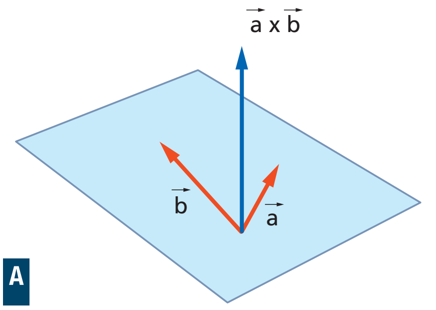
IL PRODOTTO VETTORIALE

Come si legge
Il simbolo $\vec{a} \times \vec{b}$ si legge «a vettore b».

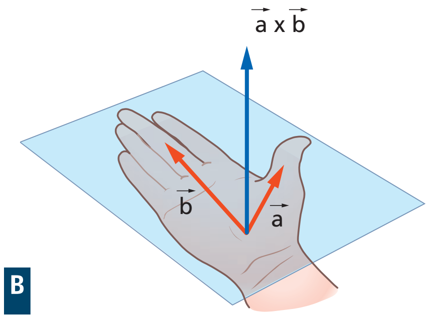
Definiamo la seconda operazione di moltiplicazione fra vettori, detta *prodotto vettoriale*, che dà come risultato un vettore.

Dati due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, il loro **prodotto vettoriale** $\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore che ha:

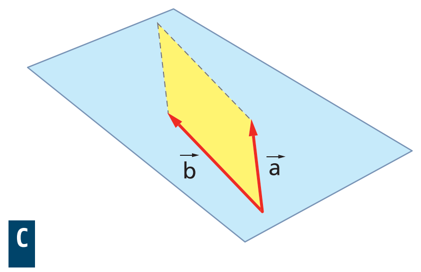
- direzione perpendicolare al piano che contiene i due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$;



- verso dato dalla *regola della mano destra* (illustrata nella figura);



- modulo uguale all'area del parallelogramma generato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



Secondo la **regola della mano destra**, se si pone il pollice della mano destra nel verso del vettore $\vec{a}$ e le altre dita nel verso di $\vec{b}$, il vettore $\vec{a} \times \vec{b}$ è uscente dal palmo della mano.

Se, invece di $\vec{a} \times \vec{b}$, calcoliamo $\vec{b} \times \vec{a}$ otteniamo come risultato un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso modulo, ma verso opposto. Quindi, per il prodotto vettoriale vale la **proprietà anticommutativa**:

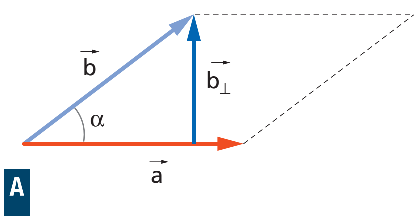
$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}.$$

Il modulo del prodotto vettoriale

L'area di un parallelogramma è data dal prodotto della base per l'altezza.

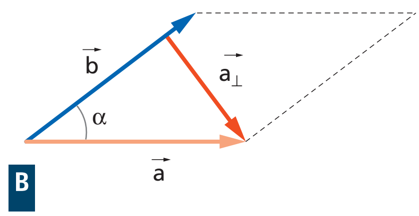
- Scegliendo come base il vettore $\vec{a}$, l'altezza è data da $b_\perp$, il valore del componente di $\vec{b}$ perpendicolare ad $\vec{a}$. In questo caso si ha:

$$\text{modulo di } \vec{a} \times \vec{b} = ab_\perp .$$



- Scegliendo come base il vettore $\vec{b}$, l'altezza è data da $a_\perp$, il valore del componente di $\vec{a}$ perpendicolare a $\vec{b}$. In questo caso si ha:

$$\text{modulo di } \vec{a} \times \vec{b} = ba_\perp .$$



Se si conosce l'angolo α formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ si ha $b_\perp = b \operatorname{sen} \alpha$ e $a_\perp = a \operatorname{sen} \alpha$: il modulo del prodotto vettoriale è dato anche dalla formula $ab \operatorname{sen} \alpha$. In definitiva, dato il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, si ha:

$$c = ab_\perp = ba_\perp = ab \operatorname{sen} \alpha$$

DOMANDA

I vettori $\vec{c}$ e $\vec{d}$ hanno la stessa direzione e lo stesso verso; i loro moduli valgono, rispettivamente, 8,0 e 6,5.

- Determina il modulo del prodotto vettoriale $\vec{c} \times \vec{d}$.

ESERCIZI

IL PRODOTTO VETTORIALE

1 **Test.** Stai organizzando un'escursione in montagna con alcuni tuoi amici e, per capire quanto distano in linea d'aria due rifugi dalla stazione terminale di una seggiovia, tracci i due vettori posizione, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, dalla stazione ai rifugi. Che cosa esprime il prodotto vettoriale di questi due vettori?

A L'area della zona di montagna (sulla cartina!), a forma di parallelogramma, definita dai due vettori.
B La direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori.
C Il modulo del vettore somma di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
D Nessuna delle precedenti risposte è corretta.

2 **Vero o Falso?**

a. Il risultato del prodotto vettoriale tra due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è sempre maggiore del risultato del prodotto scalare tra gli stessi vettori. V F

b. Il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ha intensità opposta a quella del vettore $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$. V F

3 Il vettore $\vec{u}$ è rivolto verso Est mentre il vettore $\vec{v}$ forma con $\vec{u}$ un angolo di 60° in senso antiorario (cioè verso Nord). I loro moduli sono $u = 15$ e $v = 12$.

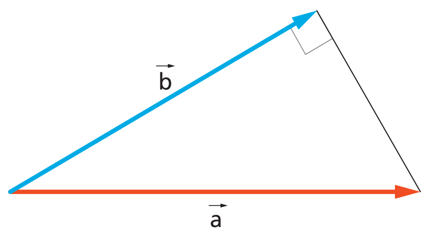
▶ Determina l'intensità, la direzione e il verso del vettore $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

[$1,6 \times 10^2$ unità]

4 I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ costituiscono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo. Il modulo di $\vec{a}$ vale 10,0 unità e l'altro cateto del triangolo è lungo 5,0 unità. Calcola:

▶ l'ampiezza dell'angolo formato dalle direzioni dei due vettori;
▶ il modulo del vettore $\vec{b}$;
▶ il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$.

[30°; 8,7 unità; 44 unità]

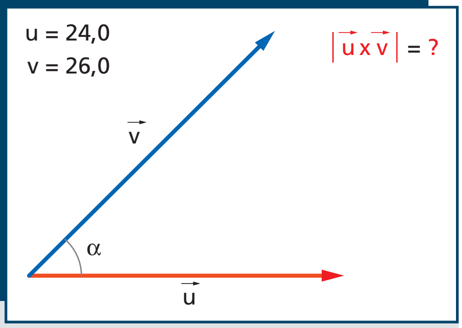


5 PROBLEMA SVOLTO

Modulo del prodotto vettoriale

Il due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formano un angolo di 45°. I loro moduli sono $u = 24,0$ e $v = 26,0$.

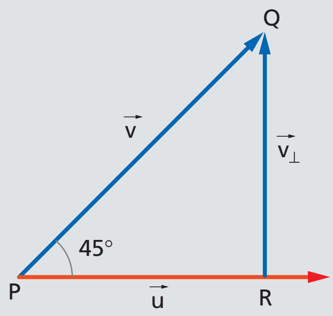
- Calcola il modulo m del prodotto vettoriale $\vec{u} \times \vec{v}$.



Dati e incognite

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Modulo del vettore $\vec{u}$	u	24,0	
	Modulo del vettore $\vec{v}$	v	26,0	
	Angolo tra $\vec{u}$ e $\vec{v}$	α	45°	
INCOGNITE	Modulo del prodotto vettoriale	m	?	

Ragionamento



- Disegniamo $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{v}_\perp$. Si ottiene un triangolo PQR rettangolo, metà di un quadrato.

Risoluzione

Il lato $\overline{RQ} = v_\perp$ è uguale al lato $\overline{PQ} = v$ diviso per $\sqrt{2}$

$$v_\perp = \frac{\sqrt{2}}{2} v = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 26{,}0 = 18{,}4$$

Ora si sostituiscono i valori numerici nella formula per il modulo del prodotto vettoriale

$$m = u v_\perp = 18{,}0 \times 18{,}4 = 331$$

Controllo del risultato

Usando la formula trigonometrica otteniamo m in un secondo modo:

$$m = uv \operatorname{sen} \alpha = 24{,}0 \times 26{,}0 \times \operatorname{sen}(45^o) = 624 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 442.$$

Anche con la formula trigonometrica si ottiene lo stesso risultato.