

↑ IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
5. La dilatazione dei tempi	 ESPERIMENTO VIRTUALE Tempo che si dilata Gioca, misura, esercitati	
 MAPPA INTERATTIVA	20 TEST INTERATTIVI SU ZTE CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...»	

↑ VERSO IL CLIL

 QUESTIONS AND ANSWERS	 AUDIO
<p>► What is an inertial frame?</p> <p>To get a shopping trolley moving you have to give it a push – exert a force on it in the forward direction – and the more shopping in the trolley the bigger the push needed to move or to stop it once moving. This resistance to a change is described as <i>inertia</i>: the resistance an object has to a change in its state of motion. Newton's first law is often called the law of inertia: a body at rest remains at rest, and a body in motion will continue in uniform motion in a straight line as long as no force acts on it. To describe motion it is necessary to have something to refer it to: other bodies such as the stars, observers or a coordinate system in which the position and orientation of an object can be measured at different times, i.e. a reference frame. A reference frame in which the law of inertia always applies is called an inertial frame. The importance of inertial frames is that within them the laws of motion and physics in general take the same form.</p>	
<p>► What are the Galilean transformation equations?</p> <p>Galileo observed that projectile motion at an angle was analogous with launching the projectile vertically on a carriage moving with uniform velocity when viewed by a stationary observer on the ground. By convention the observer at rest on the ground and the set of observations they make is referred to as the unprimed set (x, y, z, t) and the observer and their set of observations in the carriage moving with uniform velocity the primed set (x', y', z', t'). The two sets of coordinates are chosen such that x is parallel to x', y to y' and z to z' and such that the primed frame moves parallel to x. The primed frame moves with velocity v and, for convenience, the origins of the sets coincide at $t = t' = 0$. Measurements of the coordinates and the time made by the observers in the primed and the unprimed frame are related by the equations $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$ and $t' = t$: these are the Galilean transformation equations.</p>	
<p>► Is the Earth an inertial frame?</p> <p>By definition an object at rest or in uniform motion should remain so unless acted on by an external force. If the Earth were stationary or moving in a straight line with uniform motion then it would be an inertial frame. Proof of it being a non-inertial frame came from experiments aimed at showing that the Earth revolved around the Sun. In 1836, the Scottish scientist Edward Sang described how a spinning top could be used to demonstrate the rotation of the Earth, and in 1851, Foucault showed that the plane of vibration of his pendulum rotated with respect to the floor. The inference from these experiments is that the Earth is moving in a non-uniform way. The rotation of the Earth about its axis and its revolution around the Sun mean that our description of motion has to be supplemented by apparent (also called pseudo or fictitious) forces such as the Coriolis effect which describes the deflection of moving objects when viewed in a rotating reference frame.</p>	

► What was the origin of the Lorentz transformation?

Maxwell's equations were tested experimentally and were seen to provide a full description of electromagnetism, however they do not remain the same under the Galilean transformation. Physicists at the time intuitively felt that, in analogy with sound or water waves, that electromagnetic waves were propagated through a medium, which they called the luminiferous aether. The Michelson-Morley experiment showed that testing for relative movement between the Earth and the aether gave a null or inconclusive result. Lorentz showed that Maxwell's equations would hold and the Michelson-Morley experiment null result could be understood if the Galilean transformation was modified to take into account both length contraction in the x direction and what he called "local time", that time is not universal but relative.

PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

1 VELOCITÀ DELLA LUCE E SISTEMI DI RIFERIMENTO

8 ★★★ Calcola la distanza percorsa da un raggio di luce in 1 minuto, in un giorno e in un anno.

$$[1,8 \times 10^{10} \text{ m}; 2,6 \times 10^{13} \text{ m}; 9,5 \times 10^{15} \text{ m}]$$

9 ★★★ Il Sole dista circa $1,5 \times 10^8$ km dalla Terra. In un dato

istante, sul Sole compare una macchia.

► Dopo quanto tempo la macchia sarà visibile sulla Terra?

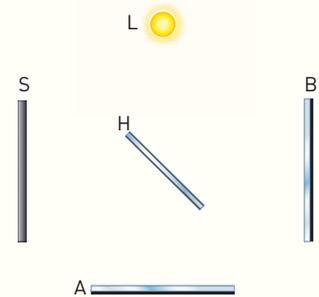
$$[5,0 \times 10^2 \text{ s}]$$

2 L'ESPERIMENTO DI MICHELSON-MORLEY

PROBLEMA MODELLO 2 UN ESPERIMENTO FAMOSO

Nell'esperimento di Michelson e Morley del 1887, la lunghezza dei due bracci AH e HB dell'interferometro è $l = 2 \times 10^7 \lambda$, dove λ è la lunghezza d'onda della luce monocromatica gialla. La velocità della Terra rispetto al Sole (e quindi rispetto al supposto sistema di riferimento dell'etere) è $v = 30$ km/s.

► Calcola il rapporto fra la distanza percorsa dalla luce gialla nell'intervallo di tempo $\Delta t_1 - \Delta t_2$ tra i ritorni dei due raggi di luce allo specchio semiriflettente e la lunghezza d'onda della luce gialla.



■ DATI

Lunghezza dei bracci: $l = 2 \times 10^7 \lambda$
 Velocità della Terra rispetto all'etere: $v = 30$ km/s

■ INCOGNITE

Rapporto: $\frac{d}{\lambda} = ?$

L'IDEA

- Ritenendo valida l'ipotesi dell'etere, i due raggi tornano allo specchio semiriflettente in istanti diversi.
- Calcolo i due intervalli di tempo con le formule ricavate nella teoria.

LA SOLUZIONE

Ricavo le espressioni dei due intervalli di tempo.

Usando le espressioni ricavate nel testo, risulta che il raggio parallelo alla velocità del laboratorio percorre il braccio AH in un intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{2lc}{c^2 - v^2} = \frac{2 \times 2 \times 10^7 \lambda c}{c^2 - v^2} = \frac{4 \times 10^7 \lambda c}{c^2 - v^2}$$

mentre il raggio perpendicolare lungo il braccio HB impiega un tempo pari a

$$\Delta t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2 \times 2 \times 10^7 \lambda}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{4 \times 10^7 \lambda}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Calcolo il rapporto $\frac{d}{\lambda}$.

Nell'intervallo di tempo $\Delta t_1 - \Delta t_2$ che intercorre tra gli arrivi dei due raggi sullo specchio semiriflettente, un raggio di luce gialla percorre una distanza

$$d = c(\Delta t_1 - \Delta t_2) = c \times 4 \times 10^7 \lambda \left(\frac{c}{c^2 - v^2} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right)$$

Quindi il rapporto tra questa distanza e la lunghezza d'onda della luce gialla è

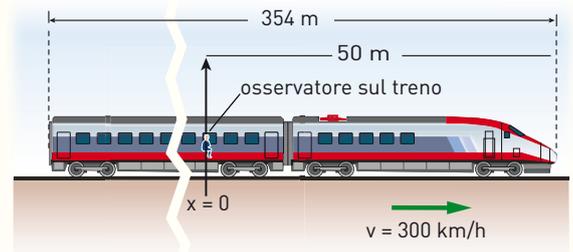
$$\begin{aligned}\frac{d}{\lambda} &= 4 \times 10^7 \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} - \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = 4 \times 10^7 \left(\frac{1}{1 - v^2/c^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = \\ &= 4 \times 10^7 \left(\frac{1}{1 - [(30 \text{ km/s})/(300\,000 \text{ km/s})]^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - [(30 \text{ km/s})/(300\,000 \text{ km/s})]^2}} \right) = \\ &= 4 \times 10^7 \times 5 \times 10^{-9} = 0,20\end{aligned}$$

Nell'intervallo di tempo considerato, la luce percorre quindi una distanza pari al 20% della lunghezza d'onda della luce gialla; è una distanza più che sufficiente per cambiare significativamente la figura d'interferenza prodotta dai due raggi rispetto alla figura che si ottiene in assenza di moto rispetto all'etere.

4 LA SIMULTANEITÀ

30 ★★★ Un treno ETR 500 lungo $L = 354 \text{ m}$ si muove con velocità $v = 300 \text{ km/h}$. Nel SRI del capotreno, fermo in stazione, due luci, in testa e in coda al treno, si accendono simultaneamente. Un passeggero è seduto a $d = 50 \text{ m}$ dalla testa del treno.

- ▶ Calcola la durata, nel SRI del capotreno, dell'intervallo di tempo tra gli arrivi dei due segnali luminosi al passeggero.



[$8,5 \times 10^{-7} \text{ s}$]

5 LA DILATAZIONE DEI TEMPI

38 ★★★ Un'astronave della celebre saga Star Trek si trova ferma a una distanza di 15 UA dalla Terra (ricorda che $1 \text{ UA} = 1,496 \times 10^{11} \text{ m}$). L'equipaggio dà inizio a un esperimento inviando un fascio di raggi luminosi alle ore 9:55, ora terrestre.

- ▶ A che ora i raggi di luce arrivano sulla Terra?
- ▶ Appena emesso il fascio di raggi luminosi, l'astronave si mette in moto con velocità costante $v = 0,70 c$. L'esperimento secondo gli orologi di bordo dura 30 min. Quanto dura secondo gli osservatori sulla Terra?

[12:00; 42 min]

39 ★★★ Anche i processi biologici devono soddisfare gli assiomi della relatività, altrimenti potrebbero essere usati per dedurre il moto e la velocità del sistema di riferimento.

- ▶ Quale velocità deve avere una navicella spaziale perché il suo equipaggio invecchi della metà rispetto a chi è rimasto a terra?

[$0,87 c$]

6 LA CONTRAZIONE DELLE LUNGHEZZE

PROBLEMA MODELLO 5 UN AEREO IN VOLO SI ACCORCIA?

L'aereo per trasporto passeggeri Airbus 380 ha una lunghezza propria $L_0 = 73 \text{ m}$ e una velocità di crociera $v = 250 \text{ m/s}$.

- ▶ Calcola la sua lunghezza, misurata da terra, quando viaggia alla velocità di crociera.
- ▶ Calcola a che velocità dovrebbe muoversi per risultare, rispetto a terra, più corto di 1,0 mm.



$L_0 = 73 \text{ m}$
 $v = 250 \text{ m/s}$
 $L = ?$

■ DATI

Lunghezza dell'aereo: $L_0 = 73 \text{ m}$
 Velocità di crociera dell'aereo: $v = 250 \text{ m/s}$
 Accorciamento richiesto: $\Delta L = -1,0 \text{ mm}$

■ INCOGNITE

Lunghezza in moto: $L = ?$
 Velocità per ottenere l'accorciamento ΔL : $v' = ?$

L'IDEA

- Secondo la teoria della relatività ristretta, la lunghezza di un oggetto in movimento risulta minore di quella che ha quando è fermo.
- Applichiamo la formula della contrazione delle lunghezze $L = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} L_0$ per trovare le soluzioni ai quesiti proposti.

LA SOLUZIONE

Calcolo la lunghezza dell'aereo quando si muove a velocità di crociera.

Il fattore β dell'aereo in volo è

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{250 \text{ m/s}}{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 8,3 \times 10^{-7}$$

e la lunghezza dell'aereo in volo è

$$L = \sqrt{1 - \beta^2} L_0 = \sqrt{1 - (8,3 \times 10^{-7})^2} \times (73 \text{ m}) \cong 73 \text{ m}$$

Usando due cifre significative, la contrazione dell'aereo non è osservabile.

Calcolo la velocità dell'aereo per ottenere la contrazione richiesta.

Sempre dalla formula della contrazione delle lunghezze ricavo l'espressione della contrazione:

$$\Delta L = L - L_0 = (\sqrt{1 - \beta^2} - 1)L_0$$

Da questa relazione si ottiene il nuovo valore del fattore β :

$$(\sqrt{1 - \beta^2} - 1) = \frac{\Delta L}{L_0} \Rightarrow \beta = \sqrt{1 - \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1,0 \times 10^{-3}}{73}\right)^2} = 5,2 \times 10^{-3}$$

Quindi la velocità necessaria per raggiungere una contrazione di 1,0 mm è

$$v = \beta c = 5,2 \times 10^{-3} \times (3,0 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1,6 \times 10^6 \text{ m/s}$$

48 ★★★ Sulla Terra un razzo misura 3,0 m. Una volta in volo nello spazio, la sua lunghezza misurata da Terra è 1/3 più corta.

► A che velocità si muove il razzo?

$$[2,2 \times 10^8 \text{ m/s} = 0,75 c]$$

49 ★★★ La lunghezza propria di una sbarra vale $\Delta x = 4,0 \text{ m}$. Il sistema di riferimento S' si muove, rispetto alla sbarra, con velocità $v = 8,7 \times 10^7 \text{ m/s}$.

► Calcola la lunghezza $\Delta x'$ della sbarra secondo le misure effettuate in S' .

$$[3,8 \text{ m}]$$

7 L'INVARIANZA DELLE LUNGHEZZE IN DIREZIONE PERPENDICOLARE AL MOTO RELATIVO

61 ★★★ Un elettrone si muove con velocità costante all'interno di un acceleratore di particelle, in cui è presente un'etichetta a forma di triangolo equilatero, di lato $l = 4,0 \text{ cm}$, con l'altezza nella direzione di moto dell'elettrone. Nel sistema di riferimento dell'elettrone, l'area dell'etichet-

ta è metà di quella misurata nel sistema di riferimento dell'acceleratore.

► Determina la velocità dell'elettrone.

$$[2,6 \times 10^8 \text{ m/s}]$$

8 LE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ

68 ******* Un robot aspirapolvere viene utilizzato per pulire il pavimento di una base spaziale a pianta rettangolare. Un angolo dell'astronave viene scelto come origine del sistema di coordinate. Il dispositivo all'istante $t_1 = 0$ s si trova in $x_1 = 3,0$ m e raggiunge la posizione $x_2 = 4/5 ct_2$ all'istante $t_2 = 0,30$ μ s, muovendosi con velocità costante lungo la direzione positiva dell'asse x . Nel sistema di riferimento della Terra la base spaziale ha velocità $v = -3c/4$.

- Calcola le corrispondenti coordinate del robot nel sistema di riferimento della Terra.

- Calcola la velocità del robot rispetto alla base spaziale e rispetto alla Terra.
- Un secondo robot viene utilizzato in identiche condizioni su un aereo di linea che vola a velocità costante 750 km/h. Quali trasformazioni di coordinate useresti per risolvere il problema?

[4,5 m; $1,1 \times 10^{-8}$ s; $2,1 \times 10^2$ m; $7,3 \times 10^{-7}$ s; $2,3 \times 10^8$ m/s; $2,9 \times 10^8$ m/s]

9 L'EFFETTO DOPPLER RELATIVISTICO

PROBLEMA MODELLO 8 UN SOS SPAZIALE

In un film di fantascienza, un'astronave è in avvicinamento alla base alla velocità $v = 3c/4$ e comunica mandando segnali di frequenza $f_1 = 76$ MHz. Dopo avere affiancato la base, se ne allontana, mantenendo la velocità invariata. A un certo punto si verifica un problema a bordo e il comandante dell'astronave lancia un SOS diretto alla base.

- Calcola la frequenza che deve avere il segnale di SOS affinché la base lo capti.

■ DATI

Velocità dell'astronave: $v = 3c/4$
Frequenza in avvicinamento: $f_1 = 76$ MHz

■ INCOGNITE

Frequenza in allontanamento: $f_2 = ?$

L'IDEA

- Sia in avvicinamento che in allontanamento, la frequenza dei segnali emessi dall'astronave subisce effetto Doppler, quindi deve essere scelta in modo tale da potere essere captata dalla base (indicata nei calcoli col pedice 0).
- La formula dell'effetto Doppler per l'avvicinamento ($f' = f \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$) differisce da quella per l'allontanamento ($f' = f \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$).

LA SOLUZIONE

Ricavo il fattore β .

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{3c/4}{c} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Ricavo la frequenza del segnale ricevuto dalla base quando l'astronave si avvicina.

Quando l'astronave si avvicina alla base, quest'ultima riceve i segnali a una frequenza maggiore di quella con cui vengono emessi. Dalla formula dell'effetto Doppler relativistico risulta che tale frequenza di ricezione è:

$$f_0 = f_1 \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = (76 \text{ MHz}) \times \sqrt{\frac{1+0,75}{1-0,75}} = 2,0 \times 10^2 \text{ MHz}$$

Calcolo la frequenza del segnale emesso dall'astronave in allontanamento dalla base.

Quando l'astronave si allontana, la formula dell'effetto Doppler è quella relativa al caso in cui sorgente e ricevitore sono in allontanamento. Il segnale di SOS dev'essere dunque emesso alla frequenza f_2 che soddisfa la formula

$$f_0 = f_2 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Invertendo la formula si ottiene:

$$f_2 = f_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = (2,0 \times 10^2 \text{ MHz}) \times \sqrt{\frac{1 + 0,75}{1 - 0,75}} = 5,3 \times 10^2 \text{ MHz}$$

PER NON SBAGLIARE

Identifica con chiarezza chi è l'emittente e chi è il ricevente e ricorda che la formula dell'effetto Doppler è diversa a seconda che la sorgente si avvicini o si allontani dal ricevente.

78 ******* Un oggetto celeste molto lontano, per esempio un *quasar*, emette onde luminose con frequenza f . La frequenza delle stesse onde misurata da Terra è $f' = 0,75 f$.

► Calcola la velocità di allontanamento del *quasar* dalla Terra.

[$8,4 \times 10^7$ m/s]

PROBLEMI GENERALI

10 ******* Un oggetto ha forma circolare, di raggio $r = 32$ cm, quando è fermo. L'oggetto è posto in moto rettilineo uniforme alla velocità $v = 2,0 \times 10^5$ km/s lungo la direzione di un suo diametro.

- Qual è la forma dell'oggetto in moto?
- Calcola i parametri caratteristici della forma dell'oggetto quando è in moto.

[Un'ellisse; asse minore 48 cm; asse maggiore 64 cm]

11 ******* Alla base di un acceleratore è posta una scatola a forma di parallelepipedo, con due spigoli uguali, di misura $a = 4,6$ cm, che costituiscono gli spigoli di base, e il terzo spigolo, di misura $b = 1,2$ cm, che ne è l'altezza. Visto dall'alto, il parallelepipedo ha l'aspetto di un quadrato di lato a . Un fascio di elettroni si muove a velocità $v = 0,90 c$ parallelamente a una diagonale di base del parallelepipedo.

- Calcola il volume del parallelepipedo nel sistema di riferimento solidale con il fascio di elettroni.

[11 cm³]

12 ******* In un incrocio tra due "astrostrade" è posto un semaforo che segna rosso, con lunghezza d'onda $\lambda = 700$ nm. Un'astronave si avvicina all'incrocio e, a causa della sua elevata velocità, vede il semaforo verde. La lunghezza d'onda della luce verde è compresa tra $\lambda_{\min} = 470$ nm e $\lambda_{\max} = 570$ nm.

- Determina l'intervallo di valori possibili per la velocità dell'astronave.

[Tra $0,20 c$ e $0,38 c$]

13 ******* S' è un sistema di riferimento inerziale che si muove, rispetto a un sistema di riferimento S , con velocità \vec{v} parallela all'asse delle ascisse di entrambi i sistemi. S'' è un terzo sistema di riferimento in moto con velocità \vec{v}' rispetto a S' . Le due velocità \vec{v} e \vec{v}' sono parallele.

- Ricava le equazioni delle trasformazioni di Lorentz dal sistema S al sistema S'' .

Suggerimento: usa i parametri β e γ .

$$[x'' = \gamma\gamma'[(1 + \beta\beta')x - (v + v')t], t'' = \gamma\gamma'[(1 + \beta\beta')t - (\beta + \beta')x/c], y'' = y, z'' = z]$$

TEST

7 Un astronauta in moto a velocità $0,9c$ rileva che il suo cuore fa un battito ogni $0,9$ s. La base di controllo sulla Terra, che sta registrando istante per istante la sua attività cardiaca, misura un battito ogni $1,2$ s. Quale delle seguenti affermazioni è sbagliata?

- A** Il tempo per l'astronauta scorre più lentamente, quindi anche l'intervallo fra due battiti è minore rispetto a quello misurato dagli osservatori sulla Terra.
- B** Il confronto fra le due misure del battito cardiaco mostra che l'astronauta invecchia più lentamente di un osservatore sulla Terra.
- C** Sull'astronave, in moto a una velocità prossima a quella della luce, anche le funzioni biologiche rallentano rispetto a un osservatore sulla Terra.
- D** Il battito del cuore è rallentato rispetto alla base di controllo sulla Terra perché nello spazio gli orologi funzionano in modo scorretto.

8 La rete metropolitana di Roma è formata da due bracci all'incirca ortogonali denominati metro A e B. Nelle due stazioni capolinea del braccio A si accendono simultaneamente le luci per un osservatore a terra. Osservano l'evento un passeggero (A) in moto lungo la linea A, e un passeggero (B) in moto in direzione perpendicolare alla linea A ed equidistante dalle due stazioni.



- A** B vede la luce accendersi *prima* nella direzione da cui proviene A, mentre A considera gli eventi simultanei.
- B** B vede la luce accendersi *dopo* nella direzione da cui proviene A, mentre A considera gli eventi simultanei.
- C** A vede la luce accendersi *prima* nella direzione da cui proviene, mentre B considera i due eventi simultanei.
- D** A vede la luce accendersi *dopo* nella direzione da cui proviene, mentre B considera i due eventi simultanei.

9 Un'astronave transita vicino alla Terra e sorvola l'Europa in direzione sud-nord. Per i viaggiatori spaziali, rispetto agli abitanti della Terra:

- A** il mare Tirreno appare più vicino al mare Adriatico.
- B** la penisola italiana appare più lunga e più sottile.
- C** Roma e Milano appaiono meno distanti.
- D** la penisola italiana appare più corta e più larga.

10 Le trasformazioni di Lorentz e le trasformazioni di Galileo:

- A** si possono considerare equivalenti quando le velocità in gioco sono molto piccole rispetto a c .
- B** si possono considerare equivalenti quando le velocità in gioco sono molto grandi rispetto a c .
- C** coincidono quando $v = c$.
- D** si applicano rispettivamente ai fenomeni elettromagnetici e a fenomeni meccanici.

11 Una sorgente luminosa si allontana da noi. La luce che rileviamo nel nostro sistema di riferimento è:

- A** spostata verso il rosso.
- B** spostata verso il blu.
- C** né spostata verso il rosso né verso il blu.
- D** spostata verso il blu o verso il rosso a seconda del valore rispettivamente piccolo o grande della sua velocità rispetto a c .

12 Una sorgente luminosa emette un segnale di frequenza f . Un osservatore misura una frequenza f' maggiore di f . In base alle tue conoscenze puoi dire che il *redshift* è:

- A** maggiore di zero.
- B** minore di zero.
- C** uguale a zero.
- D** uguale al rapporto tra i valori delle due frequenze.

13 A quale velocità ci dobbiamo avvicinare a una sorgente, che emette luce di frequenza f , per registrare con i nostri strumenti una radiazione luminosa di frequenza $2f$?

- A** $(1/5)c$.
- B** $(2/5)c$.
- C** $(3/5)c$.
- D** $(4/5)c$.