IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
1. Le leggi di Keplero	ANIMAZIONE **Prima e seconda legge di Keplero** La prima e la seconda legge di Keplero vengono ricavate con metodo grafico, analizzando le orbite dei pianeti attorno al Sole.	1
3. La forza-peso e l'accelerazione di gravità	ANIMAZIONE **L'esperimento di Cavendish** Una ricostruzione animata del celebre esperimento: descrizione dell'apparato sperimentale e conclusioni che Cavendish ne ha dedotto.	1,5
4. Il moto dei satelliti	ESPERIMENTO VIRTUALE **Pianeti e satelliti** Gioca, misura, esercitati ANIMAZIONE **Orbita geostazionaria** Si confrontano le orbite equatoriali di un satellite a diverse altezze dal suolo e si ricava l'altezza delle orbite geostazionarie.	1
MAPPA INTERATTIVA	IN TRE MINUTI • La legge della gravitazione universale 30 TEST INTERATTIVI SU ZTE CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...»	

VERSO IL CLIL

FORMULAE IN ENGLISH		AUDIO
Kepler's third law	$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{mG}$	The square of the period of any planet divided by the cube of the mean readius of its orbit is a constant given by four multiplied by the square of pi all divided by the product of the gravitational constant and the mass of the Sun.
Universal Law of gravitation	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$	The magnitude of the gravitational force between two bodies equals the product of the gravitational constant and the masses of the two bodies divided by the square of the distance between the centres of the masses.
Gravitational potential energy	$U = -G\frac{m_1 m_2}{r}$	The gravitational potential energy is equal to minus the product of the gravitational constant and the masses of the two bodies divided by the distance between the centres of the masses.
Escape velocity	$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}$	The escape speed for a body equals the square root of the product of twice the gravitational constant, the mass of the body, and the inverse of the distance from nthe centre of gravity.

QUESTIONS AND ANSWERS

AUDIO

► **State the general equation for the gravitational force exerted by a planet on a body.**

The gravitational force is equal to the product of the gravitational constant and the mass of the body divided by the square of the distance (r) between their centres of mass. The mass of the Earth is taken as acting from a point at the centre of the planet. When r is very large the value of the gravitational force approaches zero. The force has its maximum when r equals the radius of the planet.

► **State Kepler's first law.**

Kepler's first law states that all planets move in elliptical orbits with the Sun at one focus.

► **State Kepler's second law and relate it to the motion of a planet around the Sun.**

Kepler's second law states that a line joining a planet to the Sun sweeps out equal areas in equal times. For this law to hold it is implicit that a planet will speed up in its approach to the Sun and slow down as it moves away from the Sun. The point nearest the Sun when the planet moves at its maximum speed is called the perihelion and the aphelion is the planets farthest point from the Sun when its speed is a minimum.

► **State Kepler's third law and determine the period of planets around the Sun relative to Earth.**

Kepler's third law states that the square of the period of any planet is proportional to the cube of the mean radius of its orbit. Taking the Earth-Sun distance as a unit – the astronomical unit AU – and using the relative distances of the planets from the Sun, Kepler's second law gives the period of any planet as equal to the square root of the cube of its mean radius.

► **State the general equation for the gravitational force exerted by a planet on a body.**

The gravitational force is equal to the product of the gravitational constant and the mass of the body divided by the square of the distance (r) between their centres of mass. The mass of the Earth is taken as acting from a point at the centre of the planet. When r is very large the value of the gravitational force approaches zero. The force has its maximum when r equals the radius of the planet.

► **What is the universal gravitational constant?**

The universal gravitational constant, denoted by the symbol G, is a necessary consequence of the expression of the law of gravitation and serves to balance it. Its value is 6.674×10^{-11} Nm^2 kg^{-2}. When expressed in natural units, which can be used to simplify algebraic equations, of mass [m], length [l] and time [t] it has a unitary value with dimensions [m^{-1} l^3 t^{-2}].

► **Describe the possible orbits of a body about the Sun in terms of their total mechanical energy.**

If we assume that the Sun is at rest in an inertial reference frame, the total mechanical energy ($\mathcal{E}$) of the Sun and the orbiting body is constant and equal to the sum of the kinetic energy (KE) and the gravitational potential energy (U). For a high speed object with $KE > |U|$ and $\mathcal{E} > 0$ the orbit is unbounded and its trajectory is open or hyperbolic. When $KE = |U|$, $\mathcal{E} = 0$, the orbit is still unbounded but the trajectory is parabolic. For $KE < |U|$, $\mathcal{E} > 0$ and the orbit is termed bounded with an elliptic trajectory. For KE=0 there is no orbit.

PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

1 LE LEGGI DI KEPLERO

6 ★☆☆ Considera i dati dell'esercizio 5 relativi al periodo orbitale della Terra e alla sua distanza dal Sole. Il periodo dell'orbita di Marte è di 686,98 d.

- Calcola la distanza media di Marte dal Sole.

[$2,29 \times 10^{11}$ m]

7 ★★☆ Considera i dati del problema n. 5 relativi al periodo orbitale della Terra e alla sua distanza dal Sole. Approssima l'orbita terrestre ellittica con una circonferenza. In questo caso:

- calcola la velocità media di rivoluzione della Terra intorno al Sole in m/s.
- determina l'area spazzata dal raggio vettore terrestre in 1 s.

[$2,99 \times 10^4$ m/s; $2,24 \times 10^{15}$ m^2]

2 LA GRAVITAZIONE UNIVERSALE

PROBLEMA MODELLO 2 ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

I centri di due sfere di piombo, ciascuna di massa 110 kg, distano 5,18 m.

- **Calcola l'intensità della forza gravitazionale che si esercita tra le due sfere.**
- **Calcola l'intensità della forza gravitazionale che si esercita tra ciascuna sfera e la Terra.**
- **Confronta i moduli delle due forze.**

DATI	INCOGNITE
Massa sfere: $m = 110$ kg	Forza gravitazionale sfera-sfera: F_{SS}
Distanza sfere: $r_s = 5,18$ m	Forza gravitazionale sfera-Terra: F_{ST}
Massa Terra: $5,97 \times 10^{24}$ kg	Rapporto tra forze: $\dfrac{F_{SS}}{F_{ST}}$
Raggio Terra: $R_T = 6,37 \times 10^6$ m	

L'IDEA

Applichiamo la formula della legge di gravitazione universale di Newton prima al sistema delle due sfere e poi al sistema sfera-Terra. Per fare un confronto tra le intensità delle due forze calcoliamo il rapporto tra i due valori.

LA SOLUZIONE

Calcolo la forza gravitazionale sfera-sfera.
La forza gravitazionale tra le due sfere è:

$$F_{SS} = G\frac{mm}{r_S^2} = \left(6,67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) \times \frac{(110\,\mathrm{kg}) \times (110\,\mathrm{kg})}{(5,18\,\mathrm{m})^2} = 3,01 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}.$$

Calcolo la forza gravitazionale sfera-Terra.
La forza gravitazionale ta una sfera e la Terra è:

$$F_{ST} = G\frac{mM_T}{R_T^2} = \left(6,67 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{kg^2}}\right) \times \frac{(110\,\mathrm{kg}) \times (5,97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg})}{(6,37 \times 10^6\,\mathrm{m})^2} = 1,08 \times 10^3\ \mathrm{N}.$$

Calcolo il rapporto tra i due valori.
Il rapporto tra i due valori è:

$$\frac{F_{SS}}{F_{ST}} = \frac{3,01 \times 10^{-8}\ \mathrm{N}}{1,08 \times 10^3\ \mathrm{N}} = 2,79 \times 10^{-11}.$$

PER NON SBAGLIARE

La forza con cui le due sfere si attraggono è circa un millesimo del peso di una zanzara.

24 ★★★ Confronta l'ordine di grandezza delle forze gravitazionali che si esercitano tra la Luna e il Sole e tra la Luna e la Terra.

25 ★★★ Giorgia vuole verificare l'uguaglianza numerica della massa inerziale e della massa gravitazionale del suo libro di fisica. Per la massa inerziale usa il carrello delle masse. Il periodo di oscillazione del carrello con il libro è di 2,1 s, mentre il periodo con il kilogrammo campione è di 1,6 s. Il dinamometro misura che la forza con cui la Terra attrae il libro è di 16,7 N.

- Calcola la massa inerziale del libro.
- Calcola la massa gravitazionale del libro.
- I risultati sono in accordo con teoria?

[1,7 kg; 1,7 kg; sì]

3 IL VALORE DELLA COSTANTE *G*

36 ★★★ Il pianeta Giove ha una massa 318 volte superiore alla massa della Terra e un raggio che è 11,0 volte maggiore del raggio della Terra.

- Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla superficie di Giove con questi dati?
- Calcola quale sarebbe, sul pianeta Giove, il peso di un corpo di massa pari a 1,00 kg.

[25,8 m/s^2; 25,8 N]

37 ★★★ In un apparecchio di Cavendish ci sono due sfere fisse di massa 380 kg e due sfere mobili di massa 0,59 kg alle estremità di un manubrio lungo 1,6 m. La distanza tra i centri delle due coppie di sfere è di $r = 20,0$ cm.

- Calcola la forza di attrazione gravitazionale tra le due coppie di sfere.
- Calcola il momento della coppia di forze.

[$3,7 \times 10^{-7}$ N; $5,9 \times 10^{-7}$ N m]

4 IL MOTO DEI SATELLITI

44 ★★★ Un satellite ruota intorno a un pianeta su un'orbita di raggio $1,741 \times 10^6$ m. La sua velocità di valore costante è $1,6 \times 10^3$ m/s.

- Quanto vale la massa del pianeta?

[$6,7 \times 10^{22}$ kg]

45 ★★★ Un satellite ruota intorno alla Terra su un'orbita circolare a 1000 km d'altezza.

- Quanto vale la sua velocità?
- Quanto vale il suo periodo?

[$7,35 \times 10^3$ m/s; $6,30 \times 10^3$ s]

46 ★★★ Un satellite ruota attorno alla Terra in un'orbita circolare ad un'altezza di $23,6 \times 10^3$ km dalla superficie terrestre. La forza centripeta che mantiene l'orbita circolare del satellite è ha intensità 333 N.

- Calcola la massa del satellite.
- Calcola il periodo del satellite.

(Utilizza la tabella alla fine del libro per i dati sulla Terra)

[751 kg; $5,17 \times 10^4$ s]

5 LA DEDUZIONE DELLE LEGGI DI KEPLERO

55 ★★★ L'orbita ellittica descritta dalla Terra intorno al Sole si può trattare con buona approssimazione come se fosse una circonferenza di raggio $1,496 \times 10^{11}$ m. La Terra impiega 365,26 d per completare un'orbita intorno al Sole.

- Con questi dati, calcola la massa del Sole.

[$1,99 \times 10^{30}$ kg]

56 ★★★ Un satellite geostazionario viene attirato da un meteorite che lo allontana dalla sua orbita di 6200 km rispetto alla Terra. Trascura l'energia cinetica trasferita dall'asteroide al satellite.

- Quali grandezze restano costanti nel moto del satellite?
- Quali grandezze cambiano nel moto del satellite e che valori assumono?

[$R = 4,9 \times 10^7$ m; $v = 2,9 \times 10^3$ m/s; $T = 1,1 \times 10^5$ s]

6 IL CAMPO GRAVITAZIONALE

PROBLEMA MODELLO 6 CAMPO GRAVITAZIONALE

Il *campo gravitazionale* è un modello che ci permette di spiegare l'interazione tra corpi lontani.

- **Calcola il modulo del campo gravitazionale terrestre in un punto a 100 km dal suolo.**
- **Quale raggio dovrebbe avere la Terra perché il valore del campo gravitazionale sulla superficie fosse uguale a quello di Giove?**

DATI	INCOGNITE
Altezza: $h = 100\ \text{km} = 1{,}00 \times 10^5\ \text{m}$ Modulo del campo gravitazionale alla superficie di Giove: $g_G = 24{,}8\ \text{m/s}^2$	Modulo del campo gravitazionale a 100 km: g_1 Raggio della Terra ipotetico: R_i

L'IDEA

- Fra il campo gravitazionale terrestre e il quadrato della distanza rispetto al centro della Terra esiste una relazione di proporzionalità inversa.

LA SOLUZIONE

Ricavo il modulo del campo gravitazionale g_1 utilizzando la formula [15].
Ricaviamo la distanza del punto che ci interessa dal centro della Terra:

$$r = h + R_T = 1{,}00 \times 10^5\,\text{m} + 6{,}37 \times 10^6\,\text{m} = 6{,}47 \times 10^6\,\text{m}.$$

Dalla formula [16], che esprime la relazione fra g e r^2, ricaviamo il modulo del campo gravitazionale g_1:

$$g_1 = g_0 \frac{R_T^2}{r^2} = 9{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \frac{(6{,}37 \times 10^6\,\text{m})^2}{(6{,}47 \times 10^6\,\text{m})^2} = 9{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ricavo il raggio R_i
Per ricavare il raggio R_i utilizziamo la formula [15] sostituendo a g_0 il valore g_G.

$$R_i = \sqrt{\frac{GM_T}{g_G}} = \sqrt{\frac{\left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \times (5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg})}{24{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 4{,}01 \times 10^6\,\text{m}.$$

PER NON SBAGLIARE

- Se ci allontaniamo dal centro della Terra il campo gravitazionale diminuisce.
- Per aumentare il campo gravitazionale di un pianeta senza modificare la massa dobbiamo diminuire il raggio.

7 L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

75 ★☆☆ Un meteorite di massa 10 kg colpisce la superficie terrestre.

- Quanto vale la sua energia potenziale gravitazionale rispetto al centro della Terra?

[$-6{,}25 \times 10^8$ J]

76 ★☆☆ Un razzo di massa 5000 kg, inizialmente fermo sul suolo terrestre, viene sollevato e allontanato dalla Terra. Poni $k = 0$.

- A quale distanza dalla Terra si ha il valore massimo di energia potenziale?
- Quanto vale il valore massimo dell'energia potenziale?

[0 J]

8 LA FORZA DI GRAVITÀ E LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

PROBLEMA MODELLO 8 BASI SPAZIALI SU MARTE

Negli ultimi anni sono state progettate svariate missioni di esplorazione marziana, alcune anche con l'intento di verificare la possibilità di un insediamento umano permanente. Supponiamo che si voglia lanciare un razzo di massa pari a 15 t da Marte.

- **Qual è il valore minimo dell'energia cinetica che deve avere il razzo per sfuggire al campo gravitazionale del pianeta?**

DATI	INCOGNITE
Massa razzo: $m = 15\ \text{t} = 15 \times 10^3\ \text{kg}$	Energia cinetica minima: K

L'IDEA

- Per sfuggire al campo gravitazionale di Marte, un corpo deve possedere una velocità maggiore o uguale alla velocità di fuga del pianeta.

LA SOLUZIONE

Calcolo la velocità di fuga per Marte.
La velocità di fuga per il pianeta è:

$$v_f = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \times \left(6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\right) \times (6{,}42 \times 10^{23}\,\text{kg})}{3{,}39 \times 10^6\,\text{m}}} = 5{,}03 \times 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ricavo l'energia cinetica minima.
Inseriamo il valore trovato nella formula dell'energia cinetica:

$$K = \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2} \times (15 \times 10^3\,\text{kg}) \times \left(5{,}03 \times 10^3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 1{,}9 \times 10^{11}\,\text{J}.$$

PROBLEMI GENERALI

12 ★★★ Due asteroidi con densità $\rho = 2{,}515\ \text{g/cm}^3$ e raggio $R = 10$ km, si trovano molto distanti fra loro e precipitano uno sull'altro per effetto dell'attrazione gravitazionale.

- Calcola il modulo della velocità v di uno dei due asteroidi al momento dell'impatto.
- Calcola l'accelerazione a di un asteroide al momento dell'impatto.

(*Esame di Fisica per Biologi SEBD, Università di Pisa*)

$\left[v = R\sqrt{\frac{2\pi}{3}G\rho}\,;\ a = \frac{\pi}{3}G\rho R\right]$

13 ★★★ Un pianeta, di forma sferica, ha massa e raggio $M_p = 9{,}686 \times 10^{24}$ kg e $R_p = 2{,}546 \times 10^6$ m, rispettivamente. Inoltre, il periodo di rotazione attorno al proprio asse è $T_p = 8{,}0 \times 10^5$ s.

- Trascurando completamente gli attriti, che velocità minima v dovrebbe avere un proiettile di cannone per effettuare un giro attorno al pianeta?
- Calcolare il raggio R dell'orbita per un satellite geostazionario di massa $m = 1000$ kg. Scrivere nel risultato il rapporto R/R_p.
- Calcolare l'energia totale E del satellite.
- Calcolare con che velocità V casca sulla superficie del pianeta un meteorite proveniente da distanza molto grande con velocità nulla.

(*Esercizi per l'esame di Fisica per Biologi SEBD, Università di Pisa*)

$\left[v = \sqrt{\frac{GM_p}{R_p}}\,;\ \frac{R}{R_p} = \sqrt[3]{\frac{GM_pT_p^2}{4\pi^2R_p^2}}\,;\ E = -\frac{GM_pm}{2R}\,;\ V = \sqrt{\frac{2GM_p}{R_p}}\right]$

14 ★★★ Due piccoli asteroidi di massa $m_1 = 4 \times 10^9$ kg e $m_2 = 2\,m_1$ si trovano in quiete a distanza infinita l'uno dall'altro. Essi iniziano a muoversi sotto l'effetto della loro forza gravitazionale. Supponendo che non vi siano altri corpi che influenzano il loro moto, determinare le seguenti grandezze quando arrivano alla distanza relativa $R = 6{,}67 \times 10^3$ km:

- l'energia cineti ca totale dei due corpi;
- la velocità del centro di massa dei due corpi;
- il modulo della velocità dell'asteroide di massa m_1.

(*Esame di Fisica, Corso di laurea in Farmacia, Università La Sapienza di Roma*, 2009/2010)