

IL PRODOTTO SCALARE

Definiamo un'operazione di moltiplicazione fra vettori.

Come si legge

Il simbolo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ si legge «a scalare b».

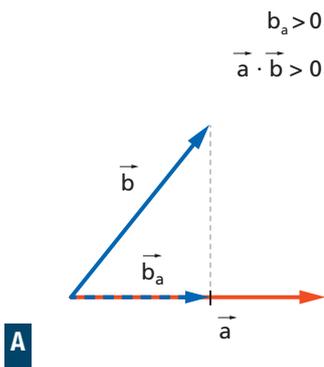
Si chiama **prodotto scalare** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ tra due vettori \vec{a} e \vec{b} il numero che si ottiene moltiplicando il modulo del primo per l'intensità del vettore componente del secondo lungo il primo.

In formula:

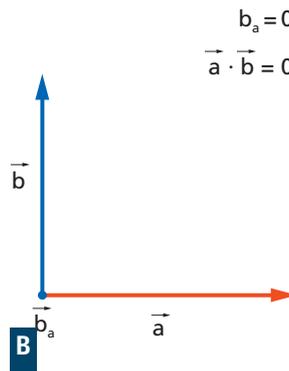
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b_a$$

prodotto scalare
modulo di \vec{a}
componente di \vec{b} lungo \vec{a}

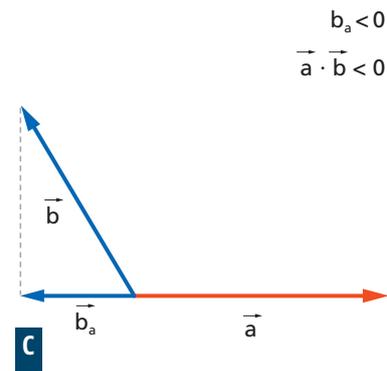
► Se l'angolo tra \vec{a} e \vec{b} è acuto, b_a si prende positivo e anche il prodotto scalare è positivo.



► Se \vec{a} e \vec{b} sono perpendicolari tra loro, b_a è nullo e anche il prodotto scalare è uguale a zero.



► Se l'angolo tra \vec{a} e \vec{b} è ottuso, b_a è considerata negativo e anche il prodotto scalare è minore di zero.



Per il prodotto scalare vale la **proprietà commutativa**:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

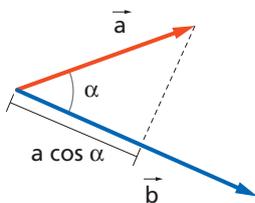
Ciò significa che $\vec{a} \cdot \vec{b}$ è dato anche dal prodotto del modulo di \vec{b} per l'intensità a_b del vettore componente di \vec{a} lungo \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a b_a = b a_b.$$

La formula trigonometrica del prodotto scalare

Se si conoscono i moduli a e b dei due vettori \vec{a} e \vec{b} e l'angolo α che essi formano, il prodotto scalare può essere espresso anche dalla formula

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$$



Il prodotto scalare di due vettori è uguale al prodotto dei loro moduli, moltiplicato per il coseno dell'angolo compreso tra di essi.

DOMANDA

I vettori \vec{c} e \vec{d} hanno la stessa direzione e lo stesso verso; i loro moduli valgono, rispettivamente, 8,0 e 6,5.

► Calcola il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{d}$.

ESERCIZI

IL PRODOTTO SCALARE

- 1** Il prodotto scalare tra due vettori è nullo:
- A quando i vettori sono uguali ma hanno verso opposto.
 - B quando i vettori sono paralleli.
 - C quando i vettori sono perpendicolari.
 - D esclusivamente quando entrambi i vettori sono nulli.
- 3** I vettori \vec{a} e \vec{b} hanno moduli $a = 6,82$ e $b = 9,47$ e formano tra loro un angolo di 45° .
- ▶ Quanto vale il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$?
- [45,7]

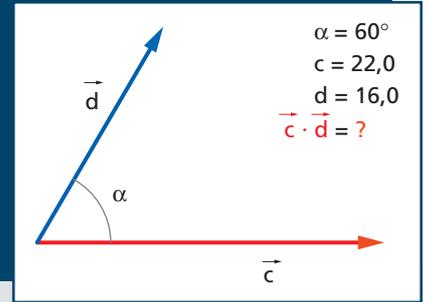
- 4** I vettori \vec{d} ed \vec{e} hanno moduli $d = 5,39$ ed $e = 4,65$ e formano tra loro un angolo di 120° .
- ▶ Quanto vale il prodotto scalare $\vec{d} \cdot \vec{e}$?
- [- 12,5]
- 5** Considera un vettore \vec{a} e altri cinque vettori \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , \vec{e} , \vec{f} , di modulo uguale ad a , orientati rispetto ad \vec{a} nel seguente modo: \vec{b} è parallelo ad \vec{a} con lo stesso verso, \vec{c} è parallelo ad \vec{a} ma con verso opposto, \vec{d} è perpendicolare ad \vec{a} , \vec{e} è inclinato di 30° rispetto ad \vec{a} e \vec{f} è inclinato di 120° rispetto ad \vec{a} .
- ▶ Ordina, dal più piccolo al più grande, i valori dei prodotti scalari di \vec{a} con i cinque vettori elencati.
- [$\vec{a} \cdot \vec{c} = -a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{f} = -0,5 a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{d} = 0$; $\vec{a} \cdot \vec{e} = 0,87 a^2$; $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^2$]

2 PROBLEMA SVOLTO

Calcolo di un prodotto scalare

I due vettori \vec{c} e \vec{d} formano un angolo di 60° . I loro moduli sono $d = 16,0$ e $c = 22,0$.

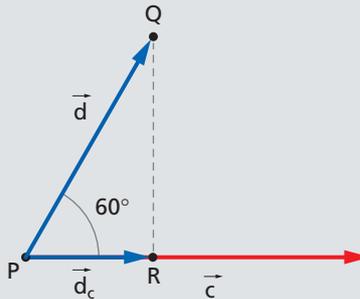
- Calcola il prodotto scalare $\vec{c} \cdot \vec{d}$.



Dati e incognite

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Modulo del vettore \vec{c}	c	16,0	
	Modulo del vettore \vec{d}	d	22,0	
	Angolo tra \vec{c} e \vec{d}	α	60°	
INCOGNITE	Prodotto scalare	$\vec{c} \cdot \vec{d}$?	

Ragionamento



- Disegniamo \vec{c} , \vec{d} e \vec{d}_c . Con l'angolo di 60° , i vettori \vec{d} e \vec{d}_c hanno lo stesso verso, per cui d_c ha segno positivo.
- PQR è un triangolo rettangolo, metà di un triangolo equilatero.

Risoluzione

Il lato $\overline{PR} = d_c$ è la metà del lato $\overline{PQ} = d$

$$d_c = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2} \times 22,0 = 11,0$$

Ora si sostituiscono i valori numerici nella formula del prodotto scalare

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = cd_c = 16,0 \times 11,0 = 176$$

Controllo del risultato

Usando la formula trigonometrica otteniamo $\vec{c} \cdot \vec{d}$ in un secondo modo:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = cd \cos \alpha = 22,0 \times 16,0 \times \cos(60^\circ) = 352 \times \frac{1}{2} = 176.$$

Naturalmente, abbiamo ottenuto lo stesso risultato di prima.