

## IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
4. L'equivalenza tra massa ed energia	<p> ESPERIMENTO VIRTUALE</p> <p>Propulsione a luce Gioca, misura, esercitati</p>	
	<p> IN 3 MINUTI • Dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze</p>	
<p> MAPPA INTERATTIVA</p>	<p>20 TEST INTERATTIVI SU <b>ZTE</b> CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...»</p>	

## VERSO IL CLIL

FORMULAE IN ENGLISH	AUDIO
<p>Speed of light</p> $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$	<p>The speed of light in a vacuum equals the reciprocal of the square root of the product of the permittivity of free space <math>\epsilon_0</math> and the permeability of free space <math>\mu_0</math>.</p>
<p>Time dilation equation</p> $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$	<p>An interval of time <math>\Delta t</math> measured between two instances in the moving frame equals the corresponding time interval <math>\Delta t_0</math> as measured in the rest frame divided by the square root of one minus the square of the ratio of the velocity of the moving frame to the speed of light.</p>
<p>Beta velocity</p> $\beta = \frac{v}{c}$	<p>Beta is the ratio of the velocity of an object (or an inertial reference frame) <math>v</math> to the speed of light <math>c</math>.</p>
<p>Lorentz factor</p> $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	<p>The Lorentz factor is equal to the reciprocal of the square root of the term one minus the square of <math>\beta</math>. [The Lorentz factor is always greater than or equal to one.]</p>
<p>Length contraction formula</p> $\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$	<p>A distance <math>\Delta x</math> measured between two points in the direction of motion of a moving frame equals the distance between the points when the frame is at rest <math>\Delta x_0</math> multiplied by the square root of one minus the square of the ratio of the velocity of the moving frame to the speed of light.</p>
<p>Velocity-addition formula (also known as the composition law for velocities)</p> $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$	<p>The velocity of a particle in a reference system <math>S</math> is equal to the sum of the velocity <math>u'</math> of the same particle in the reference system <math>S'</math>, and the velocity <math>v</math> of the reference system <math>S'</math> with respect to <math>S</math>, divided by the term: one plus the product of the velocity <math>u'</math> of the particle in the reference system <math>S'</math>, the velocity <math>v</math> of the reference system <math>S'</math> with respect to <math>S</math>, and the reciprocal of the square of the speed of light.</p>

 **QUESTIONS AND ANSWERS** **AUDIO**

► Does special relativity have any everyday applications?

Special relativity may seem exotic and not of much use in our everyday lives, but there is an example of where it serves an extremely useful purpose. When we use the map programme on a mobile phone or sat nav in a car we are making use of the Global Positioning System (GPS): 31 operational satellites that orbit the Earth and provide ground based receivers with their position to an accuracy of 5-10 m. To achieve this accuracy the clocks on the satellites have to be accurate to 20-30 ns. The satellites orbit at an altitude of 20,183 km with an orbital speed of 3.874 km/s. At that speed special relativity tells us that a clock on a satellite will be 7  $\mu$ s per day behind with respect to a clock on Earth. However, general relativity tells us that clocks closer to a massive object will appear to tick more slowly than those located further away such that the clocks on the satellites will get ahead of clocks on Earth by 45  $\mu$ s per day. The GPS system has to take the 38  $\mu$ s per day difference into account, otherwise the positional information would be in error by about 11 km per day and would not be of much use.

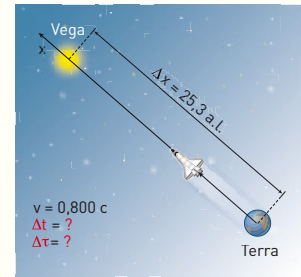
## PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

### 1 L'INTERVALLO INVARIANTE

#### PROBLEMA MODELLO 3 VIAGGIO VERSO VEGA

Si progetta un viaggio di esplorazione verso Vega, della costellazione della Lira. Vega si trova a 25,3 a.l. (anni-luce) dalla terra e l'astronave che sarà utilizzata ha una velocità di crociera pari all'80,0% di  $c$ .

- Qual è la durata del viaggio misurata dal centro spaziale sulla Terra?
- Qual è la durata del viaggio misurata dagli orologi dell'astronave?



#### ■ DATI

Distanza Terra-Vega:  $\Delta x = 25,3 \text{ a.l.}$   
 Velocità dell'astronave:  $v_A = 80,0\% c$

#### ■ INCOGNITE

Durata viaggio nel SR Terra:  $\Delta t_T = ?$   
 Durata viaggio nel SR astronave:  $\Delta t_A = ?$

### L'IDEA

- Fisso i sistemi di riferimento con gli assi delle ascisse disposti nella direzione e nel verso che va dalla Terra a Vega, così:  $\Delta y = \Delta y' = \Delta z = \Delta z' = 0$ .
- Ricordo che poiché 1 a.l. è la distanza percorsa dalla luce in un anno, allora la luce si muove alla velocità di 1 a.l. all'anno. Quindi posso scrivere che la velocità dell'astronave è pari a  $80,0\%c = 0,800c = 0,800 \frac{\text{a.l.}}{\text{anno}}$ .
- Calcolo l'intervallo invariante per determinare la durata del viaggio nel sistema dell'astronave.

### LA SOLUZIONE

Calcolo la durata del viaggio dell'astronave secondo il centro spaziale a Terra.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_A} = \frac{25,3 \text{ a.l.}}{0,800 \text{ (a.l./anno)}} = 31,6 \text{ anni}$$

Calcolo la durata del viaggio dell'astronave secondo gli orologi dell'astronave.

Nel sistema di riferimento dell'astronave la partenza da Terra e l'arrivo a Vega avvengono nello stesso luogo (per esempio la scaletta di discesa dell'astronave), per cui si ha  $\Delta x' = 0$ . Ciò significa che, nel sistema di riferimento dell'astronave, la durata del viaggio è la durata propria  $\Delta \tau$  dell'evento «l'astronave parte dalla Terra e giunge a Vega».

L'invarianza dell'intervallo permette di scrivere:

$$(\Delta \sigma)^2 = (c\Delta \tau)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

cioè

$$c\Delta \tau = \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2},$$

da cui otteniamo

$$\Delta \tau = \frac{\sqrt{\left(1,00 \frac{\text{a.l.}}{\text{anni}} \times 31,6 \text{ anni}\right)^2 - (25,3 \text{ a.l.})^2}}{1,00 \frac{\text{a.l.}}{\text{anni}}} = \frac{18,9 \text{ a.l.}}{1,00 \frac{\text{a.l.}}{\text{anni}}} = 18,9 \text{ anni.}$$

All'arrivo dell'astronave su Vega, per le persone a Terra saranno trascorsi 31,6 anni, ma per l'equipaggio a bordo ne saranno passati meno di 19.

**9** ★★★ Nello spazio-tempo bidimensionale  $(t, x)$  sono dati gli eventi  $A(8,6 \mu\text{s}; 2,0 \text{ km})$  e  $A(2,4 \mu\text{s}; 3,5 \text{ km})$  rilevati nel sistema di riferimento  $S$ . In un secondo sistema di riferimento  $S'$  i due eventi accadono nello stesso punto dello spazio.

- Calcola il tempo intercorso tra i due eventi nel secondo sistema di riferimento.

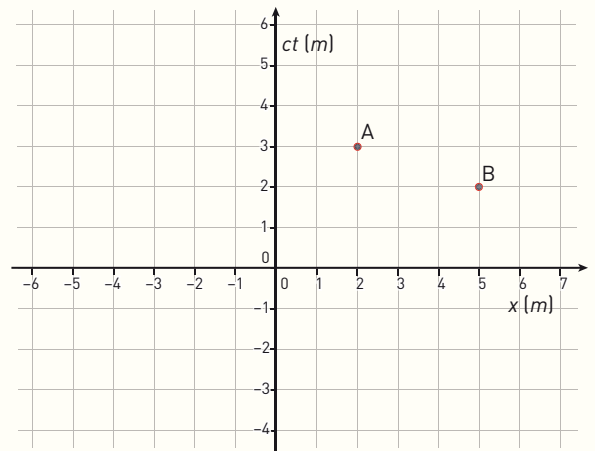
[ $3,7 \times 10^{-6} \text{ s}$ ]

## 2 LO SPAZIO-TEMPO

**24** ★★★ La figura mostra due eventi  $A$  e  $B$  in uno spazio-tempo di Minkowski bidimensionale, cioè con la coordinata temporale e con una sola coordinata spaziale, adatto a descrivere moti rettilinei.

- Determina il quadrato dell'intervallo invariante tra i due eventi e specifica se si tratta di un intervallo di tipo tempo, spazio o luce.
- Quali eventi sono separati dall'evento  $A$  da un intervallo di tipo luce? Quali da un intervallo di tipo tempo? Quali eventi sono separati da  $A$  da un intervallo di tipo spazio?

[ $-8,0 \text{ m}^2$ ; i punti sul cono di luce di  $A$ ; i punti all'interno del cono di luce di  $A$ ; i punti esterni al cono di luce di  $A$ ]



## 3 LA COMPOSIZIONE RELATIVISTICA DELLE VELOCITÀ

**30** ★★★ Nel sistema di riferimento  $S$  viene emesso un impulso di luce, che si propaga nel verso positivo dell'asse  $x$  con velocità  $c$ . Il sistema di riferimento  $S'$  si muove, rispetto a  $S$ , con velocità  $v$  nel verso positivo dell'asse  $x$ .

- Calcola il valore dell'impulso di luce di luce in  $S'$ .

[ $c$ ]

**31** ★★★ Una navetta spaziale si muove a una velocità pari a  $1,2 \times 10^8 \text{ m/s}$  rispetto alla Terra. Dalla navetta dev'essere lanciata una sonda che si muove a velocità doppia, sempre rispetto alla Terra.

- Calcola la velocità della sonda rispetto alla navetta.

[ $1,8 \times 10^8 \text{ m/s}$ ]

## 4 L'EQUIVALENZA TRA MASSA ED ENERGIA

**40** ★★★ Un cucchiaino riscaldato assorbe l'energia  $E = 100 \text{ J}$ .

- Calcola l'aumento di massa del cucchiaino a seguito dell'assorbimento di energia.

[ $1,1 \times 10^{-15} \text{ kg}$ ]

**41** ★★★ Nelle reazioni chimiche, di solito, vengono liberati circa  $10^5 \text{ J}$  per ogni chilogrammo di sostanza.

- Calcola la variazione di massa associata a una variazione di energia  $10^5 \text{ J}$ .

[ $10^{-12} \text{ kg}$ ]

## 5 LA DINAMICA RELATIVISTICA

**60** ★★★ Al CERN di Ginevra l'acceleratore SPS è in grado di accelerare protoni fino a un'energia di  $7,2 \times 10^8 \text{ J}$ .

- Calcola di quanto differisce la velocità finale dei proto-

ni da quella della luce.

[ $6,6 \times 10^2 \text{ m/s}$ ]

## PROBLEMI GENERALI

**9** I muoni sono particelle elementari con massa a riposo  $m_0 = 105,7 \text{ MeV}/c^2$  che si creano quando i raggi cosmici di alta energia entrano in atmosfera. I muoni hanno vita breve, al termine della quale decadono in altre particelle elementari. Considera un muone creato a 10 km dal suolo con velocità  $v = 0,98c$  diretta verso il basso.

- ▶ Calcola la quantità di energia necessaria per creare il muone.
- ▶ Calcola l'energia totale relativistica del muone.

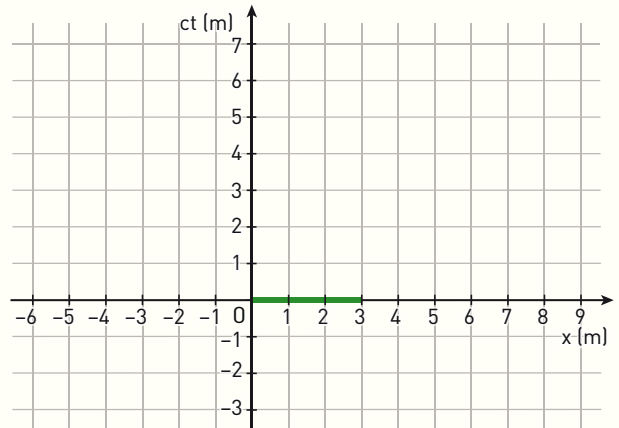
[ $1,7 \times 10^{-11} \text{ J}$ ;  $8,5 \times 10^{-11} \text{ J}$ ]

**10** Nel tubo catodico di un vecchio monitor, gli elettroni sono accelerati, da fermi, fino a un'energia cinetica pari a  $4,6 \times 10^{-15} \text{ J}$ .

- ▶ Calcola la differenza tra il valore classico e quello relativistico della velocità finale.

[ $4,0 \times 10^6 \text{ m/s}$ ]

**11** In un sistema di riferimento inerziale  $S$  un'asta è lunga  $L = 3,0 \text{ m}$  e si muove con velocità  $v = 0,5c$  nel verso positivo dell'asse  $x$ . La sua posizione nello spazio-tempo di Minkowski bidimensionale di  $S$  è mostrata nella figura dalla linea verde.



L'asta si sposta di 1,0 m.

- ▶ Disegna lo spostamento dell'asta nel diagramma spazio-tempo.
- ▶ Disegna le rette che rappresentano gli assi  $x'$  e  $ct'$  del sistema di riferimento  $S'$  solidale con l'asta.
- ▶ Determina gli eventi corrispondenti alle posizioni dell'estremo sinistro e dell'estremo destro dell'asta al tempo  $t' = 0$  e ricava la lunghezza dell'asta in  $S'$ .

[ $2\sqrt{3} \text{ m}$ ]

## TEST

5 Un elettrone fermo possiede un'energia totale pari a:

- A 0 J
- B  $8,2 \times 10^{14}$  J
- C  $8,2 \times 10^{-14}$  J
- D non si può calcolare.

6 In quale di queste situazioni non si ha un aumento della massa?

- A Un proiettile è lanciato.
- B Una molla è compressa.
- C Una molla è allungata.
- D Una quantità di acqua è raffreddata.

7  $E_0$  è l'energia di riposo di una particella che si muove con velocità  $v$ . Allora la sua energia cinetica relativistica  $K_r$  è:

- A  $(\gamma - 1)E_0$
- B  $\gamma E_0$
- C  $(\gamma - 1)E_0 c^2$
- D  $\gamma E_0 c^2$

8 La relazione relativistica tra energia totale  $E$ , massa  $m_0$  e quantità di moto  $p_r$  può essere scritta nella forma:

- A  $E = m_0 c^2 + p_r$
- B  $E = m_0 c^2 - p_r$
- C  $E^2 = m_0^2 c^4 + p_r^2 c^2$
- D  $E^2 = m_0^2 c^4 - p_r^2 c^2$

9 The sun produces  $3.8 \times 10^{26}$  W through fusion. How much mass is it losing every second? (The speed of light is  $c = 3.0 \times 10^8$  m/s)

- A  $4.2 \times 10^9$  kg  $s^{-1}$
- B  $4.2 \times 10^{12}$  kg  $s^{-1}$
- C  $3.4 \times 10^8$  kg  $s^{-1}$
- D  $1.3 \times 10^7$  kg  $s^{-1}$

*Oxford University - Physics Aptitude Test 2009*

10 A pulse of light of duration 100 ns is absorbed completely by a small object initially at rest. Power of the pulse is 30 mW and the speed of light is  $3 \times 10^8$  m/s. The final momentum of the object is:

- A  $0.3 \times 10^{-17}$  kg  $\cdot$  m/s
- B  $1.0 \times 10^{-17}$  kg  $\cdot$  m/s
- C  $3.0 \times 10^{-17}$  kg  $\cdot$  m/s
- D  $9.0 \times 10^{-17}$  kg  $\cdot$  m/s

*Joint Entrance Examination for Indian Institutes of Technology (JEE) - 2013*