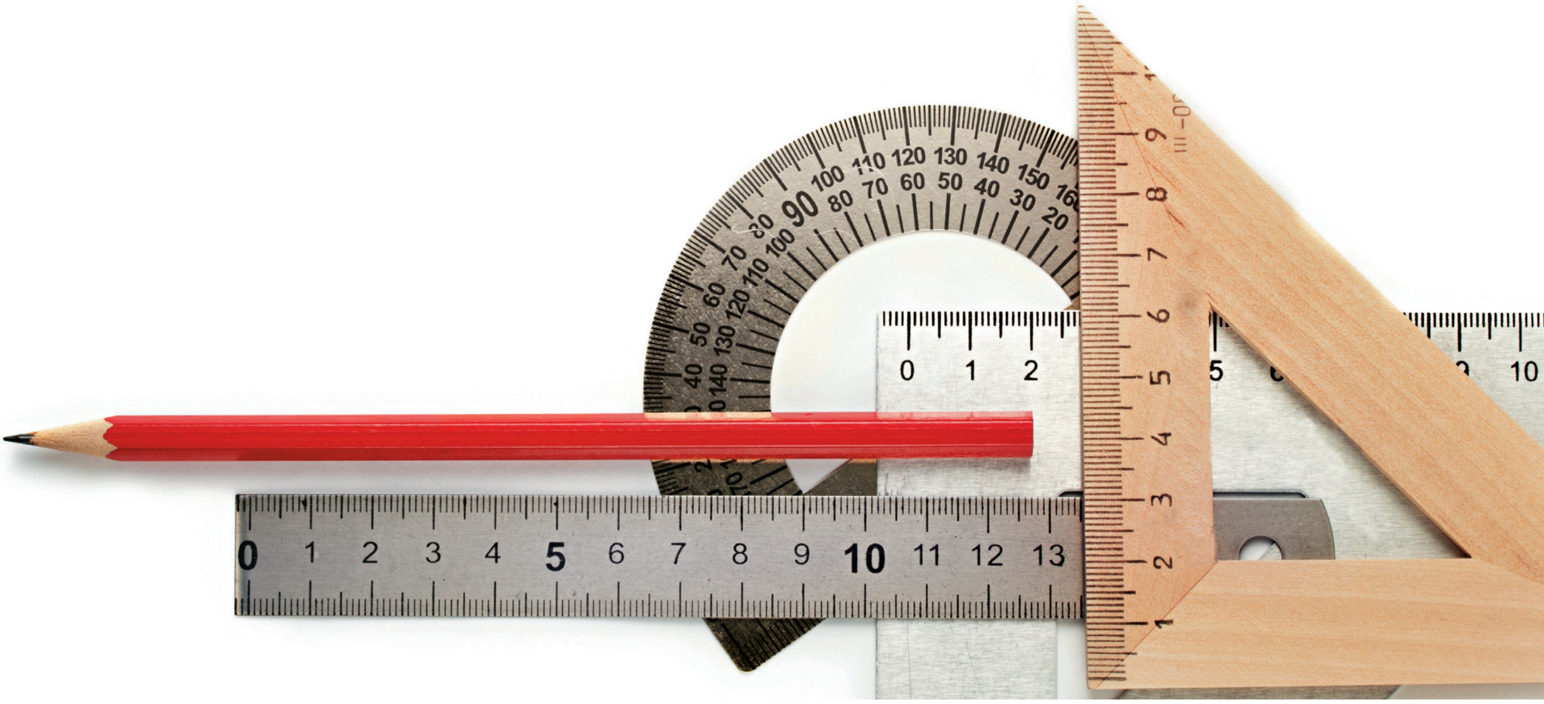
STRUMENTI MATEMATICI



1. I RAPPORTI

- In una scuola ci sono 300 studenti e 60 computer. In media, ci sono

$$300 : 60 = \frac{300}{60} = 5 \text{ studenti per ogni computer.}$$

- 3 kg di pane costano 7,5 euro. Il prezzo del pane è

$$7{,}5 \text{ euro} : 3 \text{ kg} = \frac{7{,}5 \text{ euro}}{3 \text{ kg}} = 2{,}5 \, \frac{\text{euro}}{\text{kg}} \text{ cioè } 2{,}5 \text{ euro per ogni kilogrammo.}$$

Un **rapporto** dà un'informazione relativa a un'unità e permette quindi di ricavare il valore unitario di una grandezza.

A Il rapporto studenti/computer dice quanti studenti condividono *un* computer.

B Il prezzo del pane (rapporto prezzo/massa) è il prezzo di *un* kilogrammo di pane.

Un rapporto può essere espresso sotto forma di frazione:

numeratore

$$a : b = \frac{a}{b}$$

denominatore

Come varia un rapporto

Tenendo fisso il denominatore, se il numeratore aumenta, il rapporto aumenta.

$$\frac{a\uparrow}{b} = r\uparrow$$

Per esempio, teniamo fisso il denominatore (10) e aumentiamo il numeratore:

$$\frac{60}{10} = 6 \quad \frac{80}{10} = 8 \quad \frac{100}{10} = 10.$$

Tenendo fisso il numeratore, se il denominatore aumenta, il rapporto diminuisce.

$$\frac{a}{b\uparrow} = r\downarrow$$

Per esempio, teniamo fisso il numeratore (60) e aumentiamo il denominatore:

$$\frac{60}{2} = 30 \quad \frac{60}{5} = 12 \quad \frac{60}{10} = 6.$$

2. LE PROPORZIONI

Una **proporzione** è un'uguaglianza di rapporti.

medi

$$3 : 2 = 6 : 4 \quad \text{oppure} \quad \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

estremi

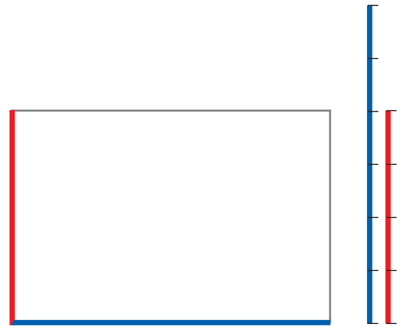
Entrambi i rapporti sono uguali a 1,5.

A 3 e 2 sono i lati di un rettangolo. Il loro rapporto è:

$$3:2 = 1,5$$

B 6 e 4 sono i lati di un rettangolo simile. Anche il loro rapporto è:

$$6:4 = 1,5$$



- Se l'incognita x è un medio, il suo valore è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio:

$$6:4 = x:10 \qquad \left(\text{cioè } \frac{6}{4} = \frac{x}{10}\right) \qquad x = \frac{6 \times 10}{4}.$$

- Se l'incognita x è un estremo, il suo valore è uguale al prodotto dei medi diviso per l'altro estremo:

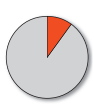
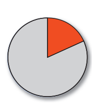
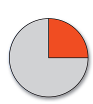
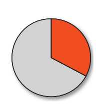
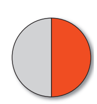
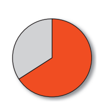
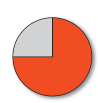
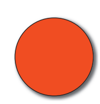
$$9:3 = 6:x \qquad \left(\text{cioè } \frac{9}{3} = \frac{6}{x}\right) \qquad x = \frac{3 \times 6}{9}.$$

3. LE PERCENTUALI

La **percentuale** è un rapporto che ha come denominatore 100.

$$25\% = \frac{25}{100} = 0,25.$$

Il simbolo % significa «fratto 100», cioè «diviso per 100».

PERCENTUALE	10%	2	25%	$33,\bar{3}\%$	50%	$66,\bar{6}\%$	75%	100%
NUMERO DECIMALE	0,1	0,2	0,25	0,33…	0,5	0,66…	0,75	1
FRAZIONE	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$
GRAFICO A TORTA								

- **Quanto vale la percentuale di un numero dato**. Il 30% di 1200 è

$$\frac{30}{100} \times 1200 = 360.$$

La preposizione *di* indica una moltiplicazione.

- **Quanto vale in percentuale un numero rispetto a un altro**. In una classe di 25 persone 20 hanno il telefonino. Quanti ragazzi in percentuale hanno il telefonino?

$$20:25 = x:100$$

$$x = \frac{20 \times 100}{25} = 80 \qquad \Rightarrow \qquad 80\%.$$

- **Quanto vale un numero di cui si conosce il valore di una sua percentuale**. Quest'anno sono caduti 40 mm di pioggia, che sono l'80% rispetto a un anno fa. Quanti mm di pioggia sono caduti l'anno scorso?

$$40:x = 80:100$$

$$x = \frac{40 \times 100}{80} = 50 \qquad \Rightarrow \qquad 50\,\text{mm}\,.$$

Aumento in percentuale

- C'erano 20 studenti, che poi sono aumentati del 10%. Sono diventati

$$\underbrace{20}_{\text{prima}} + \overbrace{\frac{10}{100} \times 20}^{\text{aumento del 10\%}} = 20 + 2 = \underbrace{22}_{\text{dopo}}$$

Quindi l'aumento è stato di 2 studenti.

- C'erano 20 studenti, che poi sono aumentati del 100%. Sono diventati

$$20 + \frac{100}{100} \times 20 = 40.$$

Se una quantità aumenta del 100%, raddoppia; del 200%, triplica…

Diminuzione in percentuale

- C'erano 20 studenti, che poi sono diminuiti del 10%. Sono diventati

$$\underbrace{20}_{\text{prima}} - \underbrace{\frac{10}{100} \times 20}_{\text{diminuzione del 10\%}} = \underbrace{18}_{\text{dopo}}$$

Quindi la diminuzione è stata di 2 studenti.

- C'erano 20 studenti, che poi sono diminuiti del 100%. Sono diventati

$$20 - \frac{100}{100} \times 20 = 0.$$

Se una quantità diminuisce del 100%, diventa zero.

Una quantità positiva, come il numero degli studenti, non può diminuire più del 100%. Quindi non ha senso dire che il numero dei delitti compiuti in un anno è diminuito del 200%.

4. I GRAFICI

Un grafico rappresenta in modo visivo una relazione tra due grandezze. Per costruire un grafico si può partire da una tabella o da una formula.

Dalla tabella al grafico

La **tabella** seguente riporta i valori della temperatura in funzione del tempo.

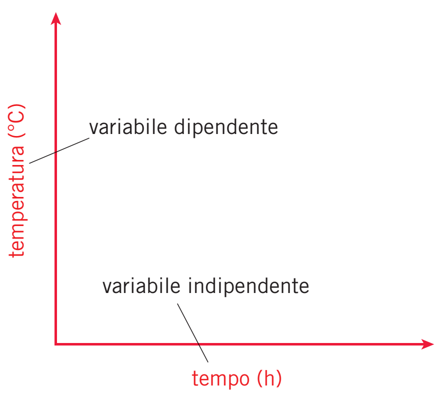
grandezza

unità di misura

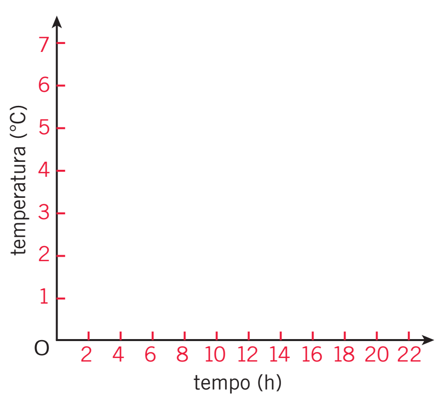
intestazione

TEMPO (h)	TEMPERATURA (°C)
0	4
2	3
4	3
6	2
8	1
10	2
12	6
14	7
16	6
18	6
20	5
22	4

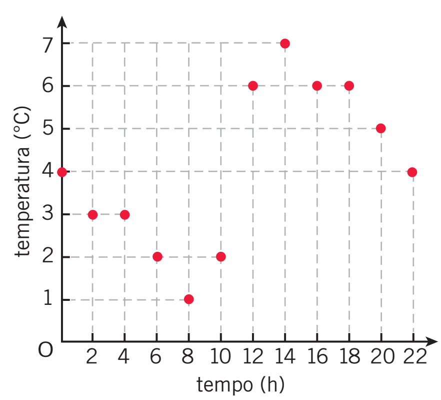
A Per costruire il grafico: si tracciano gli assi e per ciascuno si scrivono grandezza e unità di misura;



B si scelgono, a seconda dei dati, la scala sull'asse orizzontale e quella sull'asse verticale;



C si riportano nel piano cartesiano le coppie di valori: ciascuna di esse individua un punto.



L'asse orizzontale (asse delle *ascisse*) rappresenta la variabile *indipendente*, quello verticale (asse delle *ordinate*) la variabile *dipendente*.

La scala si sceglie in modo da distribuire i dati sullo spazio a disposizione:

- un'unità in orizzontale → 2 h, cioè 2 ore (scala orizzontale);
- un'unità in verticale → 1 °C, cioè un grado Celsius (scala verticale).

Le tacche sugli assi sono in corrispondenza a numeri semplici:

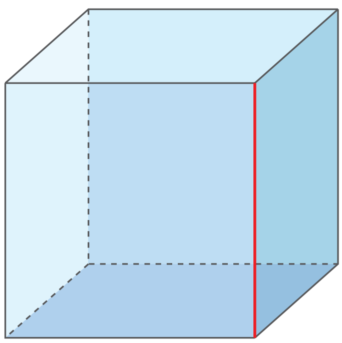
2, 4, 6... in orizzontale;
1, 2, 3... in verticale.

Dalla formula al grafico

Una tabella contiene un numero finito di dati. Per esempio, la **tabella** sotto ha 4 coppie di dati. Una formula permette invece di raccogliere una quantità di dati infinita.

A Data la **formula** del volume del cubo:

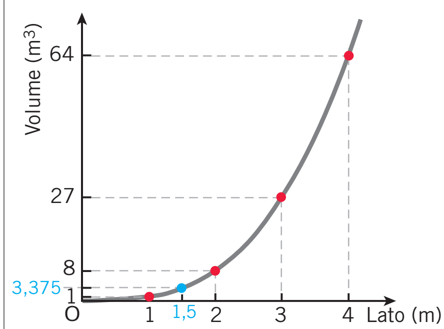
$$V = l^3,$$



B costruiamo una delle possibili **tabelle**, assegnando al lato i valori 1, 2, 3… metri.

Lato (m)	Volume (m^3)
1	1
2	8
3	27
4	64

C Rappresentiamo i dati della tabella in un **grafico** e congiungiamo con una linea continua i punti.



Partendo dalla formula, possiamo controllare che la linea tracciata passi davvero per i punti individuati.

Per esempio, al lato 1,5 m corrisponde il volume (1,5 m) × (1,5 m) × (1,5 m) = 3,375 m^3; quindi il grafico deve passare molto vicino al punto (1,5; 3,375). Altrimenti, dobbiamo correggere la curva.

5. LA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

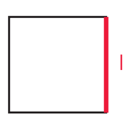
Due grandezze x e y sono **direttamente proporzionali** se:

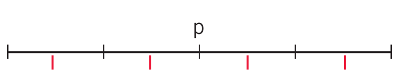
- quando x raddoppia, y raddoppia;
- quando x triplica, y triplica…

In un quadrato il perimetro è direttamente proporzionale al lato.

A Il perimetro del quadrato è 4 volte il lato:

$$p = 4\,l$$



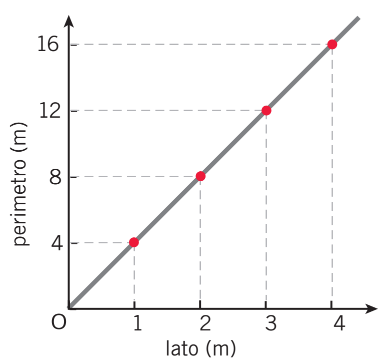


B Raddoppiando il lato, il perimetro raddoppia; triplicando il lato, il perimetro triplica…

Lato (m)	Perimetro (m)
1	1
2	8
3	27
4	64

×2 ×3 ×2 ×3

C Il grafico del perimetro in funzione del lato è una retta che passa per l'origine.



In ogni quadrato il rapporto tra il perimetro e il lato è costante, perché è sempre uguale a 4:

$$\frac{p}{l} = 4.$$

Per due grandezze x e y **direttamente proporzionali** valgono le seguenti proprietà:

- la formula che le lega ha la forma:

$$y = k\,x$$

- il loro rapporto è costante:

$$\frac{y}{x} = k$$

- il grafico è una retta che passa per l'origine.

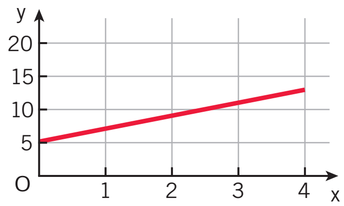
La massa e il volume di una sostanza sono direttamente proporzionali: la massa di due cucchiai di zucchero è il doppio della massa di un cucchiaio… Il rapporto tra la massa e il volume è costante ed è uguale alla densità:

$$\frac{m}{V} = d.$$

La dipendenza lineare

Due grandezze x e y sono linearmente dipendenti quando sono legate dalla formula

$$y = k\,x + q$$



dove k e q sono costanti. Per esempio, se $k = 2$ e $q = 5$,

$$y = 2x + 5.$$

Il grafico a sinistra è una retta che passa per il punto (0, 5).

Il grafico di due grandezze linearmente dipendenti è una retta.

Quando $q = 0$, x e y sono direttamente proporzionali. Quindi la proporzionalità diretta è un caso particolare di dipendenza lineare.

6. LA PROPORZIONALITÀ INVERSA

Due grandezze x e y sono **inversamente proporzionali** se:

- quando x raddoppia, y diventa la metà;
- quando x triplica, y diventa un terzo…

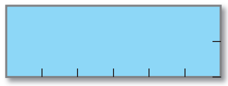
La base e l'altezza di rettangoli che hanno la stessa area sono inversamente proporzionali. Consideriamo i rettangoli che hanno l'area di 12 cm^2. Ce ne sono infiniti. Per esempio:

A base: 12 cm altezza: 1 cm

$$12 \times 1 = 12,$$

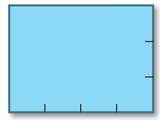
B base: 6 cm altezza: 2 cm

$$6 \times 2 = 12,$$



C base: 4 cm altezza: 3 cm

$$4 \times 3 = 12.$$



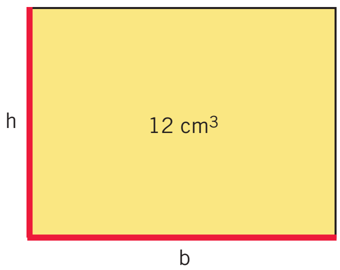
Dalla formula dell'area del rettangolo

$$A = b\,h$$

ricaviamo la formula che dà la base in funzione dell'altezza.

A La base è uguale all'area diviso l'altezza:

$$b = \frac{12\ \text{cm}^2}{h}.$$

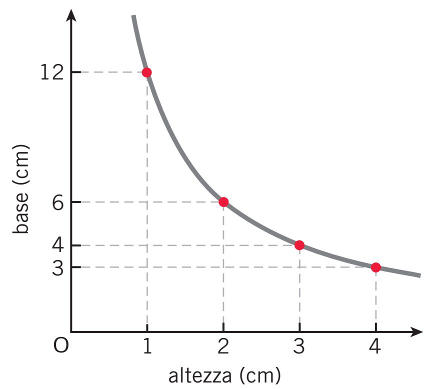


B Raddoppiando l'altezza, la base diventa metà; triplicando l'altezza, la base diventa un terzo…

Altezza (cm)	Base (cm)
1	12
2	6
3	4
4	3

$\times 2$ $\times 3$ $\times 1/2$ $\times 1/3$

C Il grafico della base in funzione dell'altezza è un arco di iperbole equilatera.



In tutti i rettangoli che hanno la stessa area il prodotto tra la base e l'altezza è costante. Nell'esempio, il prodotto è:

$$b\,h = 12\ \text{cm}^2$$

Per due grandezze x e y **inversamente proporzionali** valgono le seguenti proprietà:

- la formula che le lega ha la forma

$$y = \frac{k}{x}$$

- il loro prodotto è costante:

$$xy = k$$

- il grafico è un ramo di iperbole.

La velocità è inversamente proporzionale al tempo nel quale si percorre una determinata distanza. Per esempio, un'automobile che percorre 120 km in 2 h ha una velocità media di 60 km/h. Se impiega:

- 4 ore (il doppio), la velocità è 30 km/h (la metà);
- 6 ore (il triplo), la velocità è 20 km/h (un terzo).

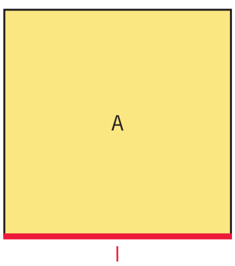
7. LA PROPORZIONALITÀ QUADRATICA DIRETTA E INVERSA

Una grandezza y è **direttamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x se:
- quando x raddoppia, y diventa quattro volte più grande;
- quando x triplica, y diventa nove volte più grande…

In un quadrato l'area è direttamente proporzionale al quadrato del lato.

A L'area del quadrato è uguale al prodotto del lato per se stesso:

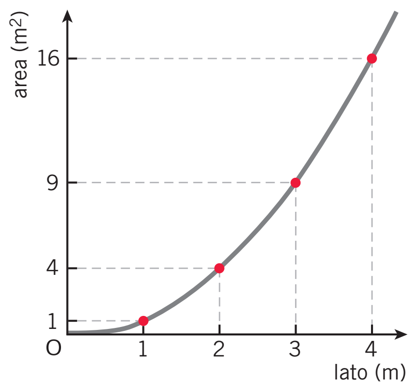
$$A = l^2.$$



B Raddoppiando il lato, l'area diventa 4 volte più grande; triplicando il lato, l'area diventa 9 volte più grande…

Lato (m)	Area (m^2)
1	1
2	4
3	9
4	16

C Il grafico dell'area del quadrato in funzione del lato è un arco di parabola.



In ogni quadrato il rapporto tra l'area e il quadrato del lato è costante, perché è sempre uguale a 1:

$$\frac{A}{l^2} = 1.$$

Quando una grandezza y è **direttamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x, valgono le seguenti proprietà:
- la formula che le lega ha la forma

$$y = k\,x^2$$

- il rapporto tra y e il quadrato di x è costante:

$$\frac{y}{x^2} = k$$

- il grafico è un ramo di parabola.

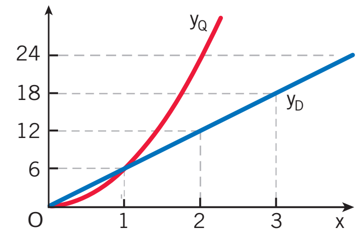
Nell'esempio dell'area del quadrato, $k = 1$:

$$y = l^2.$$

Confronto tra proporzionalità diretta e quadratica

I due tipi di proporzionalità rappresentano due diversi modi di crescere: uno più lento (la proporzionalità diretta) e uno più rapido (la proporzionalità quadratica). Confrontiamo i grafici, a destra, di queste due funzioni:

$$y_D = 6x \quad (\text{diretta}) \qquad\qquad y_Q = 6x^2 \quad (\text{quadratica}).$$



- Quando x è piccola, la y quadratica è minore della y diretta.
- Quando x diventa grande, la y quadratica è molto maggiore della y diretta.
- Inoltre, la differenza tra le due aumenta al crescere di x.

La proporzionalità quadratica inversa

Una grandezza y è **inversamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x se è costante il prodotto tra y e x^2.

L'altezza h di un cono circolare di volume V fissato è inversamente proporzionale al quadrato del raggio di base r. Infatti la formula che lega h e r è

$$\frac{1}{3}\pi h r^2 = V \Rightarrow hr^2 = \frac{3V}{\pi}.$$

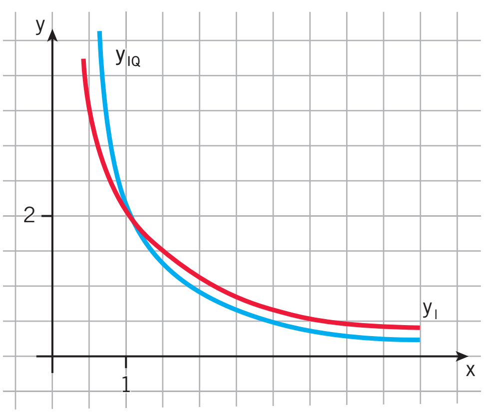
In ogni cono circolare di volume fissato, il prodotto di h per r^2 è costante.

Quando una grandezza y è **inversamente proporzionale al quadrato** di una grandezza x, valgono le seguenti proprietà:
- quando x raddoppia, y diventa quattro volte più piccolo; quando x triplica, y diventa nove volte più piccolo...
- la formula che li lega ha la forma

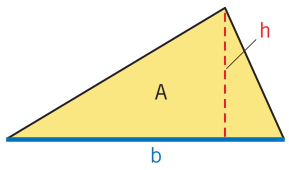
$$y = \frac{k}{x^2}.$$

La figura sotto mostra, per confronto, i grafici delle funzioni

$$y_I = \frac{2}{x} \quad \text{e} \quad y_{IQ} = \frac{2}{x^2}.$$



- Per x abbastanza piccolo y_{IQ} rimane al di sopra di y_I.
- Per grandi valori di x y_{IQ} si avvicina allo zero più rapidamente di y_I.



8. COME SI LEGGE UNA FORMULA

Una formula è un'uguaglianza tra una grandezza (a sinistra dell'uguale) e un'espressione che contiene altre grandezze e numeri (a destra). Per esempio, la grandezza «area A di un triangolo», nella **figura** a sinistra, è uguale all'espressione «prodotto del numero $\frac{1}{2}$ per la base b e per l'altezza h»:

$$A = \frac{1}{2} bh.$$

Leggere una formula significa descrivere come varia la grandezza a sinistra dell'uguale, facendo variare una alla volta le grandezze a destra.

Proporzionalità diretta

- Teniamo fissa la base (per esempio, $b = 10$ cm) e facciamo variare l'altezza. La formula diventa

$$A = (5\ \text{cm}) \times h.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx$, l'area è direttamente proporzionale all'altezza.

- Teniamo fissa l'altezza (per esempio, $h = 20$ cm) e facciamo variare la base. La formula diventa

$$A = (10\ \text{cm}) \times b.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx$, l'area è direttamente proporzionale alla base.

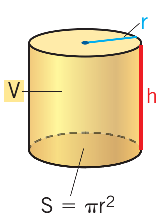
La formula

$$A = \frac{1}{2} bh$$

dice che l'area è direttamente proporzionale alla base e all'altezza.

Osserviamo che b e h compaiono a numeratore e sono elevati alla prima potenza: $b = b^1$, $h = h^1$.

Proporzionalità quadratica



Esaminiamo la formula che esprime il volume V del cilindro (**figura** a sinistra) in funzione del raggio r della base e dell'altezza h:

$$V = \pi r^2 h.$$

- Teniamo fissa l'altezza (per esempio, $h = 10$ cm) e facciamo variare la base. La formula diventa

$$V = (31{,}4\ \text{cm}) \times r^2.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = kx^2$, il volume è direttamente proporzionale al quadrato del raggio.

La formula

$$V = \pi r^2 h$$

dice che il volume è:

- direttamente proporzionale al quadrato del raggio,
- direttamente proporzionale all'altezza.

Osserviamo che r e h compaiono a numeratore: r è elevato al quadrato (r^2) e h alla prima potenza ($h = h^1$).

Proporzionalità inversa

Esaminiamo la formula che esprime la base b di un triangolo in funzione dell'area A e dell'altezza h:

$$b = \frac{2A}{h}.$$

- Teniamo fissa l'area (per esempio, $A = 5\ \text{dm}^2$) e facciamo variare l'altezza. La formula diventa

$$b = \frac{10\ \text{dm}^2}{h}.$$

Poiché ha la stessa forma di $y = \frac{k}{x}$, la base è inversamente proporzionale all'altezza.

La formula

$$b = \frac{2A}{h}$$

dice che la base è inversamente proporzionale all'altezza e direttamente proporzionale all'area.

Osserviamo che h compare al denominatore ed è elevato alla prima potenza ($h = h^1$); A compare al numeratore ed è elevato alla prima potenza ($A = A^1$).

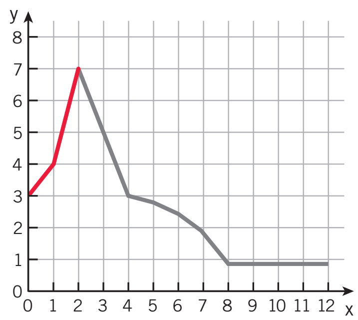
9. COME SI LEGGE UN GRAFICO

Un grafico mostra a colpo d'occhio come varia una grandezza al variare di un'altra.

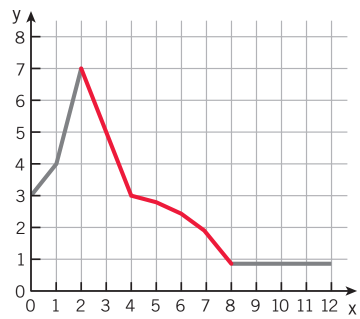
Leggere un grafico significa descrivere come varia la grandezza dell'asse verticale (*variabile dipendente*), facendo variare la grandezza dell'asse orizzontale (*variabile indipendente*).

Saper leggere un grafico consente di «far parlare» i dati, individuando andamenti e linee di tendenza.

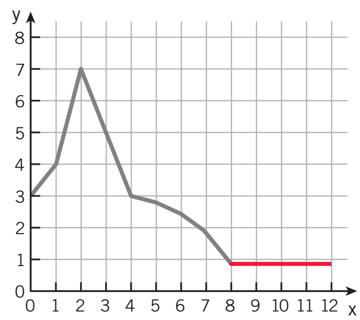
A La grandezza y aumenta quando x va da 0 a 2 e raggiunge il valore massimo per $x = 2$.



B y diminuisce, prima rapidamente (per x da 2 a 4), poi lentamente (per x da 4 a 8).



C Dal valore minimo, che raggiunge quando $x = 8$, la y resta costante per x da 8 a 12.

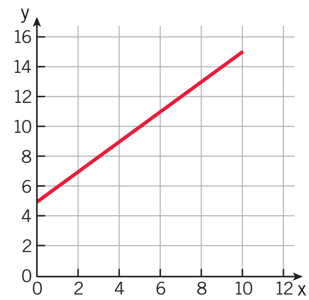


Come i grafici possono ingannare

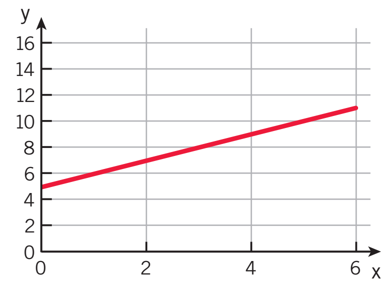
Modificando la scala, è possibile accentuare o attenuare le linee di tendenza, suggerendo una lettura in un senso o in altro del grafico.

Il cambiamento delle scale può appiattire il grafico, dando la sensazione che la variazione della y sia piccola.

A Il grafico a forma di retta mostra che la y cresce linearmente all'aumentare di x.

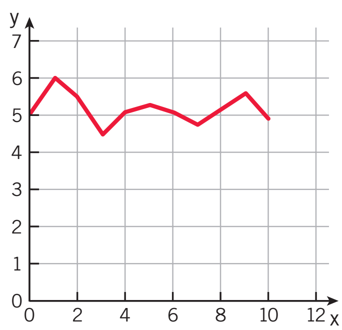


B Per dare l'impressione che la crescita sia lenta, si può dilatare la scala delle x e contrarre la scala delle y.

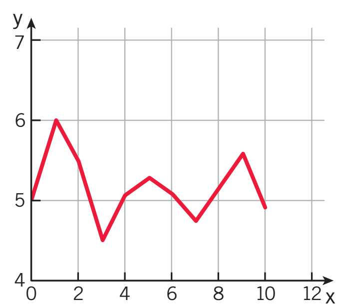


Al contrario, per suggerire che la variazione della y è grande, si contrae la scala delle x e si dilata la scala delle y. Per accentuare questa interpretazione, si può anche eliminare un pezzo di asse y, come spesso fanno i giornali.

A Il grafico mostra una piccola oscillazione dell'ordinata intorno al valore 5.



B Se si taglia il segmento da $y = 0$ a $y = 4$ e si dilata la scala delle y, si accentua l'oscillazione.



Per leggere in modo corretto un grafico bisogna guardare con attenzione le scale di entrambi gli assi e le loro unità di misura.

10. LE POTENZE DI 10

- Se l'esponente è positivo, si ha $10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ volte}}$
  Per esempio,

$$10^2 = \underbrace{10 \times 10}_{2 \text{ volte}}, \qquad 10^4 = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times 10}_{4 \text{ volte}}, \qquad 10^1 = 10.$$

- Se l'esponente è zero, si ha $10^0 = 1$
- Se l'esponente è negativo, si ha $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}$

Per esempio, $10^{-1} = \dfrac{1}{10}$, $\quad 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1000}$.

POTENZA DI 10	FRAZIONE	NUMERO	NOME
10^{-9}	$\frac{1}{10^9}$	0,000 000 001	un miliardesimo
10^{-6}	$\frac{1}{10^6}$	0,000 001	un milionesimo
10^{-3}	$\frac{1}{10^3}$	0,001	un millesimo
10^{-2}	$\frac{1}{10^2}$	0,01	un centesimo
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1	un decimo
10^0		1	uno
10^1		10	dieci
10^2		100	cento
10^3		1000	mille
10^6		1 000 000	un milione
10^9		1 000 000 000	un miliardo

Quando si scrive il risultato di una potenza di 10, bisogna stare attenti a non sbagliare il numero degli zeri. Per controllare, si può usare la seguente regola mnemonica, come si vede dalla tabella sopra.

Il risultato di una potenza di 10 contiene un numero di zeri uguali all'esponente.

Per esempio, $10^3 = 1000$ ha 3 zeri, $\quad 10^{-2} = 0{,}01$ ha 2 zeri.

Proprietà delle potenze

- **Moltiplicazione** $10^m 10^n = 10^{m+n}$

  Per esempio, $10^2 \times 10^4 = 10^6$, $\; 10^3 \times 10^{-5} = 10^{-2}$, $\; 10^{-1} \times 10^{-3} = 10^{-4}$.

- **Divisione** $\dfrac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$

Per esempio, $\dfrac{10^5}{10^2} = 10^3$, $\dfrac{10^3}{10^4} = 10^{-1}$, $\dfrac{10^2}{10^{-3}} = 10^5$.

- **Potenza** $\left(10^m\right)^n = 10^{m \times n}$

Per esempio, $(10^5)^3 = 10^{15}$, $(10^2)^{-3} = 10^{-6}$, $(10^{-2})^{-4} = 10^8$.

Espressioni con le potenze

$$2 \times 10^2 \times 3 \times 10^3 - \frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^5} + \left(3 \times 10^3\right)^2 =$$

Questa espressione contiene numeri compresi tra 0 e 10 (*coefficienti*) e potenze di 10. Per calcolarla, conviene fare prima le operazioni tra i coefficienti e poi quelle tra le potenze di 10. Così si sfruttano le proprietà delle potenze.

- **Moltiplicazione**

$$2 \times 10^2 \times 3 \times 10^3 = (2 \times 3) \times (10^2 \times 10^3) = 6 \times 10^{2+3} = 6 \times 10^5.$$

- **Divisione**

$$\frac{6 \times 10^9}{2 \times 10^5} = \frac{6}{2} \times \frac{10^9}{10^5} = 3 \times 10^{9-5} = 3 \times 10^4.$$

- **Potenza**

$$(3 \times 10^3)^2 = 3^2 \times (10^3)^2 = 9 \times 10^{3 \times 2} = 9 \times 10^6.$$

- **Addizioni e sottrazioni**

Esponenti uguali: si mantiene l'esponente e si sommano i coefficienti numerici.

$$3 \times 10^7 + 5 \times 10^7 = (3 + 5) \times 10^7 = 8 \times 10^7$$

Esponenti diversi: si riconducono le potenze all'esponente più piccolo e poi si opera la somma come è spiegato sopra:

$$4 \times 10^6 + 3 \times 10^4 + 6 \times 10^5 = 4 \times 10^2 \times 10^4 + 3 \times 10^4 + 6 \times 10^1 \times 10^4 =$$

$$= 400 \times 10^4 + 3 \times 10^4 + 60 \times 10^4 = (400 + 3 + 60) \times 104 =$$

$$= 463 \times 10^4 = 4{,}63 \times 10^6.$$

11. LE EQUAZIONI

Un'equazione è una richiesta. Per esempio, l'equazione

$$x + 2 = 3$$

chiede: «qual è il numero x che, sommato a 2, dà come risultato 3?».
x è l'*incognita*, cioè la grandezza di cui bisogna trovare il valore.

Il numero richiesto è 1. Perciò la soluzione dell'equazione è

$$x = 1.$$

Per risolvere un'equazione bisogna isolare l'incognita, cioè fare in modo che l'incognita si trovi da sola a sinistra dell'uguale. Si usano due princìpi di equivalenza.

Primo principio di equivalenza (addizione e sottrazione)

Nell'equazione precedente, per isolare l'incognita abbiamo sottratto 2 da una parte e dall'altra dell'uguale:

$$x + \cancel{2} \cancel{-2} = 3 - 2.$$

In un'equazione, si può sommare o sottrarre una stessa espressione a sinistra e a destra dell'uguale.

La nuova equazione che otteniamo ha le stesse soluzioni di quella di partenza.
Consideriamo l'equazione

$$U_2 - U_1 = Q$$

nell'incognita U_2, mentre U_1 e Q indicano numeri fissi: per esempio $U_1 = 5$ e $Q = 3$. Per isolare U_2, sommiamo U_1 a sinistra e a destra dell'uguale:

$$U_2 - \cancel{U_1} \cancel{+U_1} = Q + U_1.$$

La soluzione è

$$U_2 = Q + U_1.$$

Poiché U_1 è uguale a 5 e Q a 3, U_2 è uguale a 8.

Secondo principio di equivalenza (moltiplicazione e divisione)

Risolviamo l'equazione

$$F = m\,a$$

nell'incognita a (F e m indicano numeri fissi). Per isolare a, dividiamo per m (che supponiamo diverso da zero) a sinistra e a destra dell'uguale:

$$\frac{F}{m} = \frac{\cancel{m}\,a}{\cancel{m}}.$$

Otteniamo

$$\frac{F}{m} = a, \qquad \text{cioè} \qquad a = \frac{F}{m}.$$

In un'equazione, si può moltiplicare o dividere per una stessa espressione, diversa da zero, a sinistra e a destra dell'uguale.

- Nella formula della densità, supponiamo di conoscere il valore della densità d e del volume V e di voler ricavare la massa (incognita m):

$$d = \frac{m}{V}.$$

Moltiplicando per V i due membri dell'equazione

$$d \times V = \frac{m}{\cancel{V}} \cancel{\times V}$$

isoliamo l'incognita e otteniamo la soluzione

$$d\,V = m \qquad \text{cioè} \qquad m = d\,V.$$

- Nella formula della densità, supponiamo di conoscere il valore della densità d e della massa m e di voler ricavare il volume (incognita V):

$$d = \frac{m}{V}.$$

Prima portiamo V a numeratore, moltiplicando per V:

$$d \times V = \frac{m}{\cancel{V}} \cancel{\times V}.$$

poi dividiamo per d per isolare l'incognita:

$$\frac{\cancel{d}\,V}{\cancel{d}} = \frac{m}{d}, \qquad V = \frac{m}{d}.$$

- Ricaviamo l'incognita t nell'equazione:

$$s = \frac{1}{2} a t^2.$$

Isoliamo t^2 moltiplicando per $\frac{2}{a}$:

$$\frac{2}{a} \times s = \frac{\cancel{2}}{\cancel{a}} \times \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{a}\, t^2, \qquad \frac{2s}{a} = t^2.$$

Dopo aver riscritto l'equazione con l'incognita t a sinistra dell'uguale,

$$t^2 = \frac{2s}{a},$$

troviamo t estraendo la radice quadrata di entrambi i membri dell'equazione

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}}.$$

- Ricaviamo l'incognita v nell'equazione

$$s = s_0 + vt.$$

Applichiamo il primo principio di equivalenza per isolare il prodotto $v\,t$,

$$s - s_0 = \cancel{s}_0 + vt - \cancel{s}_0, \qquad vt = s - s_0;$$

poi, con il secondo principio, mettiamo in evidenza l'incognita dividendo per t i due membri nell'ultimo passaggio:

$$\frac{v\cancel{t}}{\cancel{t}} = \frac{s - s_0}{t}.$$

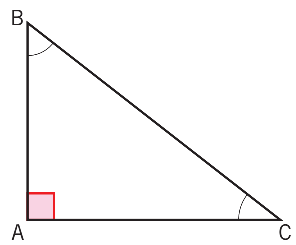
Quindi il risultato è:

$$v = \frac{s - s_0}{t}$$

12. SENO E COSENO DI UN ANGOLO

Nella figura è disegnato un triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto nel vertice A. Consideriamo uno dei suoi angoli acuti, per esempio l'angolo $\hat{C}$.

Il seno e il coseno dell'angolo $\hat{C}$ sono definiti nel modo seguente:



- il seno di $\hat{C}$ (sen $\hat{C}$) è uguale al rapporto tra il cateto opposto a $\hat{C}$ e l'ipotenusa.
- il coseno di $\hat{C}$ (cos $\hat{C}$) è uguale al rapporto tra il cateto adiacente a $\hat{C}$ e l'ipotenusa.

In formule:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \qquad e \qquad \cos\hat{C} = \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}}$$

La tabella fornisce alcuni valori del seno e del coseno di un angolo.

ANGOLO	0°	30°	45°	60°	90°
SENO	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
COSENO	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Dalle formule precedenti possiamo ricavare che

$$\overline{AB} = \overline{BC}\operatorname{sen}\hat{C} \qquad \text{e} \qquad \overline{CA} = \overline{BC}\cos\hat{C}$$

A parole, queste espressioni significano che, in un triangolo rettangolo:

- un cateto è uguale all'ipotenusa, moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto;
- un cateto è uguale all'ipotenusa, moltiplicata per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.

13. LA CALCOLATRICE SCIENTIFICA

Per risolvere un problema di fisica occorre analizzare i dati, scegliere una strategia e alla fine svolgere i calcoli con l'aiuto della calcolatrice scientifica.
In questo video *tutorial*, vengono presentate le principali caratteristiche e funzioni di una calcolatrice scientifica. E'utile conoscerle e saperle usare per svolgere correttamente i calcoli.

In particolare descriveremo:

1. la funzione del punto e della virgola;
2. l'uso delle parentesi per calcolare un'espressione numerica;
3. come si calcola l'inverso di un numero;
4. come funziona l'elevamento a potenza;
5. come si eseguono la radice quadrata e la radice cubica di un numero;
6. come si svolgono alcune funzioni goniometriche e le loro inverse.

Esistono molte marche e molti modelli di calcolatrice. E' quindi impossibile descrivere il funzionamento di ognuna di esse. Chi possiede una calcolatrice con alcuni dettagli operativi diversi da quelli presentati nell'animazione potrà comunque imparare da essa i principi di funzionamento e sarà poi in grado di adattare le procedure al proprio caso.

ESERCIZI

20 TEST INTERATTIVI CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...» ONLINE SU ZTE

Mappa dei concetti nell'eBook

PER COMINCIARE

1 **ESPERIMENTI A CASA** **Proporzionalità: ma di che tipo?**

Prendi due bicchieri cilindrici di area di base diversa e riempi il più piccolo per metà con dell'acqua. Misura l'altezza dell'acqua nel bicchiere, il diametro di base, e calcola il volume del cilindro d'acqua come "area di base per altezza". Poi versa l'acqua nell'altro bicchiere.

- Quanto vale ora il volume? Che relazione c'è fra l'area di base e l'altezza?

Guarda l'esperimento e prova a farlo tu.

2 **HO SENTITO DIRE CHE...** «Nel mondo, per ogni uomo ci sono 7 donne.»

- Fai una ricerca in Internet per stabilire se questa frase è vera o falsa.
- Esponi per punti le tue conclusioni in 10 righe: cita i siti che hai consultato e riporta dati numerici e fonti.

1. I RAPPORTI

DOMANDE SUI CONCETTI

1 Indica l'operazione necessaria per ottenere l'informazione richiesta.

- Il costo di un foglio di carta da fotocopie.
- La distanza percorsa da un'automobile con un litro di carburante.
- Il carburante necessario a un'automobile per percorrere 1 km.
- Il consumo medio di cioccolata in Italia nel 2013.

2 Perché questa frase non è corretta? «Se io aumento sia il numeratore sia il denominatore di una frazione, il risultato non cambia.»

ESERCIZI NUMERICI

3 ★ Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{16}{9} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{1}{3}$$

4 ★ Una boccetta di medicinale da 10 mL con contagocce può erogare 600 gocce di medicinale.

- Qual è in media il volume di una goccia?

[0,017 ml]

5 ★ **SPORT** **Quando Ibrahimović era nell'Inter**

Nel campionato di calcio di serie 2008/2009, Zlatan Ibrahimovic giocò con l'Inter segnando 25 reti in 35 partite.

- Quanti gol ha segnato, in media, in ogni partita?

[0,7]

2. LE PROPORZIONI

ESERCIZI NUMERICI

6 ★ A partire dai seguenti rapporti, puoi costruire 4 proporzioni. Quali?

$$\frac{1}{2};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{2};\ \frac{6}{10};\ \frac{6}{12};\ \frac{12}{24}$$

7 ★ Risolvi le proporzioni:

$10 : 14 = 25 : x$

$8,1 : 1,8 = x : 6,0$

$6,4 : x = 102,4 : 25,6$

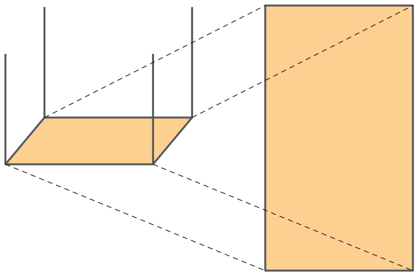
$16 : x = x : 25$

[35; 27; 1,6; 20]

8 ★ Un foglio di carta ha dimensioni rispettivamente pari a 15,0 cm e 10,5 cm.

- È possibile riprodurre su questo foglio un'immagine le cui dimensioni originarie sono rispettivamente pari a 20,0 cm e 12,0 cm, senza tagliare l'immagine né lasciare spazi bianchi?

9 ★★☆ Una stanza rettangolare è larga 4,0 m e lunga 5,2 m. Vogliamo realizzarne una piantina in scala, in modo che la larghezza della stanza risulti 16,0 cm.



▶ Qual è lunghezza della piantina?

[20,8 cm]

10 ★☆☆ **FACCIAMO DUE CONTI Quanti sono i giovani?**

Nel 2000, nel Lazio vivevano 5 300 000 persone. Di esse, 753 000 avevano meno di 15 anni. Nello stesso anno, la popolazione italiana era 57 000 000.

▶ In proporzione quante avrebbero dovuto essere le persone con meno di 15 anni che vivevano in Italia nel 2000?

[Circa 8 000 000]

3. LE PERCENTUALI

ESERCIZI NUMERICI

11 ★☆☆ Determina le percentuali indicate:

a. il 15% di 280 è 42

b. il 24% di 225 è ____________

c. il 3,6% di 115 è ____________

d. lo 0,88% di 0,900 è ____________

12 ★☆☆ Calcola la percentuale:

a. 34 rispetto a 50 è il 68%

b. 0,17 rispetto a 1,2 è il ____________

c. $2{,}9 \times 10^3$ rispetto a $7{,}5 \times 10^3$ è il ____________

d. 13,8 rispetto a 200 è il ____________

13 ★☆☆ Determina il numero che costituisce la percentuale indicata:

a. il 30% di 240 è 72

b. lo 0,85% di 6,8 è ____________

c. l'11,5% di $14{,}0 \times 10^3$ è ____________

d. il 91% di 0,80 è ____________

14 ★☆☆ Il diametro di una penna, misurato con un calibro, è di 1,015 cm con un'incertezza dello 0,5%.

▶ Qual è, in millimetri, il massimo errore che si può commettere in questa misura?

[0,05 mm]

15 ★☆☆ In 100 g d'acqua sciogliamo 2,56 g di sale da cucina.

▶ Qual è la percentuale di sale nella soluzione, cioè la percentuale del sale rispetto all'intera massa dell'acqua e del sale?

[2,50%]

16 ★☆☆ **NATURA Piombo radioattivo**

Se preleviamo 20,7 kg dell'elemento piombo in natura, in media 302 g di tale campione saranno costituiti da atomi radioattivi.

▶ Quale percentuale della massa del piombo sulla Terra è costituita da atomi radioattivi?

[1,46%]

17 ★☆☆ Nell'etichetta di un barattolo di marmellata si specifica che il peso netto è pari a 195 g e la percentuale di frutta sul totale è del 32%.

▶ Qual è la massa di frutta sull'intero prodotto?

[62 g]

18 ★★☆ L'acciaio inossidabile è una lega costituita da ferro (85%), cromo (13%) e carbonio (2%).

▶ In un oggetto di acciaio inossidabile di massa pari a 1,25 kg qual è la massa rispettivamente del ferro, del cromo e del carbonio contenuti?

[1,06 kg; 0,16 kg; 0,03 kg]

19 ★★☆ Il prezzo di un gelato è 1,50 €.

▶ Se l'inflazione teorica è del 2,6%, quanto costerà lo stesso gelato fra un anno?

▶ Se invece il prezzo del gelato fra un anno sarà € 1,60, qual è il reale aumento percentuale?

[€ 1,54; 6,7%]

20 ★★★ Paolo deposita 10 000 € in banca. Il tasso d'interesse è del 2% annuo.

▶ A quanto ammonta il suo capitale dopo un anno?

▶ E dopo due anni?

[10 200 €; 10 404 €]

21 ★★★ **NATURA Fuori dall'acqua**

Il rapporto tra il volume immerso e quello totale di un iceberg è direttamente proporzionale al rapporto tra la densità del ghiaccio (0,94 g/cm^3) e quella dell'acqua marina (1,05 g/cm^3).

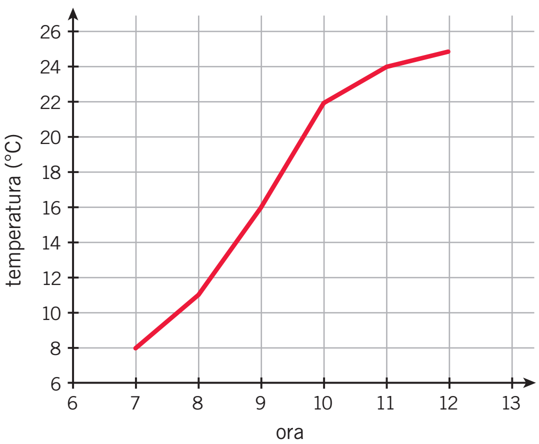
▶ Quale percentuale del volume dell'iceberg emerge dal pelo dell'acqua?

[10%]

4. I GRAFICI

ESERCIZI NUMERICI

22 ★ Nel grafico è riportata la temperatura misurata tra le 7 e le 12 di un giorno di primavera.



▶ Leggendo i dati del grafico, completa la tabella riportata sotto.

ORA	TEMPERATURA (°C)
7:00	8
8:00	
9:00	
10:00	
11:00	
12:00	

23 ★ La formula che esprime la relazione fra due grandezze è $y = 10 - x^2$.

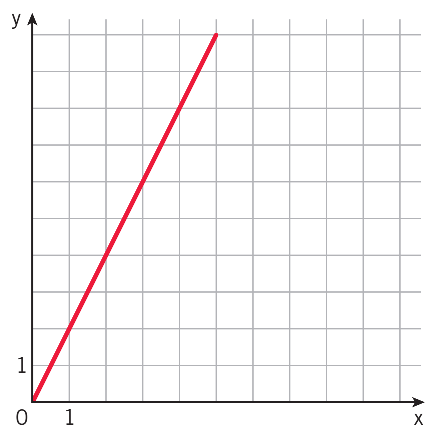
▶ Assegnando a x un certo numero di valori da 0 a 3, traccia il grafico corrispondente.

24 ★ Un automobilista registra in una tabella i kilometri percorsi nel corso di ogni mese. La tabella ottenuta alla fine dell'anno è la seguente:

MESE	km
1	900
2	1300
3	1400
4	1400
5	1200
6	1200
7	800
8	2000
9	800
10	1300
11	1400
12	1000

▶ Scegli un opportuno fattore di scala sui due assi e costruisci il grafico corrispondente alla tabella come insieme di punti.

25 ★ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione fra due grandezze x e y.



La relazione fra le due grandezze può essere espressa con la formula $y = k\,x$, dove k è un numero assegnato.

▶ Determina il valore di k.

5. LA PROPORZIONALITÀ DIRETTA

DOMANDE SUI CONCETTI

26 Scrivi il valore costante del rapporto fra queste coppie di grandezze, secondo l'esempio:

a. Perimetro e lato di un quadrato: 4

b. Circonferenza e raggio di un cerchio: __________

c. Perimetro e lato di un triangolo equilatero: __________

d. Diagonale e lato di un quadrato: __________

27 Scrivi la formula che lega queste coppie di grandezze direttamente proporzionali, secondo l'esempio:

a. Perimetro P e lato l di un quadrato: $P = 4\,l$

b. Circonferenza C e diametro d di un cerchio: __________

c. Area A e quadrato q del raggio di un cerchio: __________

d. Perimetro P e lato l di un esagono regolare: __________

28 **FUORI DAGLI SCHEMI** Perché questa frase non è corretta? «Tutte le relazioni di proporzionalità diretta hanno come grafico una retta, e tutte le rette corrispondono a una relazione di proporzionalità diretta.»

ESERCIZI NUMERICI

29 ★☆☆ La tabella seguente riporta il volume e la massa di quantità variabili di alcol.

VOLUME (cm^3)	MASSA (g)
5	4,0
10	8,0
15	12,0
20	16,0
25	20,0

- Qual è il valore costante del rapporto fra massa e volume nell'alcol?
- Qual è la formula che lega la massa m e il volume V di una quantità data di alcol?

[0,80 g/cm^3; $m = (0{,}80\ \text{g/cm}^3)\ V$]

30 ★☆☆ Costruisci il grafico della relazione di proporzionalità presentata nell'esercizio precedente.

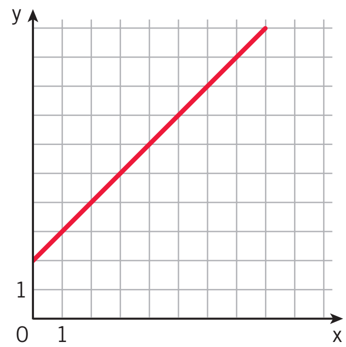
- Si tratta di una retta passante per l'origine? Perché?

31 ★☆☆ Ho corso per 2 km e ho consumato 180 kcal.

- Visto che il dispendio di energia è direttamente proporzionale alla distanza percorsa, quanto consumo quando corro per 6 km?

[540 kcal]

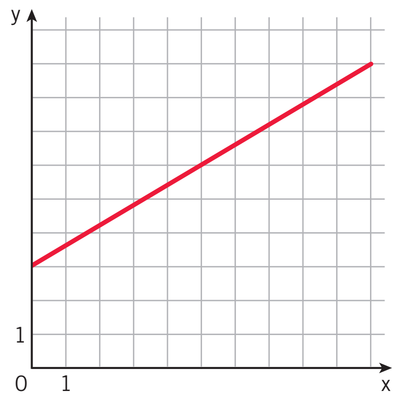
32 ★★☆ Il grafico qui sotto rappresenta la relazione di dipendenza lineare fra le grandezze x e y.



- Determina la formula che esprime tale relazione nella forma $y = kx + q$.
- Cosa accade alla relazione fra x e y se si pone $q = 0$?
- Come si trasforma un grafico in questo caso?

[$y = x + 2$]

33 ★★☆ La relazione fra le grandezze x e y è descritta dal grafico seguente.



- Di che tipo di relazione si tratta?
- Quando x aumenta di cinque unità, quale aumento subisce y?
- Quanto vale il rapporto (costante) fra un aumento di x e il corrispondente aumento di y?
- Quale formula esprime la relazione fra x e y?

[y aumenta di tre unità; 5/3; $y = \frac{3}{5}x + 3$]

6. LA PROPORZIONALITÀ INVERSA

ESERCIZI NUMERICI

34 ★☆☆ Perché questa frase non è corretta? «Il primo ottobre la temperatura era di 12 °C; il due ottobre c'erano 10 °C; il 3 avevamo 8 °C. La temperatura sta scendendo in modo inversamente proporzionale al trascorrere dei giorni.»

35 ★☆☆ Scrivi la formula che lega queste coppie di grandezze inversamente proporzionali, secondo l'esempio:

a. Numero N di lati e lato l di un poligono regolare di perimetro pari a 10 cm.

$$N = \frac{10\ \text{cm}}{l}$$

b. Base b e altezza h di un rettangolo di area pari a 25 m^2.

____

c. Area di base A e altezza h di una piramide di volume pari a 32 cm^3.

____

36 ★☆☆ Il prodotto di due lunghezze x e y inversamente proporzionali ha il valore costante di 60 m^2.

▶ Qual è il valore di y se x è pari a 5,0 m?

▶ Assegna ad x una serie di valori, calcola i corrispondenti valori di y e traccia il grafico della loro relazione.

[12 m]

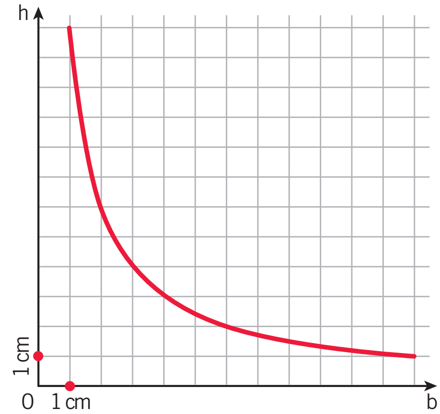
37 ★★☆ Con uno stesso volume di liquido, pari a 50 cm^3, riempiamo alcuni recipienti cilindrici di diametro variabile. Il liquido raggiunge in ogni caso un'altezza diversa.

▶ Compila la seguente tabella relativa all'esempio descritto:

AREA DI BASE A (cm^2)	ALTEZZA RAGGIUNTA DAL LIQUIDO h (cm)
10	5,0
20	
30	
40	
50	

▶ Qual è la formula che esprime la relazione fra A e h?

38 ★★☆ Il grafico qui sotto illustra la relazione fra la base b e l'altezza h di una serie di rettangoli diversi, aventi tutti la stessa area.



▶ Qual è il valore comune dell'area dei rettangoli?

▶ Qual è la formula che esprime la relazione fra b e h?

[12 cm^2; h = 12 cm^2/b]

7. LA PROPORZIONALITÀ QUADRATICA DIRETTA E INVERSA

ESERCIZI NUMERICI

39 ★☆☆ Scrivi il valore costante del rapporto fra la prima grandezza e il quadrato della seconda, in base all'esempio.

a. Area e lato di un quadrato: 1

b. Area e raggio di un cerchio: ______________

c. Area e diagonale di un quadrato: ______________

40 ★☆☆ Scrivi la formula che lega le coppie di grandezze dell'esercizio precedente, secondo l'esempio:

a. Area A e lato l di un quadrato: $A = l^2$

b. Area A e raggio r di un cerchio: ______________

c. Area A e diagonale d di un quadrato: ______________

41 ★☆☆ L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2 posti alla distanza d si determina con la formula

$$F = G \times \frac{M_1 M_2}{d^2},$$

dove G è una costante detta costante di gravitazione universale.

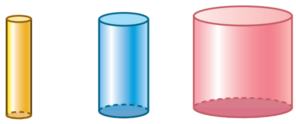
▶ Che tipo di relazione esiste fra F e d per due corpi dati?

42 ★☆☆ Quando un oggetto cade all'interno di un tubo in cui è stato fatto il vuoto, la distanza d da esso percorsa e l'intervallo di tempo i da esso impiegato sono legati dalla relazione $d = 4{,}9\ i^2$.

▶ Qual è la distanza percorsa da un oggetto che cade in questo modo in un intervallo di 1,2 s?

[7,1 m]

43 ★☆☆ In un cilindro di altezza h = 1,00 m, il volume V aumenta rapidamente all'aumentare del raggio r.



▶ Assegna al raggio una serie di valori compresi fra 0,10 m e 1,00 m, determina il corrispondente valore del volume e traccia il grafico in base alla tabella ottenuta.

8. COME SI LEGGE UNA FORMULA

DOMANDE SUI CONCETTI

44 In base all'esempio, esprimi a parole le seguenti formule, dove compaiono le grandezze generiche x, y e z:

a. $z = 20\ xy$ è direttamente proporzionale sia a x sia a y

b. $z = \pi\ x/y$ ______________________________

c. $z = \sqrt{3}\ y^2/x$ ______________________________

d. $z = 0{,}5\ y/x^2$ ______________________________

45 Traduci in formule queste affermazioni sulla relazione fra diverse grandezze, introducendo un fattore di proporzionalità k, come nell'esempio.

a. La lunghezza dell'ombra è direttamente proporzionale all'altezza dell'oggetto: $L = kh$

b. Il prezzo degli oggetti è inversamente proporzionale al loro numero: ______________

c. La superficie del corpo è direttamente proporzionale al quadrato della sua larghezza: ______________

d. La forza di gravità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza: ______________

ESERCIZI NUMERICI

46 ★☆☆ La durata D di un'escursione è direttamente proporzionale al numero N di tappe. Per un certo valore di N, D risulta uguale a 2,5 ore.

▶ Quale valore assume D per un numero di tappe triplo rispetto a quello dell'esempio?

[D = 7,5 ore]

47 ★☆☆ Il tempo T necessario a fabbricare un certo prodotto è inversamente proporzionale al numero O di operai che eseguono il lavoro. Per un valore particolare di O, il valore di T risulta pari a 48 ore.

▶ Quale risulterà il valore di T se il numero degli operai viene moltiplicato per cinque volte?

[T = 9,6 ore]

48 ★★☆ La quantità Q di vernice necessaria per verniciare un oggetto sferico è direttamente proporzionale al quadrato del raggio r dell'oggetto. Q risulta uguale a 60 g per un certo valore di r.

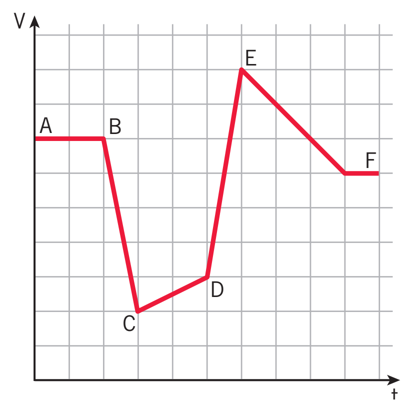
▶ Quale valore assume Q se il valore di r è raddoppiato?

[Q = 240 g]

9. COME SI LEGGE UN GRAFICO

ESERCIZI NUMERICI

49 ★☆☆ Il grafico seguente riproduce l'andamento del valore V di un titolo finanziario al passare del tempo t.

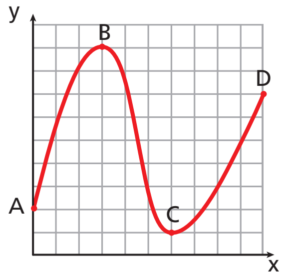


▶ Descrivi l'andamento di V, nelle varie fasi. Utilizza termini come «aumenta rapidamente» o «diminuisce lentamente» o «resta invariato».

50 ★☆☆ Traccia due grafici diversi fra loro, in modo che entrambi rappresentino il seguente andamento della variabile y in funzione della variabile x: «All'aumentare di x, y in una prima fase aumenta lentamente, poi resta costante, infine diminuisce rapidamente.»

51 ★☆☆ Descrivi a parole l'andamento della grandezza y al variare della grandezza x.

▶ Come puoi modificare il grafico in modo che la grandezza y sembri variare poco?



52 ★☆☆ La tabella riporta la temperatura di una stanza al passare del tempo.

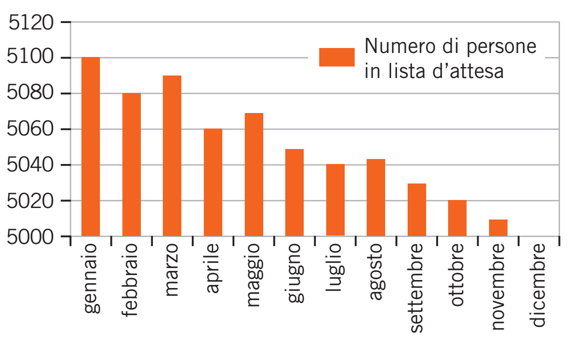
t (min)	t (°C)
0	18,0
5	18,2
10	18,4
15	18,5
20	18,5
25	18,3
30	18,2
35	18,3
40	18,2
45	18,1

▶ Traccia un grafico a partire dalla tabella.

▶ Descrivi a parole l'andamento del grafico.

▶ Disegna un altro grafico che dia la sensazione che la temperatura vari di molto.

53 ★★☆



Il diagramma illustra la riduzione dei pazienti in lista d'attesa negli ospedali di una determinata autorità sanitaria.

▶ A quanto equivale in percentuale la diminuzione di pazienti in lista d'attesa da gennaio a dicembre?

▶ Come puoi modificare il grafico perché la grandezza y (numero di persone in lista d'attesa) sembri variare di poco?

[2,0%; scala sull'asse verticale da 0 a 5100]

10. LE POTENZE DI 10

ESERCIZI NUMERICI

54 ★☆☆ Traduci queste potenze di 10 in numeri decimali:

a. $10^7 = 10\,000\,000$

b. $10^{11} =$ ____________

c. $10^{-4} =$ ____________

d. $10^{-8} =$ ____________

55 ★☆☆ Scrivi i numeri espressi a parole prima in cifre e poi come potenza di dieci:

a. un milione 1 000 000 10^6

b. un miliardo ____________

c. cento miliardi ____________

d. diecimila miliardi ____________

56 ★☆☆ Traduci questi numeri decimali in potenze di 10:

a. $0{,}000\,01 = 10^{-5}$

b. $0{,}001 =$ ____________

c. $100\,000 =$ ____________

d. $10\,000\,000 =$ ____________

57 ★☆☆ Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^4 \times 10^{12} = 10^{16}$ $10^6 \div 10^9$

b. $10^{11} \times 10^{-8}$ $10^{-5} \div 10^{-11}$

c. $10^{-7} \times 10^4$ $(10^4)^3$

d. $10^{-18} \times 10^{-7}$ $(10^{-2})^5$

58 ★☆☆ Determina il risultato delle seguenti operazioni:

a. $10^{-1} \times 10^{-2} = 10^{-3}$ $10^7 \div 10^5$

b. $10^{-6} \times 10^6$ $10^3 \div 10^{-3}$

c. $10^{-8} \times 10^{15}$ $(10^3)^{-4}$

d. $10^8 \times 10$ $(10^4)^2$

59 ★★☆ Il lato dell'area quadrata rappresentata in scala in questa mappa misura $2,4 \times 10^3$ m.

▶ Determina l'area della zona in m^2.

[$5,8 \times 10^6$ m^2]

60 ★★☆ Determina il risultato di questa espressione:

$$\frac{12 \times 10^8}{4 \times 10^3} + (0,5 \times 10^3)^2 - (6 \times 10^{11}) \times (9 \times 10^{-6})$$

[$-4,9 \times 10^6$]

61 ★★☆ Determina il risultato di questa espressione:

$$3 \times 10^6 + \frac{12 \times 10^{-4}}{0,3 \times 10^{-9}} - \frac{3,2 \times 10^{-6}}{0,01 \times 10^{-9}} + -(1,6 \times 10^6)$$

[$5,08 \times 10^6$]

62 ★★★ **SPAZIO Fra Terra e Sole**

L'attrazione gravitazionale F fra due corpi rispettivamente di massa M_1 e M_2, posti alla distanza d, si determina (tralasciando le unità di misura) con la formula:

$$F = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Nel caso del sistema Sole-Terra, i valori delle grandezze indicate sono:

$M_1 = 1,99 \times 10^{30}$ kg; $M_2 = 5,98 \times 10^{24}$ kg;

$d = 1,50 \times 10^{11}$ m.

▶ Determina l'intensità dell'attrazione gravitazionale fra il Sole e la Terra, sempre tralasciando le unità di misura.

[$3,53 \times 10^{22}$]

11. LE EQUAZIONI

ESERCIZI NUMERICI

63 ★☆☆ In queste equazioni, isola l'incognita e specifica quale principio hai usato:

a. $x + 7 = 8$ $\quad x = 8 - 7$ $\quad$ Primo principio

b. $4x = 35$ ______

c. $27 - x = 30$ ______

d. $5x - 9 = 31$ ______

64 ★☆☆ In queste equazioni, isola l'incognita x applicando i principi di equivalenza:

a. $x + a = b$ $\quad x = b - a$

b. $kx = h$ ______

c. $m - x = n$ ______

d. $ax - b = c$ ______

65 ★☆☆ Risolvi la seguente equazione:

$30x + 12 = 72$

[2]

66 ★☆☆ Isola l'incognita di queste equazioni:

a. $-kx = F$

b. $m - x = n$

c. $vx + s = p$

67 ★★☆ Trasforma queste frasi in equazioni e risolvile.

▶ Quale numero moltiplicato per 3 dà come risultato 126?

▶ Quale numero diminuito di 3 dà come risultato -7?

▶ Quale numero diviso per 112 dà come risultato 1?

▶ Quale numero moltiplicato per 5 e sommato a 12 dà come risultato 27?

[42; −4; 112; 3]

68 ★★★ Risolvi la seguente equazione:

$20x^2 = 75$

[1,9]

69 ★★★ Risolvi in v la seguente equazione:

$mv^2 - 2K = 0$

$\left[v = \sqrt{\frac{2k}{m}}\right]$

12. SENO E COSENO DI UN ANGOLO

ESERCIZI NUMERICI

70 ★☆☆ In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura 20 cm e un cateto misura 12 cm.

▶ Quanto vale il seno dell'angolo opposto a quel cateto?

[0,60]

71 ★☆☆ In un triangolo rettangolo, l'ipotenusa misura 14 cm e un cateto misura 9,0 cm.

- Quanto vale il coseno dell'angolo adiacente a quel cateto?
- Quanto vale il seno dello stesso angolo?

[0,64; 0,79]

72 ★☆☆ L'ipotenusa $\overline{BC}$ di un triangolo rettangolo misura 68,4 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ è di 52°. La calcolatrice fornisce il valore sen 52° = 0,788.

- Calcola la lunghezza del cateto $\overline{AC}$ del triangolo.
- Determina la lunghezza del cateto $\overline{AB}$.

[53,9 cm; 42,1 cm]

73 ★☆☆ L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è inclinata di 60° rispetto al cateto orizzontale e ha modulo 410 cm.

- Disegna il triangolo.
- Calcola la lunghezza dei due cateti.

[355 cm, 205 cm]

74 ★★☆ Nel triangolo rettangolo *ABC*, il cateto $\overline{AC}$ misura 22,4 cm e l'angolo $A\hat{B}C$ misura 34°.

- Calcola la lunghezza dell'ipotenusa $\overline{BC}$.
- Calcola il seno e il coseno dell'angolo $A\hat{C}B$.

[40,1 cm; 0,56, 0,83]

75 ★★☆ **PROBLEMA SVOLTO**

Quando il triangolo non è rettangolo

In un triangolo ottusangolo $\overline{AB}$ = 30 cm e $\overline{AC}$ = 26 cm. L'angolo compreso tra questi due lati misura 139°.

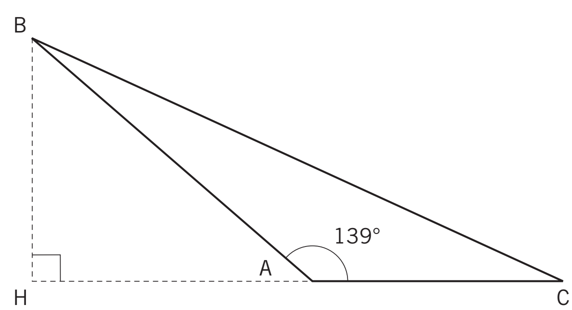
- Quanto misura il lato $\overline{BC}$?

DATI E INCOGNITE

	GRANDEZZE	SIMBOLI	VALORI	COMMENTI
DATI	Lunghezza del lato AB	$\overline{AB}$	30 cm	
	Lunghezza del lato AC	$\overline{AC}$	26 cm	
	Angolo compreso	$B\hat{A}C$	139°	Il triangolo è ottusangolo
INCOGNITE	Lunghezza del lato BC	$\overline{BC}$	?	

RAGIONAMENTO

- Disegniamo il triangolo e tracciamo l'altezza $\overline{BH}$.
- $\overline{BC}$ è l'ipotenusa del triangolo rettangolo BHC e possiamo calcolarla con il Teorema di Pitagora se conosciamo $\overline{BH}$ e $\overline{HC}$.
- Per fare ciò, dobbiamo calcolare l'angolo $B\hat{A}H$ e utilizzare le formule di seno e coseno nel triangolo rettangolo *BHA*.



RISOLUZIONE

Calcoliamo l'angolo $B\hat{A}H = 180° - 139° = 41°$

Calcoliamo la misura dei due cateti di *BHA*: $\overline{BH} = \overline{AB}\,\sin 41^\circ = 30\text{ cm} \times \sin 41^\circ = 20\text{ cm}$

$$\overline{HA} = \overline{AB}\cos 41° = 30\,\text{cm} \times \cos 41° = 23\,\text{cm}$$

Dunque $\overline{HC} = \overline{HA} + \overline{AC} = 23\,\text{cm} + 26\,\text{cm} = 49\,\text{cm}$

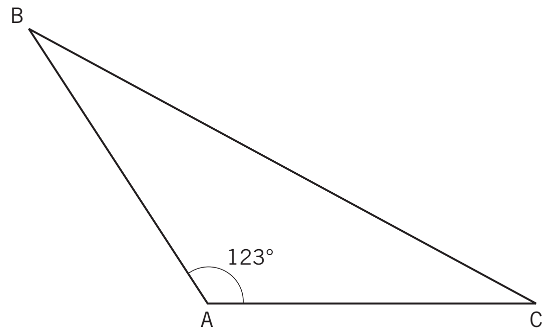
Applichiamo il Teorema di Pitagora: $\overline{BC} = \sqrt{\overline{HC}^2 + \overline{BH}^2} = \sqrt{(49^2 + 20^2)\,\text{cm}^2} = 53\,\text{cm}$

CONTROLLO DEL RISULTATO

Il lato $\overline{BC}$ calcolato è minore della somma degli altri due lati $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ del triangolo ottusangolo e maggiore della loro differenza, come deve essere per un teorema di geometria.

76 ★★☆ Un triangolo ottusangolo ha i lati che misurano $\overline{AB} = 5{,}0\,\text{cm}$ e $\overline{AC} = 7{,}0\,\text{cm}$. L'angolo compreso tra questi due lati misura 123°.

▶ Quanto misura il lato $\overline{BC}$?



[11 cm]

PROBLEMI GENERALI

1 **E ADESSO CHE COSA SUCCEDE?** **Tra due e tre**

▶ Che tipo di proporzionalità esiste fra il diametro e la massa di due palline di carta stagnola?

Guarda nell'eBook *Il problema* e segui *La discussione*.

- Sei d'accordo con gli studenti del video? Spiega perché.

Guarda nell'eBook *La conclusione*.

2 ★☆☆ **TECNOLOGIA** **Musica compressa**

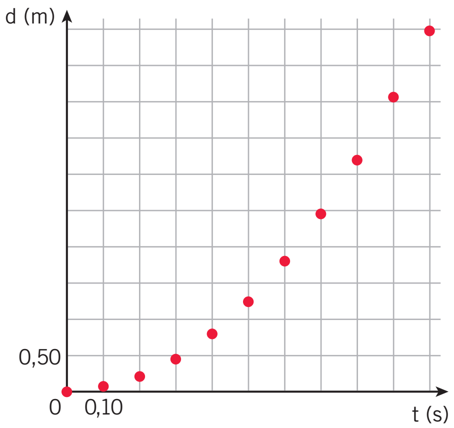
Un file musicale in formato compresso ha una durata di 2 minuti e 58 secondi e una dimensione in memoria di 736 368 byte.

▶ Qual è la dimensione in memoria di un secondo di musica?

▶ Quanto durerebbe l'esecuzione della musica compressa in un solo byte?

[4137 byte; $2{,}417 \times 10^{-4}$ s]

3 ★☆☆ Il grafico di seguito è stato costruito in base ai dati sulla caduta di un oggetto all'interno di un tubo dove era stato fatto il vuoto. Con un sonar, lo sperimentatore ha registrato a intervalli regolari di tempo le distanze percorse dall'oggetto.



▶ Qual è l'ultimo istante in cui è stata effettuata una registrazione?

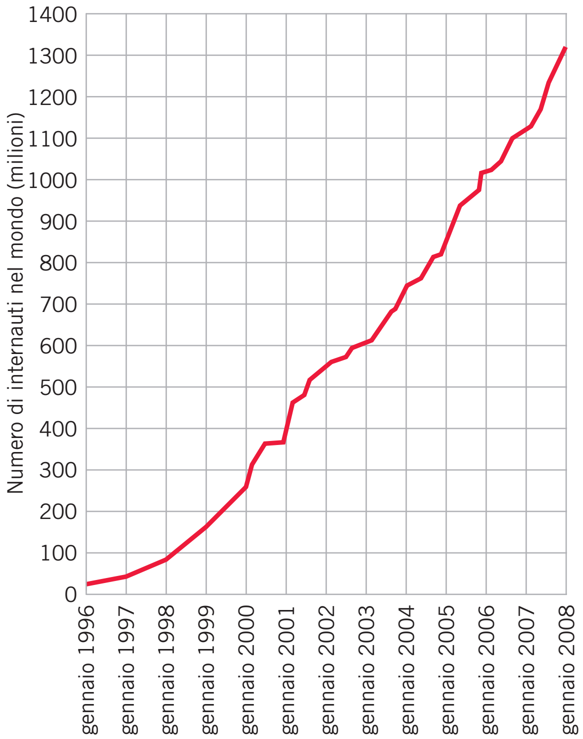
▶ Qual è la massima distanza misurata dal sonar?

▶ Compila una tabella corrispondente al grafico.

[1,00 s; 5,0 m]

4 ★★ **TECNOLOGIA Internet nel mondo**

Il grafico seguente rappresenta la crescita del numero di persone nel mondo che hanno accesso a Internet.



- Qual era il numero di queste persone nel gennaio 1999? E nel gennaio 2003?
- Qual è stato in percentuale l'aumento degli utenti di Internet fra il 1999 e il 2003?
- Se questa percentuale di aumento si mantenesse costante, quante persone dovrebbero avere accesso a Internet nel 2007?
- Questa previsione è confermata dal grafico?

[circa 150 milioni; circa 600 milioni; 300%; 2 400 milioni]

5 ★★ Considera la relazione matematica espressa dalla formula:

$$y = \frac{x^3}{50}$$

- Assegna a x una ventina di valori distinti compresi fra -5 e 5 e calcola i corrispondenti valori di y, quindi costruisci il grafico corrispondente.
- Sovrapponi al grafico ottenuto quello della retta $y = 0{,}25x$. Determina i punti che le due linee hanno in comune.

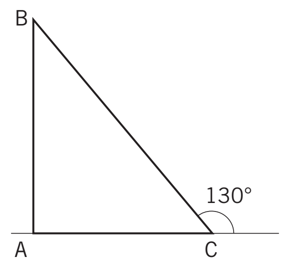
6 ★★ La massa di un raccoglitore ad anelli aumenta con il numero di fogli inseriti. La tabella seguente registra una serie di dati della massa:

NUMERO FOGLI	MASSA (g)
0	300
25	425
50	550
75	675
100	800

- Traccia il grafico corrispondente a questa tabella e stabilisci che tipo di relazione c'è fra massa e numero di fogli.
- Qual è il rapporto fra l'aumento della massa del raccoglitore e il numero di fogli? Si tratta di un rapporto costante?
- Qual è la formula che lega la massa m del raccoglitore e il numero n dei fogli?

7 Un triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa $\overline{BC}$ lunga 3,28 m e l'angolo esterno in C mostrato nella figura che misura 130°.

- Calcola la lunghezza dei due cateti $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



[2,1 m, 2,5 m]

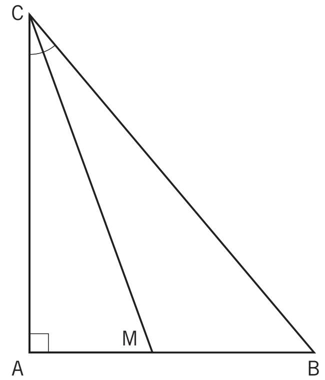
8 L'area di gioco di un campo da beach volley ha una lunghezza l di 16 m e l'angolo che forma la diagonale con il lato più lungo, cioè l, è di 27°.

- Quanto vale la larghezza L del campo?

[8,2 m]

9 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa $\overline{BC}$ che misura 6,00 m e l'angolo $A\hat{C}B$ di 40°.

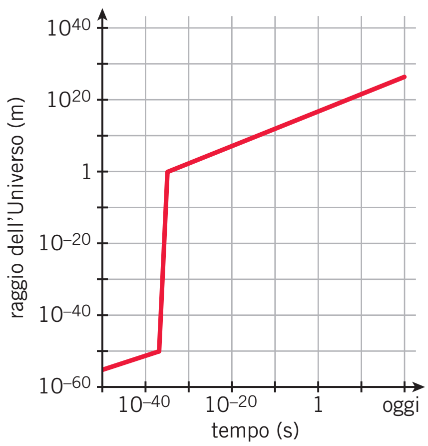
▶ Quanto misura la mediana $\overline{CM}$, che collega C con il punto medio del lato $\overline{AB}$?



[4,99 m]

10 **SPAZIO L'universo inflazionario**
★★★

Il grafico seguente (adattato dal libro di Alan Guth, *L'universo inflazionario*) rappresenta una recente ipotesi sull'espansione dell'Universo. Secondo questa ipotesi, a un'età compresa fra i 10^{-37} s e i 10^{-35} s, l'Universo avrebbe subito una espansione rapidissima nota come *inflazione*. Fai attenzione al fatto che gli assi del grafico sono graduati in potenze di 10.



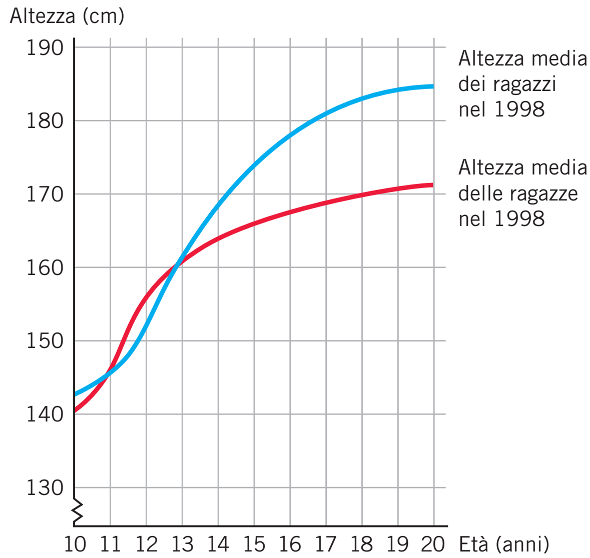
▶ Di quante volte aumenta il raggio dell'Universo passando da una tacca all'altra dell'asse verticale?

▶ Quante volte sarebbe aumentato il raggio dell'Universo nel corso dell'inflazione?

[10^{10} volte; 10^{50} volte]

11 **LA FISICA DEL CITTADINO La crescita**

Il grafico seguente mostra l'altezza media dei ragazzi e delle ragazze olandesi nel 1998.



Domanda 1:

A partire dal 1980 l'altezza media delle ragazze di 20 anni è aumentata di 2,3 cm arrivando a 170,6 cm. Qual era l'altezza media delle ragazze di 20 anni nel 1980?

Domanda 2:

Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.

Domanda 3:

In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?

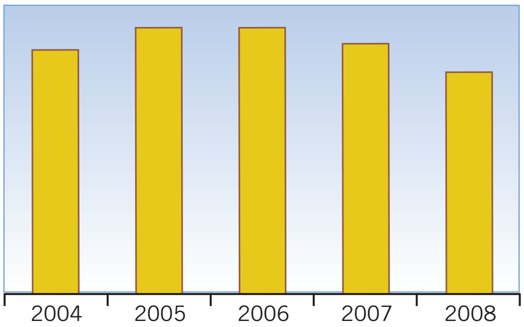
Tratto da prove *PISA* (*Project for International Student Assessment*), 2003.

GIOCHI DI ANACLETO

1 In un rapporto sulla produzione agricola negli anni 2004 - 2008 si leggono i seguenti dati riferiti alle entrate, in milioni di Euro,

	2004	2005	2006	2007	2008
Cereali	504,0	706,9	610,4	472,8	472,6
Orticoltura	74,5	83,7	91,9	86,6	95,0
Allevamento	942,2	1036,1	1033,5	968,0	857,7
Uova e latticini	326,6	331,2	341,3	306,5	273,4

Il grafico si riferisce ad uno di questi settori ma i valori sull'asse delle ordinate sono stati omessi. Di che settore si tratta?



a. Cereali.

b. Orticoltura.

c. Allevamento.

d. Uova e latticini.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2013)

2 In uno studio sulla composizione del suolo si sono raccolti diversi campioni. Ogni campione di terriccio è stato pesato e sono stati pesati anche i suoi componenti, sabbia, argilla e limo, separandoli in base alla dimensione delle particelle di cui sono costituiti. I seguenti risultati si riferiscono a quattro campioni: quale di essi contiene sabbia in percentuale maggiore?

CAMPIONE	MASSA DEL CAMPIONE (g)	MASSA DI SABBIA (g)	MASSA DI LIMO (g)	MASSA DI ARGILLA (g)
A	400	180	40	180
B	150	90	30	30
C	300	171	108	21
D	200	100	14	86

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

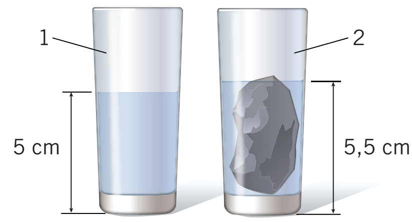
3 Un gruppo di studenti vuole studiare come lo scioglimento dei ghiacci intorno al Polo Sud e in prossimità del Polo Nord influenzi il livello del mare. Per rappresentare la situazione del Polo Nord, dove la calotta glaciale giace sopra l'oceano, gli studenti mettono dell'acqua in un bicchiere (bicchiere 1 nella prima figura), mettono due cubetti di ghiaccio nell'acqua e misurano subito il livello iniziale dell'acqua con il ghiaccio dentro, che è 5 cm. Per rappresentare la situazione del Polo Sud, dove la calotta glaciale ricopre la piattaforma continentale rocciosa, gli studenti mettono un sasso in un bicchiere identico al precedente (bicchiere 2), poi mettono due cubetti di ghiaccio uguali ai primi sopra il sasso e riempiono il bicchiere finché il livello dell'acqua raggiunge i 5 cm. Il sasso non è completamente immerso nell'acqua e il ghiaccio sta fuori dall'acqua.

Osserva nella seconda figura il livello dell'acqua nei bicchieri quando il ghiaccio è tutto sciolto. Se il ghiaccio si scioglie a ritmo costante quale delle seguenti espressioni matematiche descrive come varia il livello (y) dell'acqua nel bicchiere 1 e nel bicchiere 2 durante lo scioglimento del ghiaccio? a e b rappresentano valori costanti, il tempo viene indicato con x.

L'esperimento ha inizio quando $x = 0$.

IL GHIACCIO ALL'INIZIO

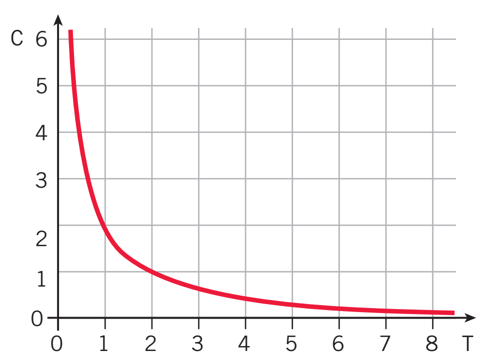
CON IL GHIACCIO TUTTO SCIOLTO



	BICCHIERE 1	BICCHIERE 2
A	$y = b$	$y = ax + b$
B	$y = ax + b$	$y = b$
C	$y = b$	$y = ax$
D	$y = ax$	$y = b$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

4 Quale delle seguenti equazioni descrive la curva rappresentata nel grafico?



Q e D sono valori costanti.

a. $Q = \frac{C}{T} - D$

b. $Q = C \cdot T^2$

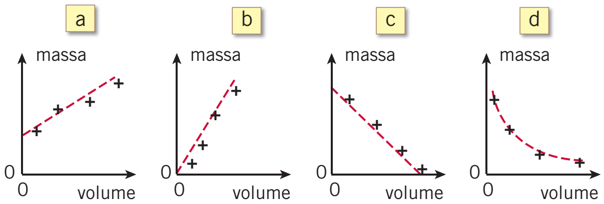
c. $Q = \dfrac{C}{T^2}$

d. $Q = C \cdot T + D$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2011)

5 In un lavoro in classe si sono misurati la massa e il volume di diversi blocchi fatti con un certo tipo di legno e i valori trovati sono stati riportati in un grafico.

Quale dei grafici ci si aspetta che venga disegnato?



(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2009)

6 In un esperimento si sono misurati i seguenti valori di alcune grandezze: $y = 40 \times 10^{-2}$ cm; $x = 40 \times 10^{-2}$ cm; $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $u = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Tutte queste grandezze sono legate fra loro da una relazione espressa dalla seguente equazione:

$$\frac{x}{y} = \frac{g(1+k^2)x}{2u^2},$$

dove k è una costante.

In base alla equazione precedente la costante k è misurata in:

a. $\mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$

b. $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

c. $\mathrm{m^{-2} \cdot s^2}$

d. è adimensionale.

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2008)

7 In un esperimento sono state prese diverse misure di due grandezze, a e b. I valori trovati sono riportati nella seguente tabella.

a	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
b	0	15	65	135	235	375	550

Dall'analisi dei dati della tabella si può dedurre che una possibile curva che approssima i dati sperimentali ha equazione:

a. $b = 60\,a$

b. $b = 75\,a$

c. $b = \dfrac{7{,}5}{a}$

d. $b = 60\,a^2$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 2005)

8 A seconda della sua velocità un'automobile ha bisogno di più o meno spazio per fermarsi. Nella tabella sono riportati gli spazi d'arresto corrispondenti a diverse velocità di un'automobile.

VELOCITÀ (km/h)	60	100	140	180
SPAZIO D'ARRESTO (m)	14	39	76	126

La relazione tra la velocità v e lo spazio d'arresto s può, in base ai dati, essere rappresentata da una formula. Scegli quella che si adatta di più fra le seguenti, dove k indica un valore che rimane costante al variare di v e di s.

a. $v = \dfrac{k}{s^2}$

b. $v = \dfrac{k}{\sqrt{s}}$

c. $v = ks$

d. $v = k\sqrt{s}$

e. $v = ks^2$

(Tratto dai *Giochi di Anacleto*, anno 1997)