −1,0), dove le coordinate dei punti sono espresse in cm.

a. Determina la distanza da q_1 degli eventuali punti sulla retta congiungente le due cariche in cui il campo elettrico vale 0,0 N/C.

b. Calcola il lavoro che occorre compiere su di una carica di prova di $1{,}0 \cdot 10^{-11}$ C per spostarla da (0,0; 0,0) in (1,0; 1,0). [$r = 1{,}7$ cm; 0,0 J]

135 Nello spazio vuoto considera un piano infinito di carica, con densità superficiale $\sigma = -5{,}31 \cdot 10^{-5}$ C/m^2 e posto in verticale, e una pallina di massa $m = 5{,}46$ g e carica $q = 8{,}92$ nC.
Nella risoluzione del problema utilizza un sistema di riferimento cartesiano con l'asse x orizzontale, in direzione perpendicolare al piano di carica, e l'asse y verticale.
Scegli come origine del sistema di riferimento il punto da cui parte la pallina e come verso negativo delle ascisse quello in cui punta la forza elettrostatica che agisce su q.

a. Individua, in direzione, verso e modulo, l'accelerazione $\vec{a}_1$ impressa alla pallina dalla sola forza elettrostatica e, quindi, l'accelerazione complessiva $\vec{a}$ della pallina calcolata tenendo anche conto della forza-peso.

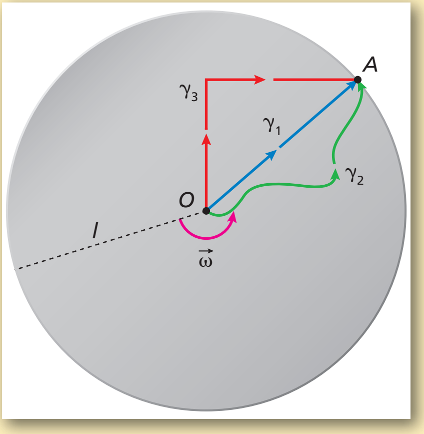
b. Poni uguale a zero l'energia potenziale elettrostatica della pallina quando essa si trova nell'origine; in base a ciò, scrivi l'energia potenziale del sistema piano-pallina quando questa si trova in un punto di ascissa x, con $x > 0$.

c. La pallina è lanciata con una velocità iniziale $\vec{v}_0$ parallela al vettore $-\vec{a}$ e di modulo $v_0 = 5{,}81$ m/s. Determina la forma della traiettoria percorsa dalla pallina a partire dall'istante in cui viene lanciata e, utilizzando il principio di conservazione dell'energia, determina le coordinate del punto P in cui essa raggiunge la massima distanza dall'origine (prima di invertire il verso del moto).

d. Calcola la distanza tra l'origine e il punto P. Poi verifica che questa è effettivamente la distanza percorsa da un punto materiale con velocità iniziale v_0 e soggetto a un'accelerazione di modulo a e diretta in senso opposto a $\vec{v}_0$.

[4,90 m/s^2; 11 m/s^2; $q|\sigma|x/(2\varepsilon_0)$; (0,69 m; 1,38 m); 1,54 m]

136 **ESERCIZIO SVOLTO** Samuele vuole provare a costruire un generatore, semplicemente mettendo in rotazione un disco metallico di raggio attorno al suo asse perpendicolare, passante per il centro, con velocità angolare ω. Grazie a questo movimento di rotazione, gli elettroni di conduzione si mettono in movimento. Assumi che, dopo un intervallo di tempo molto breve, il moto degli elettroni rispetto al disco cessi.



a. Qual è la condizione di equilibrio?

b. Determina l'espressione del campo elettrostatico in funzione della distanza dal centro del disco, della velocità angolare e, infine, determina il grafico relativo.

c. Scegliendo fra le curve rappresentate in figura, quella più conveniente per i calcoli, determina la differenza di potenziale fra il centro del disco e un punto del bordo. Il calcolo dipende dalla curva scelta? Motiva.

d. Calcola la forza elettromotrice del disco assumendo che il suo raggio sia di 25,0 cm mentre la velocità angolare di rotazione valga 100 rad/s. Perché questo dispositivo non può avere un'importanza di carattere pratico?

---

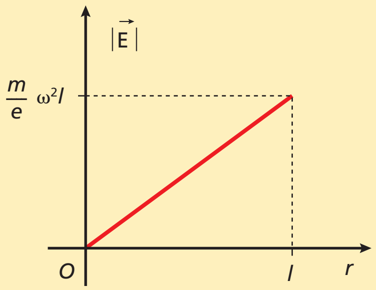
a. Quando si raggiunge la condizione di equilibrio, l'elettrone di conduzione si muove di moto circolare uniforme, di conseguenza il campo elettrostatico $\vec{E}$ agisce su di esso in modo che $\vec{F_e} = -e\vec{E}$ sia pari alla forza centripeta. Dunque, in tali condizioni, si ha:

$$eE = m\frac{v^2}{r}, \quad 0 \leq r \leq l$$

b. Dalla relazione precedente, si ottiene:

$$E = \frac{m}{e}\omega^2 r$$

E quindi il grafico del campo elettrico in funzione del raggio è dato da:



c. Essendo il campo elettrostatico conservativo, possiamo calcolare la differenza di potenziale fra il centro del disco e il suo bordo scegliendo una curva qualsiasi. Analizzando l'espressione del campo elettrostatico, conviene scegliere la curva γ_1. Dunque, la differenza di potenziale è data da:

$$\Delta V = \int_0^l \frac{m}{e}\omega^2 r dr = \frac{1}{2}\frac{m}{e}\omega^2 l^2$$

d. Applicando la formula precedente si ottiene la forza elettromotrice richiesta:

$$\Delta V = 1{,}78 \cdot 10^{-9}\ \text{V}$$

È evidente che il valore ottenuto della forza elettromotrice è trascurabile da un punto di vista macroscopico.

137 Durante una lezione di Scienze hai sentito che, secondo il modello atomico più semplice, un atomo di idrogeno si può schematizzare come un protone (il nucleo, di massa $M = 1{,}673 \cdot 10^{-27}$ kg e carica $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C) attorno a cui orbita un elettrone (massa $m = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg, carica pari a $-e$) «come un pianeta attorno al Sole».
Trovi l'affermazione interessante e decidi di approfondire le proprietà del sistema descritto.

a. Indica con D la distanza tra le due particelle e trova, in funzione di D, la posizione del centro di massa del sistema elettrone-protone (poni l'origine del sistema di riferimento sul protone); in base a ciò, discuti se è giustificato affermare che è l'elettrone a muoversi attorno al protone, che invece si può considerare fermo.

b. Determina quale deve essere, in funzione di D, il modulo v della velocità dell'elettrone in modo che questo compia un moto circolare attorno al protone.

c. Sulla base del risultato precedente calcola l'energia totale ε dell'atomo di idrogeno, considerato come sistema elettrone-protone. Per l'energia potenziale adotta la solita convenzione sulla condizione di energia potenziale uguale a zero.

d. Sul libro di Scienze c'è scritto che, nello stato fondamentale (in cui l'elettrone e il protone si trovano alla minima distanza possibile) l'energia totale del sistema vale $\varepsilon = -2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J. Determina il valore di tale distanza minima, che è chiamata «raggio di Bohr».

[$x_{cm} = D/1838$; $v = e\sqrt{k_0/(mD)}$; $-k_0e^2/(2D)$; $5{,}28 \cdot 10^{-11}$ m]

La corrente elettrica e il campo magnetico

138 RAPPRESENTAZIONI DI GRANDEZZE FISICHE FUNZIONI Un condensatore di capacità C è caricato mediante un generatore di tensione continua con forza elettromotrice f_{em} attraverso un resistore con resistenza $R = 5{,}00$ kΩ. All'istante $t_1 = 0{,}50$ s dopo la chiusura del circuito, nella resistenza fluisce una corrente di intensità $i_1 = 20{,}3$ mA; all'istante $t_2 = 2{,}00$ s il valore della corrente è $i_2 = 12{,}3$ mA.

a. Determina il valore della capacità C.

b. Trova la costante di tempo $\tau = RC$ del circuito e il valore della forza elettromotrice f_{em}.

c. Calcola l'intensità di corrente iniziale i_0 del processo di carica e l'istante t_3 di tempo in corrispondenza del quale l'intensità di corrente si riduce alla metà di i_0.

d. Trova il valore della carica elettrica finale Q presente sull'armatura positiva del condensatore e l'energia immagazzinata in esso in tale situazione.

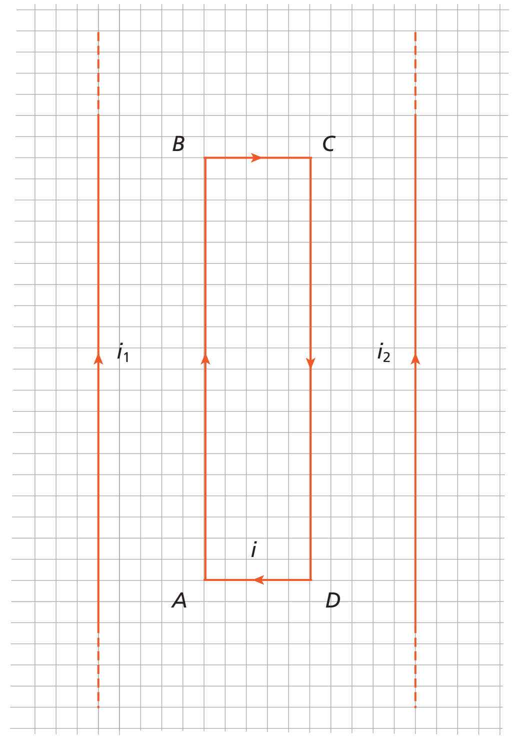
[0,599 mF; 3,00 s, 120 V; 24,0 mA, 2,08 s; 71,9 mC, 4,32 J]

139 Un filo rettilineo di lunghezza praticamente infinita è situato sull'asse delle z ed è percorso da una corrente di 70,0 A (concorde con il verso dell'asse z). Inoltre, nella medesima regione di spazio in cui si trova il conduttore, agisce un campo magnetico di $2{,}50 \cdot 10^{-4}$ T orientato come l'asse z. Un elettrone si trova a passare in quella regione con una velocità di $1{,}00 \cdot 10^{5}$ m/s, orientata come l'asse x, e posizione P (0,100 m, 0,00 m, 0,00 m). Il sistema di riferimento è stato scelto in modo che anche il campo magnetico terrestre, nel punto A, sia parallelo all'asse x.

a. Fornisci l'espressione vettoriale della forza agente sull'elettrone (trascura la forza peso di tale particella).

[$(1{,}92 \cdot 10^{-14}\ \text{N})\,\widehat{y} - (1{,}71 \cdot 10^{-21}\ \text{N})\,\widehat{z}$]

140 Due lunghi fili rettilinei e paralleli trasportano correnti rispettivamente di intensità $i_1 = 31{,}2$ A e $i_2 = 24{,}6$ A, che scorrono nello stesso verso. La distanza tra i fili è 15,0 cm. Nel piano che contiene i due fili è posta una spira conduttrice rettangolare rigida con due lati, lunghi 20 cm, posti parallelamente ai due fili rettilinei.
Nella spira è presente una corrente di intensità $i = 22{,}1$ A che, come mostra la figura, scorre in modo da avere lo stesso verso di i_1 nel lato AB della spira più vicino alla corrente i_1 stessa. La distanza tra il lato AB e il filo con la corrente i_1 è $d = 5{,}00$ cm.



a. Discuti quanto vale la forza totale che le correnti nei due fili rettilinei esercitano sui due lati della spira (BC e AD) perpendicolari ai fili stessi.

b. Determina direzione, verso e modulo del campo magnetico complessivo nei punti del lato AB e in quelli del lato CD.

c. Calcola in direzione, verso e modulo la forza magnetica totale che agisce sulla spira.

d. A un certo punto le correnti i_1 e i_2 vengono interrotte e nella zona della spira è introdotto un campo magnetico uniforme di modulo $B = 6{,}15$ mT inclinato di 51,5° rispetto al piano della spira. Calcola il modulo del momento della forza magnetica che tale campo esercita sulla spira.

[0 N; 75,6 μT, 36,0 μT; 0,493 mN; $1{,}06 \cdot 10^{-3}$ N · m]

141 **ESERCIZIO SVOLTO** È dato un lungo conduttore cilindrico, di raggio interno a e di raggio esterno b, percorso da una corrente I parallela all'asse del cilindro.

a. Determina l'espressione della densità di corrente J (pari all'intensità di corrente I, divisa per l'area trasversale del circuito).

b. Esprimi la corrente $i(r)$ che attraversa la corona circolare, del cilindro, di raggio interno a e di raggio esterno r con $a \leq r \leq b$ in relazione alla corrente I.

c. Applica la legge di Ampère per determinare il modulo del campo magnetico, prodotto dalla corrente, in relazione alla distanza r dall'asse del cilindro.

d. Calcola la resistenza per unità di lunghezza del cilindro, indicando con ρ la resistività di tale conduttore.

---

a. Calcolando l'area trasversale del conduttore come la differenza tra le aree di due circonferenze, si trova:

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

b. La corrente $i(r)$ è data da:

$$i(r) = J\pi(r^2 - a^2) = I\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

c. Se $r < a$, una circonferenza $\gamma(r)$ di centro nell'asse del cilindro con raggio r non concatena alcuna corrente, di conseguenza, dovendo essere il campo magnetico, in ogni punto di tale circonferenza, tangente alla circonferenza stessa e di modulo costante, si ha per la legge di Ampère:

$$B(r) \cdot 2\pi r = 0$$

da cui segue:

$$B(r) = 0 \text{ T}$$

Se $a \leq r \leq b$ allora $\gamma(r)$ concatena la corrente $i(r)$ di conseguenza, sfruttando la simmetria del problema, per la legge di Ampère, si ha:

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0\, i(r)$$

e quindi si ottiene:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}$$

Infine, se $r > b$ allora $\gamma(r)$ concatena la corrente I, dunque, per la legge di Ampère, si ha:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

d. Ricordiamo la formula della resistenza R in relazione ai parametri geometrici e fisici del conduttore:

$$R = \rho\frac{l}{S'}$$

da cui segue nel caso del cilindro in questione:

$$\frac{R}{l} = \frac{\rho}{\pi(b^2 - a^2)}$$

142 Un tuo compagno di classe chiede se, secondo te, è possibile fare in modo di eliminare il campo magnetico terrestre in una piccola zona di spazio, per esempio all'interno di un solenoide.
Per fare questo esperimento hai a disposizione, oltre a carta e penna, uno stretto cilindro di plastica trasparente, lungo 40 cm, del filo di rame con una resistenza elettrica trascurabile, una batteria da 12 V, una piccola bussola e un resistore da 100 Ω.
Su Internet hai trovato che, nella zona in cui abiti, il campo magnetico terrestre ha una componente orizzontale $B_o = 23\ \mu T$ e una componente verticale, rivolta verso il basso, $B_v = 42\ \mu T$.

a. Come puoi fare a disporre il solenoide con l'asse di simmetria parallelo al campo magnetico terrestre?

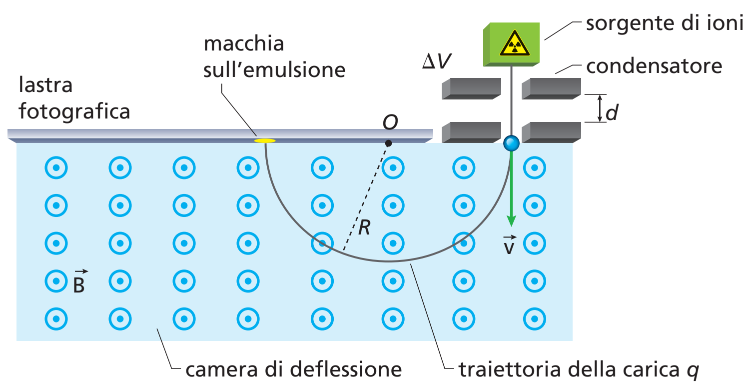
b. Calcola il modulo B_T del campo magnetico terrestre nella zona in cui ti trovi e il valore i dell'intensità di corrente che hai a disposizione per il tuo esperimento.

c. Determina il numero N di avvolgimenti che il solenoide deve avere per fare in modo che il suo campo magnetico compensi quello terrestre. Se guardi il cilindro lungo il suo asse di simmetria, dalla parte dell'estremità che si trova a Sud, per ottenere tale effetto la corrente deve scorrere in senso orario o in senso antiorario?

d. Il cilindro che sostiene il solenoide è trasparente, in modo da potere osservare ciò che avviene al suo interno. Quali esperimenti puoi fare con un ago di bussola in modo da verificare se sei riuscito a ottenere una zona di spazio con campo magnetico totale nullo?

[61° verso il basso; 48 μT, 0,12 A; 1,3 · 10^2]

143 Nel 1916 A. J. Dempster sviluppò il primo spettrometro di massa in grado di determinare il rapporto fra la carica q e la massa m di uno ione; inoltre, grazie a questo dispositivo e a sue varianti, è stato possibile scoprire gli isotopi di vari elementi.
Con riferimento alla figura, lo spettrometro di Dempster è costituito da una sorgente di ioni, da un condensatore che li accelera, da una camera di deflessione in cui



agisce un campo magnetico costante che curva la traiettoria degli ioni e da una lastra fotografica che registra una macchiolina quando uno ione urta su di essa.
Dopo questa breve introduzione sugli spettrometri di massa, risolvi i quattro quesiti proposti.

a. Con riferimento alla figura, in cui il campo magnetico $\vec{B}$ è perpendicolare rispetto al piano del foglio e ha verso uscente da esso, stabilisci il segno della carica q e il verso del campo elettrico $\vec{E}$ fra le armature. Trova inoltre l'espressione della velocità v dello ione in uscita dalle armature del condensatore in funzione della carica q, della sua massa m e della differenza di potenziale ΔV. Quale ipotesi conviene assumere sulla velocità di emissione dello ione dalla sorgente?

b. Durante un esperimento con lo spettrometro, uno ione di Litio, avente carica pari a quella di un protone ($q = 1{,}6021 \cdot 10^{-19}$ C) e massa uguale a $1{,}700 \cdot 10^{-26}$ kg, è accelerato da una differenza di potenziale pari a $7{,}0000 \cdot 10^2$ V e raggiunge la velocità di $1{,}3846 \cdot 10^5$ m/s. I valori precedentemente indicati sono compatibili con l'ipotesi fatta in **a** sulla velocità di emissione dello ione dalla sorgente? In caso contrario quanto vale la velocità di emissione dello ione?

c. Determina il rapporto q/m in funzione della differenza di potenziale ΔV, del campo magnetico $\vec{B}$ e del raggio r della traiettoria circolare percorsa dallo ione.

d. Considerando due ioni emessi consecutivamente, di uguale carica q e masse diverse m_1, m_2, dimostra la seguente formula $2\Delta r = \left|\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}} - 1\right| 2r_1$ che esprime la distanza di separazione tra le posizioni di impatto dei due ioni sulla lastra fotografica, essendo r_1 il raggio della traiettoria relativa al primo ione.

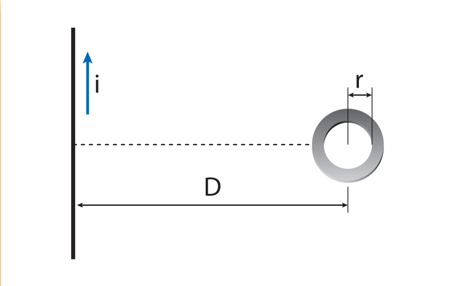
Infine, supponendo che la massa di un neutrone sia esattamente uguale a quella di un protone, come scrivi la formula precedente in relazione ai numeri di massa degli ioni $^{68}Zn^{2+}$ e $^{70}Zn^{2+}$? (Ricorda che il numero di massa che viene indicato in alto a sinistra dell'elemento è la somma fra il numero dei protoni e quello dei neutroni presenti nel nucleo dell'atomo)

$$\left[q > 0;\ \vec{E} \text{ è diretto verso il basso; } v^2 = \frac{2q\Delta V}{m}\text{; sì; } \frac{q}{m} = \frac{2\Delta V}{B^2 r^2}\text{; } 2\Delta r = \left|\sqrt{\frac{35}{34}} - 1\right| 2r_1\right]$$

Induzione elettromagnetica

144 ESERCIZIO SVOLTO INDUZIONE ELETTROMAGNETICA DERIVATE

Un lungo filo porta una corrente variabile $I = (5{,}00\ \text{A})\,e^{-(20{,}0\ \text{s}^{-1})t}$. A una distanza $D = 6{,}00$ m viene posto un anello conduttore di raggio $r = 2{,}00$ cm. Assumendo che ad ogni istante il campo che agisce sull'anello è costante ed è pari a quello presente nel suo centro, determina l'espressione della forza elettromotrice indotta e il suo valore all'istante $t = 1{,}00 \cdot 10^{-1}$ s.



Esprimendo il campo magnetico $\vec{B}$, nel centro dell'anello, attraverso la legge di Biot-Savart, possiamo determinare la legge temporale del flusso del campo magnetico attraverso tale conduttore:

$$\Phi(t) = B(t)\pi r^2 = \frac{\mu_0 I(t) r^2}{2D} = \frac{5{,}00\ A\mu_0 r^2}{2D} e^{-[20{,}0\ \text{s}^{-1}]t}$$

Di conseguenza, per la legge dell'induzione elettromagnetica si ha:

$$\varepsilon(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{50{,}0\ \text{s}^{-1} \cdot A\mu_0 r^2}{D} e^{-[20{,}0\ \text{s}^{-1}]t} = (4{,}19 \cdot 10^{-9}\ \text{V})e^{-[20{,}0\ \text{s}^{-1}]t}$$

Dunque, si ha:

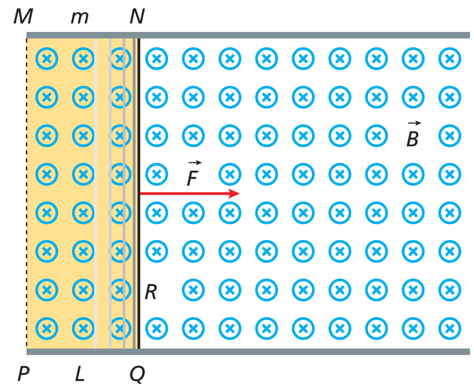
$$\varepsilon\,(1{,}00 \cdot 10^{-1}\ \text{s}) = 5{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{V}.$$

145 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **EQUAZIONI DIFFERENZIALI** Un filo conduttore di lunghezza L di massa m e di resistenza R, inizialmente fermo, scorrevole, senza attrito, lungo una guida conduttrice con resistenza trascurabile, è soggetto a una forza costante $\vec{F}$ ed è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$. Trascurando fenomeni di autoinduzione:

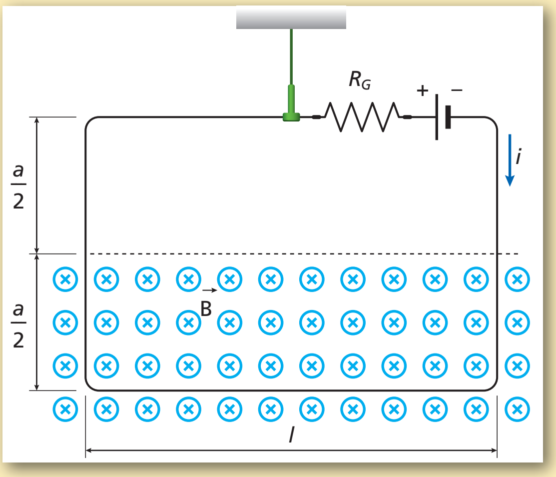
a. scrivi, per il filo conduttore, il secondo principio della dinamica in modo che la funzione incognita sia v (ricorda a tale proposito il legame fra l'accelerazione e la velocità);

b. trova i valori di X e Y in modo che $v(t) = X(1 - e^{-Yt})$ sia soluzione dell'equazione trovata.

$$\left[m\frac{dv}{dt} = F - \frac{B^2L^2}{R}v;\ X = \frac{FR}{B^2L^2};\ Y = \frac{B^2L^2}{mR}\right]$$



146 **ESERCIZIO SVOLTO** **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **DERIVATE** Un circuito rettangolare, di massa trascurabile, è alimentato da un generatore di forza elettromotrice continua f_{em} con resistenza interna R_G ed è immerso per una metà in un campo magnetico $\vec{B}$ ortogonale ad esso, mentre l'altra metà non è soggetta a campo magnetico.
Indichiamo con R_S la resistenza della spira e con la corrente circolante in essa. Il circuito è caratterizzato dai seguenti parametri geometrici: a = 11,0 cm, l = 25,2 cm ed è sostenuto in verticale da un filo inestensibile, di massa trascurabile, costituito da materiale isolante.
Trascura eventuali fenomeni di attrito e di autoinduzione.



a. Perché sul filo agisce una forza $\vec{F}$? Qual è la direzione e il verso di tale forza? Determina l'intensità i avendo a disposizione i seguenti dati numerici:

f_{em} = 3,15 V; B = 0,420 T; R_G = 0,05 Ω; F = 0,230 N

b. Dimostra che la resistenza R_S può essere determinata attraverso la seguente formula

$$R_S = \frac{f_{em}Bl}{F} - R_G$$

Utilizza i dati presenti in **a** per calcolare il valore numerico di R_S.

c. Supponiamo di sostituire il generatore con una resistenza R e di variare il campo magnetico secondo la seguente legge temporale $B(t) = B_0\, e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$. Spiega in modo esaustivo perché la corrente elettrica indotta nel circuito tende ad annullarsi quando $t \to +\infty$.

d. Con riferimento al circuito introdotto in **c**, assumiamo $R = R_G$ e per le resistenze R_G e R_S i valori numerici determinati precedentemente. Stabilisci l'intervallo temporale in cui la corrente passa da $2{,}00 \cdot 10^{-3}$ A a $1{,}00 \cdot 10^{-3}$ A, assumendo $B(t) = (0{,}420\ \text{T})\,e^{-[0{,}500\ \text{s}^{-1}]t}$.

---

a. Sul filo agisce una forza $\vec{F}$ poiché esso è percorso da corrente elettrica ed è immerso in un campo magnetico. Le forze che agiscono sui tratti verticali sono opposte e si compensano reciprocamente. Di conseguenza la forza $\vec{F}$ risultante è quella che agisce sul tratto orizzontale (in basso); dunque, ha modulo:

$$\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{i} \times \vec{B}l\right| = iBl$$

ed è diretta verticalmente verso il basso.

La corrente può essere così determinata:

$$i = \frac{F}{Bl} = 2,17\ \mathrm{A}$$

b. Osservando che le resistenze R_S, R_G sono in serie, si ha:

$$i = \frac{f_{em}}{R_G + R_S}$$

da cui si ha:

$$R_S = \frac{f_{em}}{i} - R_G$$

Sostituendo nella formula l'espressione della corrente ottenuta in **a** segue la formula:

$$R_S = \frac{f_{em} lB}{F} - R_G$$

Inserendo i valori numerici si ottiene:

$R_S = 1,40\ \Omega$.

c. Orientando il vettore superficie della spira concordemente al campo magnetico, determiniamo la legge temporale del flusso:

$$\Phi(t) = B(t)S = B_0 S\, e^{-\alpha t},$$

dove $S = la/2$. La legge dell'induzione elettromagnetica fornisce la seguente forza elettromotrice indotta:

$$f_{ind} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha B_0 S e^{-\alpha t}$$

da cui segue:

$$i = \frac{f_{ind}}{R_G + R_S} = \frac{\alpha B_0 S}{R + R_S} e^{-\alpha t} \to 0\ (\text{se } t \to +\infty)$$

Dalla formula della corrente ottenuta in **c**, deduciamo:

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{\alpha B_0 a l}{2 i_2 (R_G + R_S)}\right)$$

da cui si trova

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\alpha}\left[\ln\left(\frac{\alpha B_0 a l}{2 i_2 (R_G + R_S)}\right) - \ln\left(\frac{\alpha B_0 a l}{2 i_1 (R_G + R_S)}\right)\right] = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{\alpha} \ln 2,00 = 1,39\ \mathrm{s}$$

147 INDUZIONE ELETTROMAGNETICA DERIVATE In una regione di spazio viene registrato un campo magnetico uniforme nello spazio e variabile nel tempo secondo la legge temporale $B(t) = B_{max} \sin(\omega t)$. Sempre in tale regione si trova un solenoide costituito da N spire circolari, di rame, con asse parallelo al campo magnetico. Siano d e d' rispettivamente il diametro di ciascuna spira e il diametro del filo di cui è costituita la generica spira. Sono noti i seguenti dati:

$N = 5000$, $B_{\max} = 2,000 \cdot 10^{-2}$ T, $\omega = 500,0$ rad/s, $d = 5,000$ cm, $d' = 1,000 \cdot 10^{-3}$ m

a. Calcola la resistenza del solenoide.

b. Come varia il flusso del campo magnetico $\vec{B}(t)$ nel tempo?

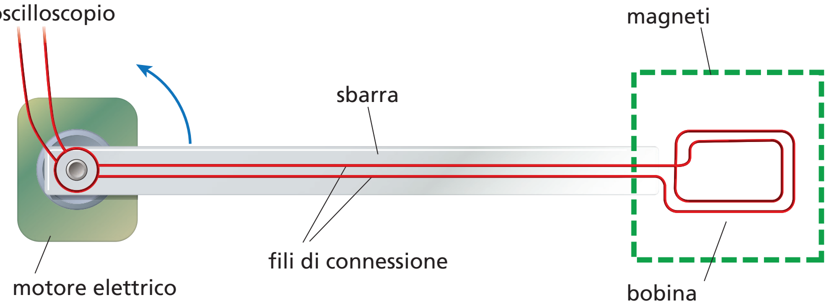
c. Determina l'espressione della corrente indotta nel solenoide.

d. Calcola il valore della corrente nel secondo istante in cui il campo magnetico si annulla.

(Assumi per la resistività ρ del rame il seguente valore $0,0168\ \Omega \cdot \mathrm{mm^2/m}$).

$$\left[16,80\ \Omega;\ \frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{500\ V}{16}\pi \cos(500,0\ \mathrm{rad/s} \cdot t);\ -(5,844\ \mathrm{A})\cos(500,0\ \mathrm{rad/s} \cdot t);\ 5,844\ \mathrm{A}\right]$$

148 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **DERIVATE** Il tecnico di laboratorio della tua scuola ti chiede di valutare la fattibilità di un progetto per costruire un magnetometro che sfrutta la legge di Faraday-Neumann. La scuola ha a disposizione un motore elettrico in corrente continua che fa girare, in un piano orizzontale, una sbarra di metallo.
Al termine della sbarra si può saldare una bobina formata da spire di forma rettangolare, ciascuna con il lato parallelo alla sbarra di lunghezza $L = 8{,}0$ cm e l'altro lungo $l = 5{,}0$ cm. La sbarra è lunga $R = 86$ cm e il suo periodo di rotazione vale $T = 3{,}2$ s.
La bobina deve passare tra i poli orizzontali di due magneti affacciati, in modo da misurare il valore del campo magnetico presente tra di essi.
I poli magnetici sono quadrati e hanno il lato di 20 cm; quando la bobina è al centro dello spazio tra i magneti, i lati del contorno della bobina sono paralleli ai corrispondenti spigoli dei magneti. Il campo magnetico $\vec{B}$ che essi generano si può considerare uniforme e, secondo il tecnico, è compreso tra $3 \cdot 10^{-3}$ T e $8 \cdot 10^{-3}$ T.
La bobina è collegata a un oscilloscopio digitale mediante due fili che prima corrono lungo la sbarra e poi escono verso l'oscilloscopio (figura). L'oscilloscopio rileva direttamente la forza elettromotrice indotta nella bobina dalle variazioni di campo magnetico.



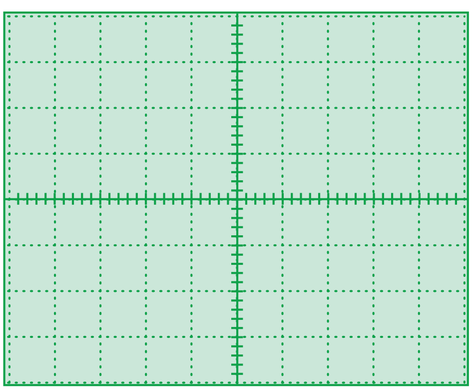
a. Giustifica il fatto che, all'interno del campo magnetico, il moto della bobina si può considerare rettilineo uniforme.

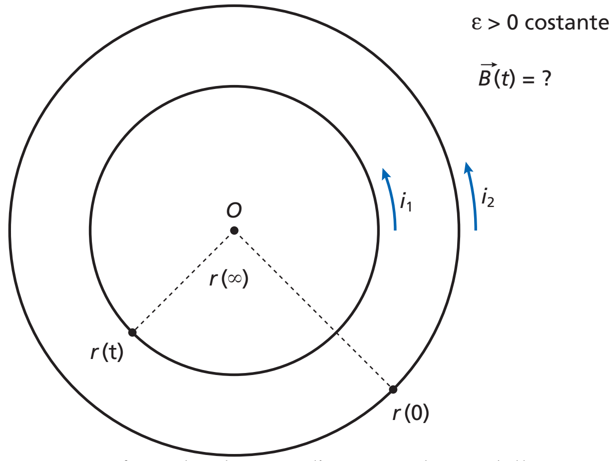
b. Dai una stima del tempo necessario perché la bobina passi dalla zona in cui il campo magnetico è trascurabile e quella dove è presente il campo $\vec{B}$ da misurare.

c. Determina qualitativamente quale segnale viene mostrato sull'oscilloscopio nelle tre fasi in cui: 1) la bobina entra nel campo $\vec{B}$; 2) la bobina si muove nel campo; 3) la bobina esce dal campo magnetico. Disegna nella maniera più semplice e idealizzata la forma del grafico che si può vedere sull'oscilloscopio dopo il completamento di queste tre fasi.

L'oscilloscopio riporta una griglia cartesiana con la forza elettromotrice indotta in ordinate e il tempo in ascisse. Come mostra la figura, la griglia ha 8 divisioni verticali, ciascuna delle quali contiene a sua volta 5 sottodivisioni. L'oscilloscopio può essere settato in modo che ciascuna delle divisioni grandi corrisponda a 0,10 V.

d. Calcola qual è il numero N di spire che deve avere la bobina perché il segnale che corrisponde al massimo valore ipotizzato di $\vec{B}$ sia compreso tra la terza e la quarta delle divisioni grandi del display (prendendo come base di partenza la retta corrispondente all'asse delle ascisse). [$\approx 0{,}12$ s; $2{,}8 \cdot 10^2 < N < 3{,}7 \cdot 10^2$]





149 **INDUZIONE ELETTROMAGNETICA** **DERIVATE** Una spira circolare di raggio iniziale $r_0 = 1{,}0$ m, immerso in un campo magnetico $\vec{B}(t)$, ortogonale alla spira, ha il raggio che si riduce secondo una legge di decrescita esponenziale in modo da annullarsi in un tempo praticamente infinito; inoltre, il tempo di dimezzamento risulta essere $\tau = 10$ s (per tempo di dimezzamento del raggio della spira si intende il tempo trascorso affinchè il suo raggio iniziale si dimezzi). L'andamento temporale del vettore $\vec{B}(t)$ è incognito.
Un apparato di misura rivela che la forza elettromotrice indotta risulta essere costante nel tempo e vale $\varepsilon = 25$ mV (osserva che la spira è orientata positivamente in senso antiorario, mentre il vettore superficie che descrive l'area racchiusa della spira è determinato secondo la regola della mano destra).

a. Determina la legge temporale con la quale varia l'area S della spira.

b. Esprimi la forza elettromotrice ε in termini di B e S e le derivate temporali di tali grandezze (usare la regola della derivata del prodotto), in modo da ottenere la seguente equazione differenziale:

$$\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\ln 2}{5{,}0\ \mathrm{s}} B(t) = -\frac{25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{T/s}}{\pi} e^{\frac{\ln 2}{5{,}0\ \mathrm{s}} t}$$

c. Assumendo il campo magnetico iniziale pari a 1,0 T, verifica che il campo magnetico in funzione del tempo che risolve l'equazione precedente è dato da:

$$B(t) = (1{,}0\ \mathrm{T})\left(-\frac{25 \cdot 10^{-3}}{\pi s} t + 1\right) e^{\frac{\ln 2}{5{,}0\ \mathrm{s}} t}$$

d. Stabilisci se il verso del campo magnetico resta costante (motiva la risposta).

$\left[S(t) = (1{,}0\ m^2) \cdot \pi e^{-\frac{\ln 2}{5{,}0\ s} t};\ \text{no}\right]$

Le equazioni di Maxwell e le onde elettromagnetiche

150 Un fascio di luce polarizzato linearmente attraversa un polarizzatore il cui asse di trasmissione forma un angolo di 28° con la direzione di polarizzazione del fascio.
L'intensità del fascio incidente è $I_0 = 95\ \mathrm{W/m^2}$.
Il polarizzatore ha area $A = 18\ \mathrm{cm^2}$. Calcola la potenza luminosa incidente sul polarizzatore.
Calcola l'intensità I del fascio di luce che emerge dal polarizzatore. [74 W/m²]

151 All'interno di un condensatore piano con armature circolari di raggio 95 cm è presente un sottilissimo filo conduttore rettilineo che collega i centri delle due armature.
Al condensatore viene applicata una tensione che cresce di 0,2 V/s.
La capacità del condensatore è 25 nF mentre la resistenza del filo è 31 Ω.

a. Dopo quanto tempo la corrente che attraversa il filo diventa uguale alla corrente di spostamento che attraversa il condensatore?

In un certo istante, il filo viene tolto, mentre la tensione continua a crescere di 0,2 V/s.

b. All'interno del condensatore esiste un campo magnetico. Spiega perché.

c. Disegna le linee di forza di tale campo magnetico.

d. Determina l'intensità di tale campo magnetico in funzione della distanza r dall'asse delle armature.

e. L'intensità del campo magnetico varia nel tempo? E se la tensione variasse con la seguente legge: $\mathscr{E} = (0{,}2\ \mathrm{V/s^2})\, t^2$?

[0,78 μs; $B(r) = 1/2\ \mu_0 \varepsilon_0 r\ \Delta\mathscr{E}/\Delta t$]

152 Il DPCM (Decreto del Presidente del Consiglio dei Ministri) del giorno 8 luglio 2003 indica i *valori di attenzione* per i campi elettromagnetici, che non devono essere superati negli ambienti abitativi, scolastici e nei luoghi adibiti a permanenze prolungate.
Per frequenze f tali che 100 kHz $< f \leq$ 300 GHz il limite non superabile per il *valore efficace* del campo elettrico di un'onda elettromagnetica è di 6 V/m (nei calcoli, considera questo valore come 6,0 V/m).
Una associazione cittadina che si occupa di inquinamento elettromagnetico ti chiede di spiegare il significato di questo dato in una riunione pubblica. Così, per preparare la documentazione che ti serve, decidi di fare alcune stime preliminari.

Proprietà fisiche dell'aria secca (273 K, 1,01 · 10^5 Pa)	
Calore specifico a pressione costante	$1{,}00 \cdot 10^3$ J/(kg·K)
Coefficiente di conducibilità termica	0,02 W/(m·K)
Costante dielettrica relativa	1,00054
Densità	1,29 kg/m^3
Permeabilità magnetica relativa	1,00000036
Velocità del suono	332 m/s
Viscosità	$1{,}71 \cdot 10^{-5}$ Pa·s

a. La tabella sopra riporta alcune proprietà fisiche dell'aria secca. Da essa estrai i dati numerici che ti servono per mostrare che per le onde elettromagnetiche possono essere utilizzate, anche all'interno dell'atmosfera terrestre, le stesse formule che valgono nel vuoto. Individua poi qual è l'ambito di variabilità delle lunghezze d'onda delle radiazioni a cui si riferisce il DPCM citato nel testo precedente; infine stabilisci a quali regioni dello spettro elettromagnetico esse appartengono.

b. Partendo dalle tue conoscenze in altri ambiti della fisica, proponi un significato ragionevole del termine «valore efficace del campo elettrico» e, partendo da esso, calcola quanto valgono le ampiezze del campo elettrico e del campo magnetico presenti in un'onda elettromagnetica che raggiunge il valore di attenzione.

c. Calcola l'irradiamento dell'onda elettromagnetica che corrisponde al valore di attenzione e confrontalo (nell'ordine di grandezza) con l'irradiamento solare al suolo, a cui puoi attribuire un valore di 600 W/m^2. Calcola anche qual è la pressione di radiazione esercitata dall'onda elettromagnetica limite che stai studiando quando essa viene completamente assorbita dal terreno.

d. Considera un'antenna posta su un traliccio a 22 m di altezza. Al suolo sotto l'antenna si misura un valore di campo elettrico pari a quello di attenzione. Determina la potenza irradiata dall'antenna e calcola i valori dell'irradiamento e dell'ampiezza del campo elettrico sul balcone di una casa vicina, che dista 16 m dall'antenna.

[1,00 mm $\leq \lambda <$ 3,00 km; 8,5 V/m, $2{,}8 \cdot 10^{-8}$ T; 0,096 W/m^2, 10^4, 32 nPa; 0,18 W/m^2, 12 V/m]

7 Relatività

153 **ESERCIZIO SVOLTO** Una corda di lunghezza 10 m viene disposta lungo l'asse x e si muove, rispetto tale asse, alla velocità di 0,5 c.
Quanto vale la lunghezza della corda rispetto l'asse x? Se l'orologio solidale alla corda ha rilevato un intervallo di tempo pari a 10 s, quanto tempo è trascorso rispetto a un orologio solidale con l'asse x? [8,7 m, 12 s]

Indicando con Δx_0, Δt_0 e Δx, Δt la lunghezza della corda, l'intervallo temporale rispetto la corda e la lunghezza della corda e l'intervallo temporale rispetto l'asse x, in base alle formule relativistiche, si ha:

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 8{,}7 \text{ m} \qquad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 12 \text{ s}$$

154 Calcola, con 6 cifre significative, la quantità di moto, l'energia cinetica e l'energia totale di un elettrone e di un protone a una velocità di $\frac{3}{4}c$.
Considera i seguenti valori numerici: massa dell'elettrone $m_e = 9{,}10938 \cdot 10^{-31}$ kg; rapporto tra la massa del protone e quella dell'elettrone $m_p/m_e = 1836{,}1527$; velocità della luce nel vuoto $c = 299\ 792\ 458$ m/s.
Per determinare le quantità relative al protone, è sempre necessario conoscere la sua massa?

155 Edoardo, durante un esperimento, registra, rispetto al sistema di riferimento $\mathfrak{R}$ solidale con il suo laboratorio, due eventi che riporta nella seguente tabella

Evento	x(m)	t(s)
A	10,00	$3{,}000 \cdot 10^{-6}$
B	45,00	$5{,}000 \cdot 10^{-6}$

Riccardo, all'istante $t = 0$ s, passa per l'origine O di $\mathfrak{R}$, con uno skate board relativistico che si muove lungo il verso positivo dell'asse x del corridoio del laboratorio con una velocità di $0{,}800c$ (dove c è la velocità della luce). Quale tabella ottiene invece Riccardo (il riferimento $\mathfrak{R}'$ ha origine nello skate board)? Verifica infine che l'intervallo tra i due eventi è lo stesso nei due sistemi di riferimento.

[$3{,}583 \cdot 10^5$ m]

156 Una particella si muove con una velocità tale che il rapporto $\frac{v}{c} > 0{,}95$ (c è la velocità della luce nel vuoto). Indicando con K e con E_0 rispettivamente l'energia cinetica e l'energia di riposo della particella, puoi affermare che il rapporto K/E_0 è maggiore di 2,05?
(Motiva la risposta).
Quanto vale il rapporto $\frac{p_{rel}}{p_{cl}}$ se $\frac{v}{c} > 0{,}95$? (p_{rel} e p_{cl} sono rispettivamente la quantità di moto relativistica e quella classica della particella)

[sì, 3,20]

157 In un tubo, in cui è stato praticato il vuoto spinto, si muove un elettrone con un'energia totale E di 180,0 Mev. Se la lunghezza del tubo è di 3,000 m, qual è la lunghezza misurata da un osservatore solidale con l'elettrone? (L'equivalente in energia della massa dell'elettrone è $E_0 = 0{,}5110$ MeV.)

[0,008517 m]

158 Nel sistema di riferimento di un laboratorio, un segnale luminoso si propaga con la legge del moto $x = -ct$. Un razzo si muove nel verso positivo degli assi x e x' con una velocità (rispetto al laboratorio) di modulo v.
Utilizzando le trasformazioni di Lorentz, dimostra che la legge del moto dello stesso segnale luminoso, descritta nel sistema di riferimento del razzo, ha la forma $x' = -ct'$.

159 Lo spettrometro di massa è uno strumento che permette di misurare il rapporto q/E (carica/energia). Da un esperimento relativistico con questo dispositivo sugli ioni di magnesio $^{24}Mg^{2+}$ di massa $m = 4{,}017058 \cdot 10^{-26}$ kg, si ottiene la seguente tabella in unità SI che stabilisce un legame fra la velocità v di uno ione e il suo rapporto q/E:

v	$\frac{q}{E} \cdot c^2 \cdot 10^{-6}$
$0{,}1c$	7,936880
$0{,}2c$	7,815699
$0{,}3c$	7,609444
$0{,}4c$	7,310917
$0{,}5c$	6,908167

dove c è la velocità della luce.
Puoi dedurre l'invarianza relativistica (indipendenza dalla velocità) della carica dalla tabella precedente? Motiva la risposta.

160 Un protone si muove all'interno di un acceleratore, in un tubo in cui è stato praticato il vuoto, a una velocità costante pari al 96,4% della velocità c. La lunghezza del tubo è $L = 42{,}5$ m.
Calcola quanto tempo il protone impiega a percorrere il tubo nel sistema di riferimento del laboratorio e in quello solidale alla particella. Determina poi la lunghezza della distanza percorsa dal protone in questo secondo sistema di riferimento.

[147 ns; 39,1 ns; 11,3 m]

161 Nel sistema di riferimento del laboratorio si osservano, nel vuoto, un neutrone ($M_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg), un muone ($m_0 = 1{,}88 \cdot 10^{-28}$ kg) e due fotoni che si muovono lungo il verso positivo dell'asse x.
Rispetto al laboratorio il neutrone ha una velocità costante $v_n = 2{,}40 \cdot 10^8$ m/s. Il muone, visto dal neutrone, ha una velocità costante $v_\mu' = 1{,}60 \cdot 10^8$ m/s.

a. Calcola la velocità v_μ del muone e la sua energia cinetica K_μ nel sistema di riferimento del laboratorio.

b. Determina la velocità del neutrone e la sua quantità di moto nel sistema di riferimento del muone.

c. Uno dei fotoni ha velocità c nel sistema di riferimento del laboratorio. Calcola, utilizzando la legge di composizione delle velocità, la velocità dello stesso fotone del sistema di riferimento del neutrone.

d. Determina la velocità con cui uno dei fotoni si muove nel sistema di riferimento solidale con l'altro fotone. Quale problema si ottiene cercando di utilizzare direttamente, in questo calcolo, la legge di composizione delle velocità? Utilizza allora una formula analoga a quella che hai scritto per rispondere alla domanda precedente e calcola il limite della stessa quando la velocità più piccola presente nella formula tende al valore c.

[2,80 · 10^8 m/s, 3,03 · 10^{-11} J; $-(1{,}60 \cdot 10^8\ \text{m/s})\ \widehat{x}$, $-(3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{kg·m/s})\ \widehat{x}$; c; c]

162 Nel riferimento del laboratorio si osserva il seguente processo di annichilazione

$$p + \overline{p} \rightarrow \gamma + \gamma$$

Si tratta della collisione di un protone p con un antiprotone $\overline{p}$, ciascuno dei quali è caratterizzato da un'energia cinetica pari al doppio dell'energia di quiete, che produce una coppia di fotoni γ. È bene ricordare che il protone e l'antiprotone hanno la stessa massa $m = 1{,}6726217 \cdot 10^{-27}$ kg mentre le cariche sono opposte.
Determina, rispetto al riferimento del laboratorio:

a. la velocità dell'antiprotone in relazione alla velocità della luce c;

b. l'energia di ciascun fotone (utilizza i teoremi di conservazione della quantità di moto e dell'energia);

c. la quantità di moto di ciascun fotone.

d. Il processo di annichilazione protone antiprotone può generare un solo fotone?

($c = 2{,}9979246 \cdot 10^8$ m/s)

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}c;\ 4{,}5092323 \cdot 10^{-10}\ \text{J};\ 1{,}5043181 \cdot 10^{-18}\ \text{N} \cdot \text{s; no}\right]$$

163 Dopo avere sentito la lezione sulle trasformazioni di Lorentz vuoi approfondirne le proprietà. Quindi considera tre sistemi inerziali S, S' e S'' che rispettano le solite convenzioni (gli assi cartesiani dei tre sistemi sono paralleli ed equiversi, le origini coincidono all'istante $t = t' = t'' = 0$.)
Il sistema S' si muove rispetto a S con una velocità $\vec{v}_1$ di modulo $v_1 = 3c/5$, rivolta nel verso positivo degli assi x e x'. Allo stesso modo il sistema S'' si muove rispetto a S' con una velocità parallela a $\vec{v}_1$ e di modulo $v_2 = 5c/13$.

a. Scrivi le trasformazioni di Lorentz che permettono di passare dalle coordinate (t, x) di S alle corrispondenti coordinate (t', x') di S'. Ripeti il calcolo per le trasformazioni tra le coordinate di S' e le corrispondenti coordinate (t'', x'') di S''.

b. Determina quindi la forma delle trasformazioni che permettono di passare direttamente da S a S''.

c. Sulla base del calcolo effettuato, sei in grado di stabilire qual è il modulo della velocità v con cui il sistema di riferimento inerziale S'' si muove rispetto a S? In particolare, il valore del parametro β che si deduce dalla trasformazione composta è coerente con il valore di γ della stessa trasformazione?

d. Il valore che hai ottenuto della velocità v con cui S'' si muove rispetto a S è in accordo con la velocità v_{TOT} che si ottiene secondo le trasformazioni di Galileo? In caso di risposta negativa, prova a riconoscere a cosa corrisponde (in termini di quantità rilevanti per le trasformazioni di Lorentz) la quantità

$$\frac{v_{\text{TOT}}}{v} - 1$$

[$t'' = (5/3)\,[t - 4\,x/(5c)]$, $x'' = (5/3)(x - 4ct/5)$; $v = 4c/5$; $3/13 = \beta_1\beta_2$]

Oltre la fisica classica

164 **ESERCIZIO SVOLTO** L'energia minima necessaria per estrarre un elettrone a una lastra metallica di sodio è di 2,3 eV. Una radiazione di luce visibile può generare l'effetto fotoelettrico su tale lastra?

L'intervallo di lunghezze d'onda della radiazione visibile è il seguente

$$\Lambda = [380\text{ nm}, 750\text{ nm}]$$

Determiniamo la lunghezza d'onda massima per generare l'effetto fotoelettrico:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{E} = 5{,}39 \cdot 10^{-7}\text{ m} = 539\text{ nm} \in \Lambda$$

Dunque, l'effetto fotoelettrico su di una lastra di sodio è possibile con luce visibile.

165 In seguito a un urto, l'elettrone di un atomo di idrogeno passa dal suo stato fondamentale a un livello che corrisponde al numero quantico principale $m = 4$. Di lì, scende dapprima al primo stato eccitato e poi ancora allo stato fondamentale.
Calcola l'energia assorbita dall'atomo quando l'elettrone è eccitato e le energie dei due fotoni emessi.
[$2{,}05 \cdot 10^{-18}$ J; $4{,}09 \cdot 10^{-19}$ J; $1{,}64 \cdot 10^{-18}$ J]

166 Determina la lunghezza d'onda di un fotone incidente capace di fornire un'energia di 70 keV a un elettrone fermo. Dopo l'urto il fotone rimbalza all'indietro.
[$7{,}1568 \cdot 10^{-12}$ m]

167 In un atomo d'idrogeno, un elettrone passa direttamente dal livello energetico $n = 5$ al livello fondamentale. Determina la quantità di moto del fotone emesso. La costante di Rydberg è $R_H = 1{,}09737 \cdot 10^7\text{ m}^{-1}$.
[$6{,}9804 \cdot 10^{-27}$ N · s]

168 Un fascio di luce incide su una superficie metallica.

a. Spiega che cosa si intende per *lavoro di estrazione* di un metallo e quale condizione deve realizzarsi affinché il metallo rilasci fotoelettroni.

b. Il lavoro di estrazione per l'oro è 5,1 eV, mentre quello per l'uranio è 3,6 eV. Quale dei due metalli emette elettroni con l'energia più grande quando viene irraggiato con radiazioni elettromagnetiche aventi lunghezza d'onda di 160 nm?

c. Il lavoro di estrazione del bario è 2,7 eV. Stabilisci quali colori sono in grado di far emettere fotoelettroni dal bario (vedi tabella).

Colore	lunghezza d'onda
Viola	380-450 nm
Blu	450-495 nm
Verde	495-570 nm
Giallo	570-590 nm
Arancione	590-620 nm
Rosso	620-750 nm

d. Se una radiazione elettromagnetica di alta frequenza incide su una lastra metallica, i fotoni possono essere diffusi dagli elettroni mediante effetto Compton.
Calcola la variazione di lunghezza d'onda di un fotone da 15 keV dopo una deflessione di 180° subita da parte di un elettrone ($m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg).

e. Calcola la velocità di un elettrone la cui lunghezza d'onda di de Broglie è $2{,}0 \cdot 10^{-10}$ m. Si tratta di un elettrone relativistico?
[$4{,}86 \cdot 10^{-12}$ m; circa 3,6 km/s]

169 **ESERCIZIO SVOLTO** È ben noto che l'effetto Compton ha giocato un ruolo di fondamentale importanza nella conferma dell'ipotesi corpuscolare della radiazione elettromagnetica introdotta da A. Einstein per la spiegazione dell'effetto fotoelettrico. In sostanza, una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ, dopo aver colpito un bersaglio, ad esempio di grafite, acquista una nuova lunghezza d'onda λ'. La spiegazione di tale fenomeno può essere ottenuta assumendo che tale radiazione sia costituita da fotoni di energia iniziale $E = hf$ e di energia finale $E' = hf'$ dopo aver urtato un elettrone di massa m in quiete.

a. Partendo dalla legge di conservazione dell'energia e dalla relazione di Compton, ottieni la seguente espressione dell'energia cinetica di rinculo dell'elettrone:

$$K = hf\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{hf}{mc^2}(1 - \cos\theta)}\right]$$

dove θ è l'angolo formato dal fotone emesso, dopo l'urto, rispetto alla direzione di moto del fotone incidente. (**SUGGERIMENTO** Ricavare dalla relazione di Compton la frequenza f')

b. Servendoti della formula di bisezione $\sin(\theta/2) = \pm\sqrt{(1 - \cos\theta)/2}$, trasforma la relazione precedente fino ad ottenere la seguente formula:

$$K = E\frac{2\alpha \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + 2\alpha \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

dove $\alpha = \dfrac{E}{mc^2}$

c. Verifica che, per una data energia E del fotone, l'espressione dell'energia cinetica massima dell'elettrone, a causa dell'effetto Compton, è la seguente:

$$K_{\text{max}} = E\frac{2\alpha}{1 + 2\alpha}$$

d. Quanto vale l'energia cinetica massima dell'elettrone se la quantità di moto del fotone incidente è $0{,}8971\ \dfrac{\text{MeV}}{c}$?

---

a. Per la conservazione dell'energia del sistema fotone-elettrone si ha:

$$hf + mc^2 = hf' + mc^2 + K$$

da cui segue:

$$K = h(f - f')$$

La relazione di Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

può essere scritta in termini di frequenza nel seguente modo:

$$\frac{c}{f'} - \frac{c}{f} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$

da essa, si ottiene:

$$f' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{mc^2}(1 - \cos\theta)}$$

Sostituendo tale relazione nell'espressione di K si ottiene l'espressione richiesta.

b. Dopo aver raccolto v nella relazione proposta in **a** e aver introdotto, in essa, $E = hf$ e $\alpha = \frac{E}{mc^2}$, si ottiene:

$$K = E\frac{\alpha(1 - \cos\theta)}{1 + \alpha(1 - \cos\theta)}$$

Ricordando la formula di bisezione:

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$

e sostituendola in K si ottiene l'espressione finale di K.

c. L'angolo massimo di diffusione è $\theta = 180°$, da cui si deduce sin = 1. Così si ottiene immediatamente il risultato richiesto.

d. La quantità di moto p del fotone è legata alla sua energia E dalla seguente relazione:

$$E = pc = 0{,}8970 \text{ MeV}$$

Quindi si ha:

$$K_{max} = 1{,}119 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

170 Un tuo amico ha partecipato a uno stage all'università, ha assistito a un esperimento sull'effetto fotoelettrico, ma ora non riesce più a ricostruire il loro significato in modo da scrivere la relazione sull'attività svolta.
Così ti ha chiesto di aiutarlo ad analizzare i suoi dati, che sono i seguenti: gli elettroni sono emessi da una lastrina di calcio, che ha un lavoro di estrazione $W_e = 2{,}90$ eV; l'area della lastrina è $A = 3{,}80$ cm^2; la sorgente luminosa monocromatica genera sulla lastrina un irradiamento $E_R = 140$ W/m^2; il potenziale di arresto per gli elettroni emessi è $\Delta V_a = 1{,}11$ V; la corrente di saturazione misurata ha intensità $i_s = 53{,}1$ nA.
Lo scopo finale dell'esperimento è quello di misurare il rendimento del sistema nell'emissione di elettroni, cioè il rapporto η tra il numero di elettroni emessi e il numero dei fotoni che giungono sulla piastrina. Per giungere a questo, occorrono alcuni calcoli preliminari.

a. Il valore del potenziale di arresto ti sembra ragionevole, confrontato con quello del lavoro di estrazione? In caso di risposta affermativa, determina l'energia cinetica massima degli elettroni emessi e quindi l'energia E_γ dei fotoni che giungono sulla lastrina.

b. Individua frequenza e lunghezza d'onda dei fotoni della sorgente monocromatica; in quale parte dello spettro elettromagnetico si situano tali fotoni?

c. Calcola il numero N_γ di fotoni che giungono sulla lastrina nell'unità di tempo (un secondo).

d. Calcola il numero Ne di elettroni che sono emessi dalla lastrina di calcio in un secondo e quindi il valore di η.

[$6{,}42 \cdot 10^{-19}$ J; 968 THz, 310 nm; $8{,}29 \cdot 10^{16}$; $3{,}32 \cdot 10^{11}$, $4{,}00 \cdot 10^{-6}$]

La meccanica quantistica

171 ESERCIZIO SVOLTO Sapendo che 1 eV è l'energia cinetica acquisita da un elettrone sotto l'azione di una differenza di potenziale di 1 V, calcola la lunghezza d'onda di de Broglie per un neutrone di energia cinetica pari a 650,00 MeV.
(Valori numerici: massa del neutrone $m_n = 1{,}6749 \cdot 10^{-27}$ kg, carica elementare $e = 1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ C.)

Trasformiamo l'energia $K = 600{,}0$ MeV in J:

$$K = 6{,}5000 \cdot 10^8 \cdot 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1{,}0414 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Dalla teoria della relatività ristretta, a partire dall'energia E possiamo calcolare la quantità di moto p

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{(mc^2 + K)^2 - m^2c^4}$$

dove m è la massa del neutrone.
Di conseguenza, la lunghezza d'onda di de Broglie risulta essere data da:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{(mc^2 + K)^2 - m^2c^4}} = 9{,}6699 \cdot 10^{-16}\ \text{m}$$

172 In una determinata condizione, la posizione di un protone ($m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) è conosciuta con una indeterminazione $\Delta x = 4$ pm. Un fisico sperimentale si pone il problema di misurare contemporaneamente la velocità del protone con una indeterminazione massima $\Delta v = 5 \cdot 10^3$ m/s.
È possibile?

173 Un punto materiale è vincolato a muoversi sul semiasse positivo delle x da $x = 0$ a $x = L$. In questo caso si parla di «particella in una scatola monodimensionale». Si dimostra che esistono infinite funzioni d'onda $\Psi_n(x)$ che descrivono il comportamento quantistico di questo sistema; esse hanno la forma

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L},\quad 0 \leq x \leq L \tag{A}$$

Il parametro intero positivo n serve a distinguere tra loro le diverse soluzioni. Essendo un sistema monodimensionale, la probabilità infinitesima $dP_n(x)$ di trovare la particella in una zona di lunghezza infinitesima dx, centrata attorno all'ascissa x ($0 \leq x \leq L$) è

$$dP_n(x) = [\Psi_n(x)]^2\,dx \tag{B}$$

a. Verifica, sulla base della formula (A), che la probabilità di trovare la particella in un punto generico all'interno della «scatola» che si estende da $x = 0$ a $x = L$ è pari a 1. Interpreta fisicamente questo risultato e determina le dimensioni fisiche di n.

b. Senza calcolare ulteriori integrali, determina la probabilità che la particella si trovi nella parte di «scatola» compresa tra $x = 0$ e $x = L/n$.

c. Verifica che la funzione (A) è soluzione dell'*equazione di Schrödinger indipendente dal tempo*:

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{d^2\Psi_n(x)}{dt^2} = E_n\Psi_n(x) \tag{C}$$

In questo modo puoi determinare il valore della quantità E_n.

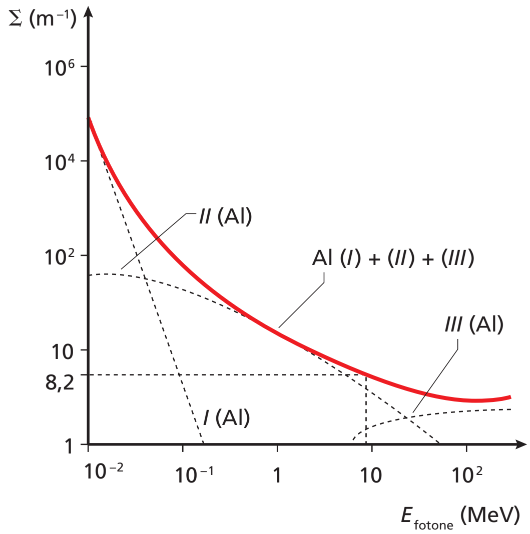
d. Qual è il minimo valore di E_n che si può ottenere dall'equazione precedente? Come dipendono da n i valori di E_n successivi a quello minimo?

$$\left[\frac{1}{n};\ E_n = \left(\frac{1}{8m}\right)\left(\frac{nh}{L}\right)^2;\ \left(\frac{1}{8\,m}\right)\left(\frac{h}{L}\right)^2\right]$$

174 Quando una radiazione elettromagnetica attraversa la materia, la sua energia viene assorbita da diversi processi, tra cui i più rilevanti sono: effetto fotoelettrico (I), effetto Compton (II), produzione di coppie (III). Indicando con I_0 l'intensità (o irradiamento) della radiazione incidente prima di incontrare un bersaglio, la sua intensità I dopo aver attraversato lo spessore s del materiale risulta essere data dalla seguente formula:

$$I = I_0\,e^{-\Sigma s}$$

dove Σ è un coefficiente, denominato di attenuazione lineare, caratteristico della sostanza di cui è fatto il materiale, del processo considerato e dell'energia della radiazione incidente. Nel sistema internazionale Σ si misura in m^{-1}. Riportiamo, per un bersaglio di alluminio, le curve di Σ in relazione al tipo di processo e all'energia dei fotoni che colpiscono tale bersaglio; inoltre, la curva continua è la cosiddetta sezione d'urto totale, cioè è la somma delle tre curve tratteggiate.



a. Stabilisci quale processo è dominante alle grandi, medie e basse energie.

b. I processi (I) e (II) ti sono noti, mentre il processo (III) non sempre viene sviluppato nel programma di quinta. Quando l'energia del fotone, E_{fotone}, è sufficientemente grande, può crearsi una coppia (processo (III)) formata da un elettrone (e^-) e da un positrone (e^-), secondo la seguente reazione:

$$E_{fotone} \rightarrow e^- + e^+$$

Il positrone e^+ ha la stessa massa dell'elettrone ma, rispetto a quest'ultimo, ha carica opposta. Qual è la frequenza di soglia f_{min} che deve possedere il fotone, al di sotto della quale non può aversi la produzione di una coppia e^-, e^+? (Massa dell'elettrone $m_e = 0{,}51100$ MeV/c^2.)

c. Determina il più grande numero di positroni che possono essere prodotti da un fotone di 100,00 Mev.

d. Per strato emivalente (SEV) (half-value thickness) $s_{1/2}$ si intende lo spessore che deve avere il target affinché l'intensità della radiazione incidente venga ridotta della metà. Determina la formula di $s_{1/2}$ in funzione di Σ. Quanto vale $s_{1/2}$ per l'alluminio nel caso in cui l'energia del fotone sia di 10 MeV?

$\left[\text{(III), (II), (I); } 2{,}4712 \cdot 10^{20}\ \text{Hz; } 97\text{; } s_{1/2} = \dfrac{ln^2}{\Sigma}\text{; } 8{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right]$

175 Considera di nuovo la formula (A) del problema 173 e i valori

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

che hai individuato risolvendo tale problema.

a. Determina l'unità di misura delle quantità E_n e sulla base di questa analisi opera un'ipotesi ragionevole sul significato fisico di tali quantità. Con un ragionamento per analogia, proponi una frase che possa descrivere il ruolo del parametro intero positivo n.

b. Dal risultato precedente determina i possibili valori delle componenti lungo x della quantità di moto della particella che si trova nella scatola. Per quale valore di n tali componenti hanno il minimo modulo?

c. Controlla cosa accade alla funzione d'onda (A) per $x = 0$ e per $x = L$. Qual è il significato fisico di tale risultato? Determina la lunghezza d'onda della funzione (A) per un valore generico di n.

d. Per un generico valore di n, quanti sono i punti nella scatola in cui la funzione d'onda si annulla? Questi punti sono chiamati *nodi* della funzione d'onda. Determina quanti nodi possiede la funzione d'onda

$$\Psi(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}[\Psi_4(x) + \Psi_8(x)]$$

[joule; $\pm\, hn/(2L)$; $\Psi_n(0) = 0$, $\Psi_n(L) = 0$, $2L/n$; $n + 1$, 5]

Fisica nucleare

176 Il fluoro-18 è un nucleo radioattivo che emette positroni ed è utilizzato per ottenere immagini tramite la diagnostica PET. Il suo tempo di dimezzamento è $T_{1/2} = 6586$ s.
Dopo quanto tempo il numero di nuclei radioattivi di fluoro-18 si riduce a 1/20 del valore iniziale?

[$2{,}846 \cdot 10^4$ s]

177 La massa atomica del $^{7}_{3}$Li è $m_{\text{Li}} = 7{,}016003$ u, mentre le masse dell'atomo di idrogeno e del neutrone sono rispettivamente $m_{\text{H}} = 1{,}007825$ u e $m_{\text{n}} = 1{,}008665$ u.
Qual è l'energia di legame per nucleone del $^{7}_{3}$Li in MeV?

[5,607 MeV/nucl]

178 Completa il seguente schema di decadimento β^- dell'isotopo $^{40}_{19}$K del potassio:

$$^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{\cdots}_{\cdots}\text{Ca} + e^- + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le masse dei nuclei sono rispettivamente $m_{\text{K}} = 39{,}953575$ u, $m_{\text{Ca}} = 39{,}951619$ mentre la massa dell'elettrone è $m_e = 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ u. Tra i prodotti del decadimento considera solo le masse del nucleo di calcio e dell'elettrone.
Calcola in MeV l'energia liberata nel decadimento.

[1,311 MeV]

179 In molte sonde spaziali si usa un generatore elettrico che funziona grazie all'effetto Seebeck. Una giunzione della termocoppia è esposta alla temperatura del vuoto cosmico; l'altra giunzione è a contatto con un blocchetto di un materiale radioattivo, che in molti casi è plutonio-238 ($^{238}_{94}$Pu). Il plutonio-238 decade in un isotopo dell'uranio ($Z = 92$) con un tempo di dimezzamento $T_{1/2} = 2{,}77 \cdot 10^9$ s ed emettendo una quantità di energia $E = 5{,}593$ MeV; il suo calore specifico vale 130 J/(kg·K) e la sua densità è $d = 19{,}8$ g/cm^3.
Tipicamente, il blocchetto di plutonio che fa parte del generatore ha una massa $m = 100$ g. Per semplicità, facciamo l'ipotesi che il campione sia chimicamente puro, cioè che contenga solo atomi di plutonio-238.

a. Determina di che tipo di decadimento si tratta, scrivi la reazione che lo descrive e calcola il valore della vita media del plutonio-238.

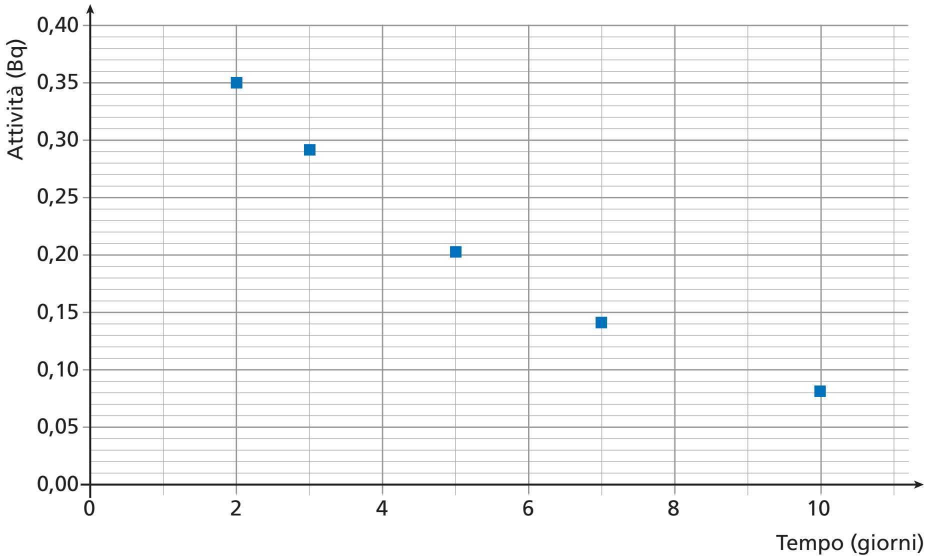
b. Calcola l'attività del blocchetto di plutonio descritto prima.

c. Sulla base del risultato precedente calcola la potenza che il campione di plutonio è in grado di produrre in seguito ai decadimenti radioattivi. Determina poi l'aumento di temperatura del blocchetto (contenuto in un recipiente perfettamente isolante) dopo un intervallo di tempo di un minuto.

d. Supponi che lo stesso campione di plutonio abbia forma sferica e che sia posto nel vuoto cosmico, in un ambiente con una temperatura poco superiore allo 0 K. Considera la sfera come un corpo nero (costante di Stefan-Boltzmann $z = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ J/[s·m^2·K^4]) e calcola la temperatura di equilibrio a cui la sfera si porta.

[$4{,}00 \cdot 10^9$ s; 63,3 TBq; 56,6 W, 262 K; 917 K]

180 Il radon-222 (^{222}Rn) è un gas nobile radioattivo il cui nucleo subisce il decadimento alfa e si trasforma in un nucleo di polonio (Po). La figura mostra una misura dell'attività di un campione di radon in funzione del tempo.



Per i calcoli successivi serviranno dei valori numerici che potrai estrarre dalla seguente tabella.

Grandezza	Valore numerico
Numero atomico del radon	86
Massa atomica del radon-222	222,01758 g/mol
Massa atomica del polonio-218	218,00897 g/mol
Massa atomica dell'elio-4	4,00260 g/mol
Numero di Avogadro	$6{,}02214 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Velocità della luce nel vuoto	$2{,}99792 \cdot 10^{8}$ m/s
Carica elementare	$1{,}60218 \cdot 10^{-19}$ C

a. Sulla base dei dati che hai a disposizione, scrivi l'equazione che descrive la reazione di decadimento del radon-222.

b. Utilizzando alcuni dati numerici che puoi dedurre dal grafico, determina almeno in modo approssimato il valore della vita media del radon-222. Il valore tabulato per la vita media del radon è $\tau_{Rn} = 4{,}77 \cdot 10^5$ s; qual è il tuo commento?

c. Calcola, in joule, l'energia che è emessa nel decadimento di un nucleo di radon-222.

d. Le tabelle riportano che l'energia di decadimento del radon-222 vale 5,59 MeV. Confronta il risultato che hai ottenuto con questo valore.

[$4{,}7 \cdot 10^5$ s; $8{,}97 \cdot 10^{-13}$ J; 5,60 MeV]

VERSO L'ESAME

Prova 1

Problema

1 L'astronave Millennium Chicken visita un sistema planetario composto da una stella di massa M e da alcuni pianeti la cui massa è molto piccola rispetto a M, che percorrono orbite circolari. Il sistema è immerso in una nube composta da una misteriosa sostanza la cui densità ρ è negativa e dipende dalla distanza r dal centro del sistema secondo la legge $\rho(r) = -\lambda r$,, dove λ è una costante positiva. L'unica interazione tra questa sostanza e i pianeti è di tipo gravitazionale.
L'integrazione su una sfera con raggio r di una funzione $f(r)$ che dipende soltanto da r è data dalla formula $\int_0^r 4\pi\, u^2 f(u)\, du$, dove u è una variabile muta di integrazione.

a. Determina il valore della forza gravitazionale che agisce su un pianeta, in funzione di r. (Trascura l'attrazione da parte degli altri pianeti.)

b. Determina le dimensioni della più grande orbita possibile.

c. Stabilisci come viene modificata la terza legge di Keplero nel sistema planetario in esame.

Questionario

1 L'automobile A si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità v. La posizione iniziale di A è in corrispondenza dell'ascissa x_0. L'automobile B si muove con velocità u lungo una retta passante per l'origine inclinata di un angolo α in senso antiorario rispetto all'asse x. La posizione iniziale di B è nell'origine O del sistema di riferimento. Durante il moto di B sia la corrispondente ascissa x_B che la corrispondente ordinata y_B aumentano quando la velocità u è positiva.

a. Dimostra che la distanza tra le due automobili evolve nel tempo secondo l'espressione

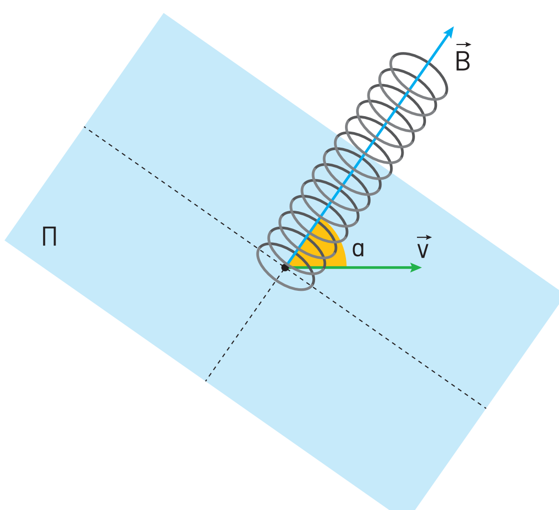
$$d(t) = \sqrt{[u^2 + v^2 - 2uv\cos(\alpha)]t^2 + 2x_0[v - u\cos(\alpha)]t + x_0^2}\,.$$

b. Determina l'espressione della distanza minima tra le due automobili nel caso $\alpha = \pi/2$.

2 Considera il piano Π di equazione:

$$3x + y + \sqrt{2}\,z + 1 = 0.$$

Perpendicolarmente a tale piano è disposto un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ di modulo $B = 0{,}012$ T. Da un punto $A \in \Pi$ viene lanciata una particella alfa di massa $m = 6{,}6 \times 10^{-27}$ kg e carica $q = 3{,}2 \times 10^{-19}$ C con velocità iniziale $\vec{v}$, orientata parallelamente al semiasse positivo delle x in modo da formare un angolo acuto α con il campo magnetico. La carica percorre una traiettoria elicoidale con raggio $R = 5{,}3$ mm.



Determina:

a. l'angolo tra la velocità iniziale e il campo magnetico.

b. il modulo v della velocità iniziale.

c. il passo p dell'elica.

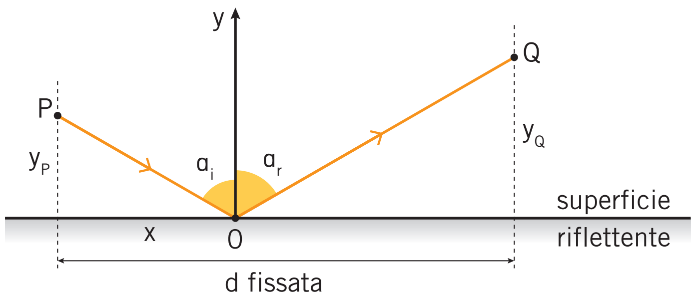
3 Un'asta di massa trascurabile è libera di ruotare attorno a un suo estremo A.
Su di essa vengono posti $n = 6$ punti materiali. Scegliendo il punto A come origine di un sistema di riferimento disposto lungo l'asta, le posizioni x_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ dei punti materiali sono in progressione geometrica con primo elemento $x_1 = l$ e ragione $q = 2$. Le corrispondenti masse m_k, $k = 1, 2, \ldots, 6$ formano una progressione geometrica con primo elemento $m_1 = m$ e ragione $q' = 1/q$.

a. Il sesto punto materiale è posto all'estremo opposto ad A dell'asta, determina la lunghezza dell'asta.

b. Calcola il momento d'inerzia del sistema descritto rispetto al punto A.

[$32\,l$; $63\,ml^2$]

4 Un raggio luminoso emesso dal punto P colpisce la superficie riflettente e viene riflesso secondo il raggio OQ. I due raggi si sviluppano nello stesso materiale trasparente e la luce si muove con la velocità $v = \dfrac{c}{n}$, dove n è l'indice di rifrazione del mezzo e c è la velocità della luce nel vuoto.



a. Esprimi il tempo t impiegato dal raggio luminoso emesso da P per giungere in Q in funzione di x, d, v, y_P, y_Q; calcola poi la derivata del tempo t rispetto a x fornendo un'espressione che dipende solo da α_i, α_r, v.

b. Il principio di Fermat afferma che: «il tempo t impiegato dal raggio luminoso, per giungere in Q, deve essere massimo o minimo».
Sulla base di tale principio, dimostra la seconda legge della riflessione a partire dai calcoli precedenti.

Risoluzione

Problema

1 **a.** Visto che le masse sono disposte con simmetria sferica, anche il campo gravitazionale presenta questa proprietà, dipendendo quindi solo dalla distanza dalla stella.
Pertanto, la forza gravitazionale che mantiene in orbita un pianeta di massa m, è costituita da due termini

$$F(r) = G\frac{mM}{r^2} - G\frac{\lambda m M_S}{r^2}.$$

Il primo addendo è positivo e costituisce l'ordinaria attrazione gravitazionale tra il pianeta e la stella, mentre il secondo addendo è negativo e rappresenta la forza repulsiva che la massa M_S, contenuta nella sfera di raggio r, di sostanza misteriosa esercita sul pianeta. Vista la simmetria sferica, è come se tutta la massa della nube fosse contenuta nel suo centro.
Dato che si può scrivere

$$M_S = -\lambda\int_0^r 4\pi u^3\,du = -\lambda\pi r^4,$$

in cui si è adoperato la variabile di integrazione u per non generare confusione con l'estremo superiore di integrazione r, la forza diventa

$$F(r) = G\frac{mM}{r^2} - G\lambda\pi m r^2,$$

da cui discende il campo gravitazionale

$$g(r) = \frac{F(r)}{m} = G\left(\frac{M}{r^2} - \pi\lambda r^2\right).$$

b. Affinché un corpo di massa m resti in orbita, la forza gravitazionale dovrà essere sempre attrattiva, per cui deve risultare

$$g(r) \geq 0 \rightarrow \frac{M}{r^2} - \pi\lambda r^2 \geq 0 \rightarrow \frac{M}{\pi\lambda} - r^4 \geq 0.$$

Scomponendo l'espressione precedente ed introducendo per semplicità il rapporto dimensionale

$$a = \frac{M}{\pi\lambda},$$

si può scrivere che

$$(\sqrt{a} - r^2)(\sqrt{a} + r^2) \geq 0 \rightarrow \sqrt{a} - r^2 \geq 0.$$

Si conclude che la forza gravitazionale sarà centripeta, se

$$r \leq \sqrt[4]{a}.$$

Quindi la dimensione della più grande orbita possibile vale

$$r_{\max} = \sqrt[4]{\frac{M}{\pi\lambda}}.$$

c. Ripercorrendo la dimostrazione della terza legge di Keplero, nel caso semplificato dell'orbita circolare, è possibile, per un pianeta che orbita a distanza R dalla stella con velocità angolare ω, riprendere la condizione dinamica

$$F(R) = m\omega^2 R \rightarrow \frac{F(R)}{m} = \omega^2 R,$$

che esprime la forza centripeta nel moto circolare uniforme.
Risulta allora

$$G\left(\frac{M}{R^2} - \pi\lambda R^2\right) = \omega^2 R \rightarrow G(M - \pi\lambda R^4) = \omega^2 R^3.$$

Ricordando il legame tra velocità angolare e periodo T

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

la relazione precedente diventa

$$\frac{R^3}{T^2} = G\left(\frac{M}{4\pi^2} - \frac{\lambda R^4}{4\pi}\right).$$

che fornisce la correzione alla terza legge di Keplero.

Questionario

1 Le leggi orarie delle due automobili sono

$$\begin{cases} x_A(t) = x_0 + vt \\ y_A(t) = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_B(t) = (u\cos\alpha)t \\ y_B(t) = (u\sin\alpha)t \end{cases}$$

Allora si trova:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[x_B(t) - x_A(t)]^2 + [y_B(t) - y_A(t)]^2} \\ &= \sqrt{[(u\cos\alpha)t - x_0 - vt]^2 + (u^2\sin^2\alpha)t^2} \\ &= \sqrt{(u^2\cos^2\alpha)t^2 - x_0^2 + v^2t^2 - 2x_0(u\cos\alpha)t - 2(uv\cos\alpha)t^2 + 2x_0vt + (u^2\sin^2\alpha)t^2} \\ &= \sqrt{[u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha]t^2 + 2x_0[v - u\cos\alpha]t + x_0^2} \end{aligned}$$

Nel caso $\alpha = \pi/2$ risulta:

$$d = \sqrt{(u^2+v^2)t^2 + 2x_0 vt + x_0^2}.$$

La distanza minima si ha quando è minimo l'argomento della radice quadrata:

$$\frac{d}{dt}[(u^2+v^2)t^2 + 2x_0 vt + x_0^2] = 2(u^2+v^2)t + 2x_0 v = 0$$

per cui

$$t = t_{\min} = -\frac{x_0 v}{u^2+v^2}.$$

La corrispondente distanza è:

$$d_{\min} = \sqrt{(u^2+v^2)\frac{x_0^2 v^2}{(u^2+v^2)^2} - 2x_0 v\frac{x_0 v}{u^2+v^2} + x_0^2} = \frac{|x_0 u|}{\sqrt{u^2+v^2}}.$$

Si tratta di una distanza minima perché la derivata prima è negativa prima di $t_{\min}$ e positiva dopo tale istante di tempo.

2 Chiamiamo α l'angolo tra la velocità e il campo magnetico. Indichiamo con $v_\perp$ e v_P le componenti della velocità ortogonale e parallela al campo

$$v_\perp = v\sin\alpha \qquad v_P = v\cos\alpha.$$

Imponendo che l'accelerazione centripeta sia conseguenza della forza di Lorentz si ha che il raggio vale

$$R = \frac{mv_\perp}{qB}.$$

Se ne ricava: $v_\perp = \frac{qRB}{m} = \frac{(3,2\times10^{-19}\ \text{C})(5,3\times10^{-3}\ \text{m})(0,012\ \text{T})}{6,6\times10^{-27}\ \text{kg}} = 3,1\times10^3\ \text{m/s}.$

Per determinare α osserviamo che il campo magnetico, normale al piano, ha parametri direttori $\vec{u} = (l, m, n) = (3, 1, \sqrt{2})$ mentre v ha parametri direttori $\vec{u'} = (l', m', n') = (1, 0, 0)$. Ne segue:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{u'}}{uu'} = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

pertanto $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Allora, per $v_\perp = v\sin\alpha$ si ha: $v = 6,2\times10^3$ m/s.

Per il passo dell'elica osserviamo che esso è dato da $p = v_P\cdot T$, ove T è il periodo del moto circolare.

Pertanto si ha:

$$p = v_P\cdot T = v_P\cdot\frac{2\pi R}{v_\perp} = 2\pi R\cdot\text{cotan}\,\alpha = 5,8\times10^{-2}\ \text{m}.$$

3 La posizione del k-esimo punto materiale è

$$x_k = x_1 q^{k-1} = 2^{k-1}l.$$

La massa corrispondente è

$$m_k = m_1(q')^{k-1} = \frac{m}{2^{k-1}}.$$

Quindi la lunghezza dell'asta è pari alla posizione

$$x_6 = 2^5 l = 32\,l$$

e il valore del momento d'inerzia risulta

$$I = \sum_{k=1}^{6} m_k x_k^2 = \sum_{k=1}^{6}\frac{m}{2^{k-1}}(2^{k-1}l)^2 = ml^2\sum_{k=1}^{6}2^{k-1} = ml^2\frac{2^6-1}{2-1} = 63\,ml^2.$$

4 Dalla figura si deduce che il tempo t impiegato dal raggio luminoso per giungere in Q a partire da P, può essere calcolato nei seguenti termini:

$$t = \frac{\overline{OP}}{v} + \frac{\overline{OQ}}{v},$$

applicando poi il teorema di Pitagora, si ha:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_P^2}}{v} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + y_Q^2}}{v}.$$

Calcoliamo ora la derivata del tempo rispetto a x:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + y_P^2}} - \frac{d-x}{v\sqrt{(d-x)^2 + y_Q^2}}.$$

Dalle relazioni trigonometriche fondamentali che caratterizzano un triangolo rettangolo otteniamo:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sin \alpha_i}{v} - \frac{\sin \alpha_r}{v}.$$

La legge di riflessione afferma che l'angolo d'incidenza formato dal raggio incidente con la normale alla superficie riflettente è uguale all'angolo di riflessione formato dal raggio riflesso con la normale; in formula, si ha:

$$\alpha_i = \alpha_r.$$

La condizione di massimo o minimo su $t(x)$ è la seguente:

$$\frac{dt}{dx} = 0,$$

da cui segue:

$$0 = \frac{\sin \alpha_i}{v} - \frac{\sin \alpha_r}{v},$$

ovvero:

$$\alpha_i = \alpha_r.$$

Griglia di valutazione per la Prova 1 di Fisica con Matematica

Indicatori	Livelli	Descrittori	Evidenze – PROBLEMA	Evidenze – QUESITI	Punti	
Analizzare Esaminare la situazione fisica proposta formulando le ipotesi esplicative attraverso modelli o analogie o leggi.	1	• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo superficiale o frammentario • Non deduce, dai dati o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica • Individua nessuna o solo alcune delle grandezze fisiche necessarie	☐ Comprende come utilizzare la simmetria radiale del problema ☐ Specifica la condizione dinamica che porta alla scrittura della terza legge di Keplero	☐ 1 ☐ 2	**0 - 5**	…………..
	2	• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo parziale • Deduce in parte o in modo non completamente corretto, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrivono la situazione problematica • Individua solo alcune delle grandezze fisiche necessarie			**6 - 12**	
	3	• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo completo, anche se non critico • Deduce quasi correttamente, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o le analogie o la legge che descrive la situazione problematica • Individua tutte le grandezze fisiche necessarie			**13 - 19**	
	4	• Analizza il contesto teorico o sperimentale in modo completo e critico • Deduce correttamente, dai dati numerici o dalle informazioni, il modello o la legge che descrive la situazione problematica • Individua tutte le grandezze fisiche necessarie			**20 - 25**	
Sviluppare il processo risolutivo Formalizzare situazioni problematiche e applicare i concetti e i metodi matematici e gli strumenti disciplinari rilevanti per la loro risoluzione, eseguendo i calcoli necessari.	1	• Individua una formulazione matematica non idonea, in tutto o in parte, a rappresentare il fenomeno • Usa un simbolismo solo in parte adeguato • Non mette in atto il procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata	☐ Calcola un integrale definito per quantificare la forza repulsiva ☐ Calcola il raggio massimo dell’orbita ☐ Determina la forma modificata della terza legge di Keplero	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4	**0 - 6**	…………..
	2	• Individua una formulazione matematica parzialmente idonea a rappresentare il fenomeno • Usa un simbolismo solo in parte adeguato • Mette in atto in parte il procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata.			**7 - 15**	
	3	• Individua una formulazione matematica idonea a rappresentare il fenomeno, anche se con qualche incertezza • Usa un simbolismo adeguato • Mette in atto un adeguato procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata.			**16 - 24**	
	4	• Individua una formulazione matematica idonea e ottimale a rappresentare il fenomeno • Usa un simbolismo necessario • Mette in atto il corretto e ottimale procedimento risolutivo richiesto dal tipo di relazione matematica individuata			**25 - 30**	

Questa griglia contiene una **proposta di descrittori e di punteggi**, elaborata a partire dalla Griglia di valutazione per la seconda prova di matematica e fisica (https://bit.ly/2toqEaT).
Secondo le *Indicazioni per la definizione delle griglie di valutazione* (https://bit.ly/2Fxjp8U), gli indicatori sono declinati in descrittori delle prestazioni, la cui definizione è compito della Commissione di Esame.

Interpretare, rappresentare, elaborare i dati Interpretare e/o elaborare i dati proposti e/o ricavati, anche di natura sperimentale, verificandone la pertinenza al modello scelto. Rappresentare e collegare i dati adoperando i necessari codici grafico-simbolici.	1	• Fornisce una spiegazione sommaria o frammentaria del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • Non è in grado di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza	☐ Considera la forza della sostanza repulsiva come se essa fosse racchiusa nel suo centro geometrico ☐ Determina il campo gravitazionale complessivo ☐ Riconosce la condizione che permette all'orbita di avvenire	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4	**0 - 5**	....
	2	• Fornisce una spiegazione parzialmente corretta del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado solo parzialmente di collegare i dati in una forma simbolica o grafica			**6 - 12**	
	3	• Fornisce una spiegazione corretta del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza, anche se con qualche incertezza.			**13 - 19**	
	4	• Fornisce una spiegazione corretta ed esaustiva del significato dei dati o delle informazioni presenti nel testo • È in grado, in modo critico e ottimale, di collegare i dati in una forma simbolica o grafica e di discutere la loro coerenza			**20 - 25**	
Argomentare Descrivere il processo risolutivo adottato, la strategia risolutiva e i passaggi fondamentali. Comunicare i risultati ottenuti valutandone la coerenza con la situazione problematica proposta.	1	• Giustifica in modo confuso e frammentato le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui non riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica • Non formula giudizi di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema	☐ Giustifica le scelte che portano al calcolo della forza gravitazionale negativa ☐ Spiega la ragione per la quale esiste un raggio massimo delle orbite possibili ☐ Espone le varie parti della risoluzione	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4	**0 - 4**	....
	2	• Giustifica in modo parziale le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente non adeguato le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare solo in parte la coerenza con la situazione problematica • Formula giudizi molto sommari di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**5 - 10**	
	3	• Giustifica in modo completo le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente adeguato anche se con qualche incertezza le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare la coerenza con la situazione problematica • Formula giudizi un po' sommari di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**11 - 16**	
	4	• Giustifica in modo completo ed esauriente le scelte fatte sia per la definizione del modello o delle analogie o della legge, sia per il processo risolutivo adottato • Comunica con linguaggio scientificamente corretto le soluzioni ottenute, di cui riesce a valutare completamente la coerenza con la situazione problematica • Formula correttamente ed esaustivamente giudizi di valore e di merito complessivamente sulla soluzione del problema			**17 - 20**	
					PUNTEGGIO	......./100

Rielaborata dalla documentazione del MIUR (https://aifnapoli2.blogspot.com/2018/10/materiali-seminario-ispettore-esposito.html)

Prova 2

Problema

1 Un punto materiale di massa m si muove lungo il semiasse Ox positivo soggetto ad una forza conservativa $F(x)$ la cui energia potenziale $E_{pot}(x)$ ha la seguente espressione:

$$E_{pot}(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^3},$$

dove $\alpha, \beta > 0$.

a. Traccia il grafico qualitativo della funzione $E = E_{pot}(x)$, utilizzando eventualmente una calcolatrice grafica, e determina il segno e le coordinate del punto di minimo di tale funzione.

b. Se l'energia totale $E_{tot} = -2\sqrt{\frac{4\alpha^3}{27\beta}}$ può avvenire il moto? Se l'energia totale $E_{tot} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha^3}{27\beta}}$ il punto materiale può allontanarsi indefinitamente dall'origine O? Rispondi alle domande fornendo una spiegazione esauriente.

c. Assumi $E_{tot} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha^3}{27\beta}}$ e determina l'espressione del modulo della velocità $v(x)$ in funzione dell'ascissa x.

d. Spiega un procedimento per la determinazione dell'accelerazione a in funzione di x.

$\left[\text{è positiva se } 0 < x < \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}, \left(\sqrt{\frac{3\beta}{\alpha}}, -\sqrt{\frac{4\alpha^3}{27\beta}}\right), \text{no, no, } \frac{2}{m}\sqrt{\left[\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{x^3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\alpha^3}{27\beta}}\right]}, \frac{1}{m}\left[\frac{3\beta}{x^4} - \frac{\alpha}{x^2}\right]\right]$

Questionario

1 Un'astronave sta percorrendo un'orbita circolare attorno al centro della Terra ($M = 5{,}972 \times 10^{24}$ kg), alla velocità di 2,61 km/s. Dall'astronave viene sparato un proiettile (di massa trascurabile) in direzione tangente alla traiettoria dell'astronave e nel verso in cui essa si sta muovendo; nel sistema di riferimento dell'astronave il modulo della velocità del proiettile vale 160 m/s.

a. Determina la velocità iniziale del proiettile nel sistema di riferimento in cui il centro della Terra è in quiete; stabilisci così le proprietà che legano tra loro i punti di minima e di massima distanza del proiettile dal centro della Terra e trova così il valore dell'asse maggiore dell'orbita ellittica percorsa dal proiettile;

b. Calcola la distanza focale di tale orbita, la sua eccentricità e quindi l'equazione dell'orbita riferita agli assi dell'ellisse.

$[5{,}85 \times 10^7\ \text{m}; 2{,}77 \times 10^3\ \text{m/s}; 13{,}39 \times 10^7\ \text{m}; 1{,}69 \times 10^7\ \text{m}; 0{,}126; 4x^2/13{,}39^2 + 4y^2/13{,}28^2 = 10^{14}\text{m}^2]$

2 In un triangolo ABC l'angolo di vertice C è di 30°; il lato AC misura L e il lato BC misura $2L$.
Nei vertici A e B sono poste due cariche puntiformi: la carica in A è di 4,00 nC mentre quella in B è di $-6{,}44$ nC. Nel semipiano individuato dalla retta sostegno di BC non contenente il triangolo, si prende un punto P tale che $\overline{CP} = \frac{L}{2}$ e l'angolo che CP forma con il lato BC è acuto.

Determina quanto deve valere l'angolo tra CP e BC perché il potenziale in P generato dalle due cariche considerate sia nullo.

[61°]

3 Una spira circolare di rame di raggio 5,0 cm e resistenza per unità di lunghezza $\rho = 12\ \Omega/\text{m}$, si trova nel centro di una seconda spira di raggio molto grande che genera un campo magnetico uniforme e variabile nel tempo secondo la legge $B(t) = B_0 + B_1\cos(\omega t + \varphi_0)$, dove $B_0 = 0{,}50$ T, $B_1 = 0{,}22$ T e $\omega = 230$ rad/s.

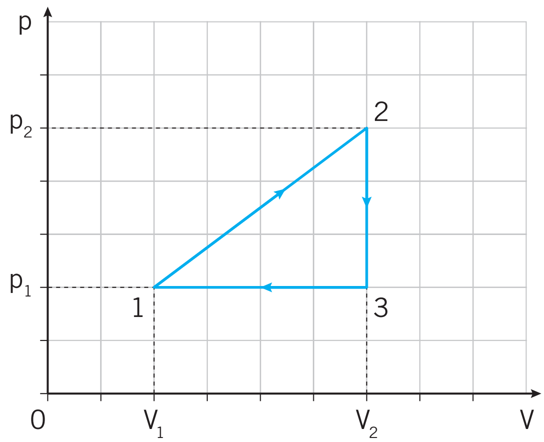
a. Determina la massima intensità di corrente che scorre nella spira.

b. Vuoi raddoppiare la corrente massima: quale deve essere il raggio della spira di rame?

$[0{,}11\ \text{A}, 10\ \text{cm}]$

4 Esamina il ciclo termodinamico mostrato in figura nel piano pressione-volume, realizzato con un gas perfetto monoatomico.

Determina il calore Q_a assorbito nel ciclo e calcolane il rendimento.



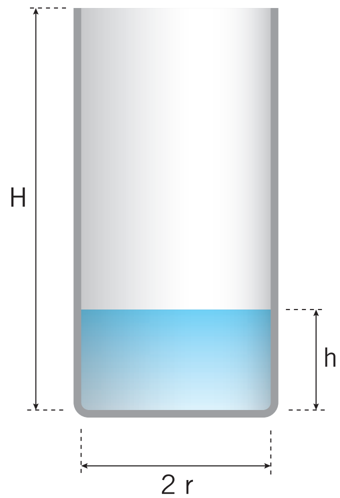
$[(p_1(V_2 - 4V_1) + p_2(4V_2 - V_1))/2; (V_2 - V_1)(p_2 - p_1)/[p_1(V_2 - 4V_1) + p_2(4V_2 - V_1)]]$

Prova 3

Problema

1 Un bicchiere, di forma cilindrica e con uno spessore trascurabile, è costituito di un materiale omogeneo e possiede una massa m. L'altezza del bicchiere è pari ad H, mentre il raggio di base vale r.

a. Determina il centro di massa del bicchiere vuoto (di spessore trascurabile) e studiane l'andamento al variare di r.
Si sceglie un bicchiere con $r = H/4$ e lo si riempie di vino di densità nota ρ, fino a raggiungere una generica altezza h.



b. Determina la posizione z_S del centro di massa del sistema costituito dal vino e dal bicchiere al variare di h e disegna l'andamento della variabile dipendente $y = z_S/H$ in funzione della variabile indipendente $x = h/H$.

c. Determina quanto deve valere h affinché il centro di massa del sistema complessivo sia alla minima altezza possibile.

$\left[H^2/(r+2H);\ y=(8+9\,ax^2)/[18(1+ax)];\ [H/(3a)]\sqrt{8a+9}-H/a\right]$

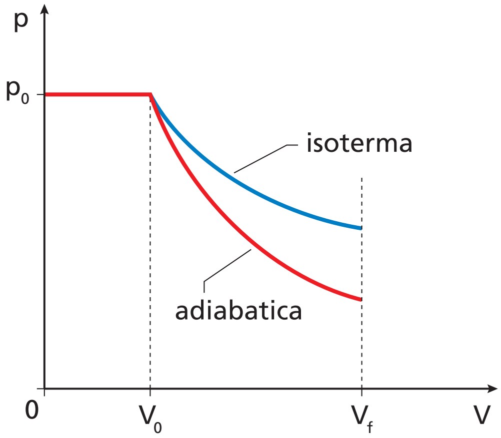
Questionario

1 Una cavità cilindrica, di spessore trascurabile, il cui asse è un segmento di retta, connette due punti arbitrari della superficie terrestre, passando quindi attraverso di essa. Un corpo è lasciato cadere all'interno della cavità. Supponi che la Terra sia sferica e che la sua densità di massa sia uniforme e pari a quella media, cioè $\rho_m = 5{,}51 \cdot 10^3$ kg/m^3. Il valore della costante di gravitazione universale è $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$m^3/(kg s^2).

Determina, trascurando fenomeni d'attrito, il tempo impiegato dal corpo per giungere all'altro estremo della cavità (puoi immaginare che il corpo sia un carrello che si muove su un piano senza attrito).

[42 minuti]

2 Nel diagramma (V, p) sono rappresentate due trasformazioni, una adiabatica e l'altra isoterma a cui è soggetto un gas di n moli.



a. Dimostra matematicamente che la curva isoterma è situata sopra la curva adiabatica.

b. Calcola l'area $\mathscr{A}$ compresa fra le due curve e la retta verticale $V = V_f$. Che cosa rappresenta l'area trovata da un punto di vista fisico?

$$\left[p_0 V_0 \ln \frac{v}{v_0} + \frac{p_0 v_0^{\gamma}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{v^{\gamma-1}} - \frac{1}{v_0^{\gamma-1}}\right)\right]$$

3 Una spira quadrata di lato 12 cm e resistenza di 5,0 Ω è immersa in un campo magnetico uniforme di 0,23 T. Al tempo $t = 0$ s, il piano individuato dalla spira è perpendicolare al campo magnetico.
Calcola la carica totale che fluisce nella spira in mezzo giro, cioè tra $t = 0$ s e $t = \pi/\omega$.

[1,3 mC]

4 In Relatività ristretta considera la funzione di $\beta = \dfrac{v}{c}$ definita come

$$y = f(\beta) = \gamma(\beta) - 1,$$

dove $\gamma(\beta)$ è il fattore di dilatazione relativistico, o fattore di Lorentz.

Dimostra che la funzione $f(\beta)$ è un infinitesimo per $\beta \to 0$ e determina il suo ordine di infinitesimo rispetto all'infinitesimo campione $y = \varphi(\beta) = \beta$.

[2]