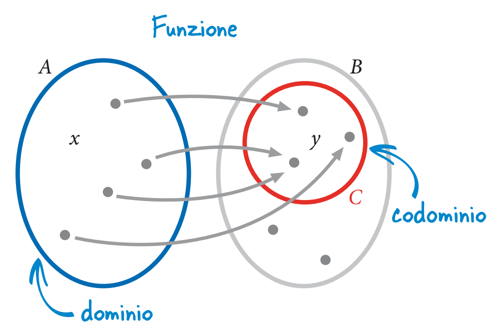
LEZIONE 19
Le funzioni

LE FUNZIONI REALI E LE LORO CARATTERISTICHE

Una funzione dall'insieme A all'insieme B è una relazione che a *ogni* elemento di A associa *uno e un solo* elemento di B.
La **funzioni numeriche** hanno come dominio e codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Sono anche dette **funzioni reali di variabile reale**.

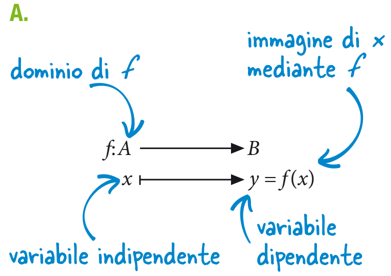


Alcune funzioni numeriche esprimono proporzionalità fra le variabili x e y.

Dato $k \in \mathbb{R} - \{0\}$:

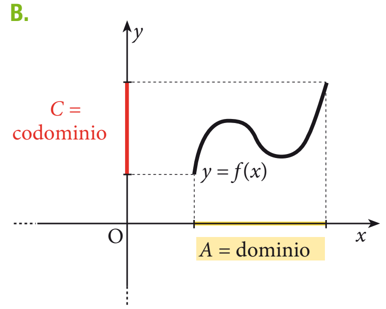
- $y = kx$ esprime la **proporzionalità diretta**;
- $y = \dfrac{k}{x}$ esprime la **proporzionalità inversa**;
- $y = kx^2$ esprime la **proporzionalità quadratica**;
- $y = ax + b$ con $a, b \in \mathbb{R}$ esprime la **funzione lineare**.

A.



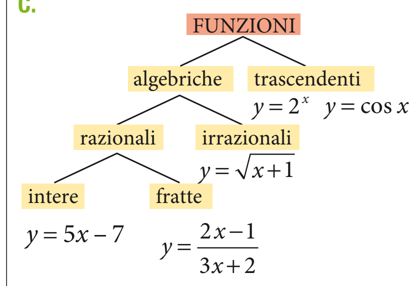
Terminologia delle funzioni numeriche.

B.



Rappresentazione grafica di $f(x)$ del dominio $D = A$ e del codominio $C = \{f(x) \mid x \in A\}$

C.



Classificazione delle funzioni reali di variabile reale.

Dominio naturale di una funzione: è il più ampio sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che può essere preso come dominio. È costituito da tutti i valori per i quali non perde significato l'espressione analitica che definisce la funzione. È anche detto **campo di esistenza**.

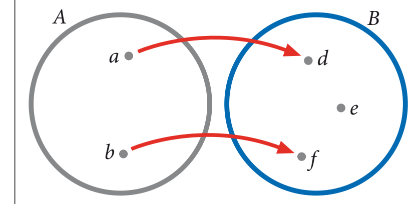
Valore assoluto: $y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \le 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. È un esempio di **funzione definita per casi**.

a è **zero** di una funzione $y = f(x)$ se $f(a) = 0$.

LE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

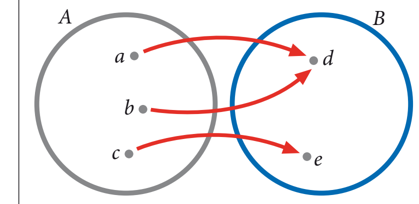
Una funzione da A a B può essere iniettiva, suriettiva, biettiva.

A.



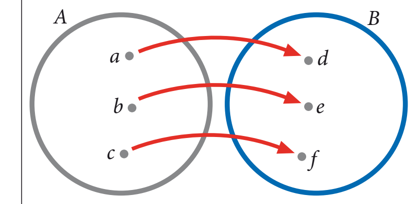
Funzione **iniettiva**: a *ogni* elemento di B arriva *al più una* freccia.

B.



Funzione **suriettiva**: a *ogni* elemento di B arriva *almeno una* freccia.

C.



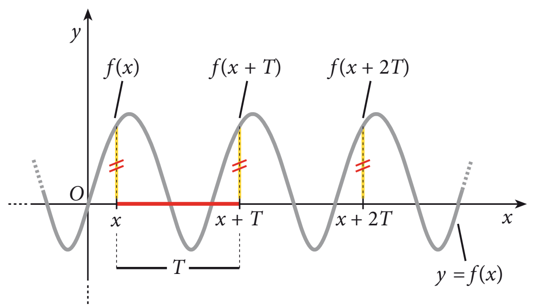
Funzione **biettiva**: a *ogni* elemento di B arriva *una e una sola* freccia.

Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:

- **crescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) < f(x_2)$;
- **decrescente in senso stretto** in un intervallo $I \subseteq D$, se $\forall x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

Se la funzione è crescente o decrescente **in senso lato**, le considerazioni sono analoghe, ma valgono rispettivamente le relazioni $f(x_1) \le f(x_2)$ e $f(x_1) \ge f(x_2)$.

Una funzione si dice **monotòna** in un intervallo del suo dominio se in esso è sempre crescente o sempre decrescente.



Una funzione $y = f(x)$ si dice **periodica** di periodo $T\,(T > 0)$ se: $f(x) = f(x + kT), \forall k \in \mathbb{Z}$.

Una funzione $y = f(x)$, di dominio D, si dice:

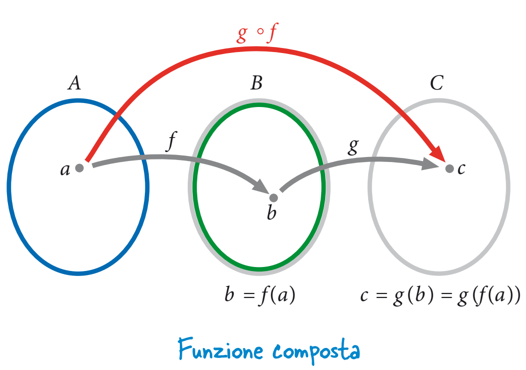
- **pari** se $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D$;
- **dispari** se $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D$.

$y = x^2$ è una funzione pari, $y = x^3$ è una funzione dispari.

Funzione inversa: se indichiamo con f una funzione e con f^{-1} la sua inversa, si ha: $b = f^{-1}(a) \Leftrightarrow a = f(b)$.

Una funzione ammette la funzione inversa se e solo se è biettiva.

La funzione inversa di $f(x) = 5x - 7$ è: $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+7)}{5}$.



Funzione composta: date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, la funzione composta $g \circ f : A \to C$ associa a ogni elemento $a \in A$ un elemento $c \in C$ così ottenuto:

- ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
- a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

Se $C = A$, possiamo definire sia $g \circ f$ che $f \circ g$.
In generale, $g \circ f \ne f \circ g$.

LE SUCCESSIONI NUMERICHE

Una **successione numerica** è una funzione a che associa a ogni numero naturale un numero reale:
$a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}, \quad n\to a_n$.

$a_n = 2n+1$; 1, 3, 5, 7, ...

n si chiama indice della successione e a_n termine della successione.

Una successione è detta:
- **crescente** se $a_n < a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$;
- **decrescente** se $a_n > a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$;
- **costante** se $a_n = a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$;
- **crescente in senso lato** se $a_n \le a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$;
- **decrescente in senso lato** se $a_n \ge a_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}$.

LE PROGRESSIONI ARITMETICHE

Una successione a_n si dice **progressione aritmetica di ragione *d*** se $a_{n+1}-a_n=d, \forall n\in\mathbb{N}$.
esempio: $9, 12, 15, 18, 21, \dots; d=3$.
Se consideriamo n numeri consecutivi di una progressione aritmetica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi** della progressione.

Una progressione aritmetica di ragione d è:
- **crescente** se $d>0$;
- **decrescente** se $d<0$;
- **costante** se $d=0$.

Teorema. La somma S_n dei primi n termini di una progressione aritmetica è: $S_n = n\cdot\dfrac{a_1+a_n}{2}$.

LE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

Una successione a_n si dice **progressione geometrica di ragione *q*** se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q, \forall n\in\mathbb{N}$.
esempio: $1, 2, 4, 8, 16, \dots; q=2$.
Se consideriamo n numeri consecutivi della progressione geometrica, il primo e l'ultimo termine sono detti **estremi**.

In una progressione geometrica di ragione q:
- $a_n = a_{n-1}\cdot q$ e $a_n = \dfrac{a_{n+1}}{q}$;
- $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$; $n\ge 1$;
- $a_s = a_r\cdot q^{s-r}$

Se la ragione di una progressione geometrica è positiva, la progressione è:
- **crescente** se $q>1$ e $a_n>0$, $0<q<1$ e $a_n<0$;
- **decrescente** se $0<q<1$ e $a_n>0$, $q>1$ e $a_n<0$;
- **costante** se $q=1$.

Teorema. La somma S_n dei primi n termini di una progressione geometrica, di ragione $q\ne 1$, è:

$$S_n = a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1} = a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}.$$