

## IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
1. Il problema della gravitazione	<p> <b>ESPERIMENTO VIRTUALE</b></p> <p>Accelerazioni e forze Gioca, misura, esercitati</p>	
	<p> <b>IN 3 MINUTI</b> • <math>E = mc^2</math></p>	
 MAPPA INTERATTIVA	<p><b>20 TEST INTERATTIVI SU  CON FEEDBACK</b>                      «Hai sbagliato, perché...»</p>	

## VERSO IL CLIL

 FORMULAE IN ENGLISH	 AUDIO
<p><b>Rest energy</b></p> $E_0 = m_0 c^2$	<p>The total internal energy of a body at rest is equal to the product of its rest mass <math>m_0</math> (also called invariant mass) and the square of the speed of light.</p>
<p><b>Relativistic mass</b></p> $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0$	<p>The relativistic mass of an object with nonzero rest mass moving with respect to a given frame of reference is equal to the product of the Lorentz factor <math>\gamma</math> and the rest mass <math>m_0</math>.</p>
<p><b>Total energy</b></p> $E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma m_0 c^2$	<p>The energy of an object with rest mass <math>m_0</math> moving with respect to a given frame of reference is equal to the product of the Lorentz factor <math>\gamma</math>, the rest mass <math>m_0</math> and the square of the speed of light.</p>

## PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

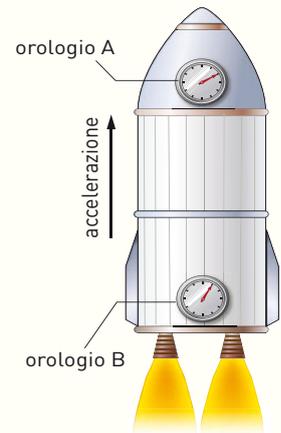
### 5 LO SPAZIO-TEMPO CURVO E LA LUCE

#### PROBLEMA MODELLO 2 LA DILATAZIONE GRAVITAZIONALE DEI TEMPI

A bordo di un'astronave del futuro sono collocati due orologi. L'orologio A si trova in testa e l'orologio B in coda, a distanza  $d = 330$  m l'uno dall'altro. Rispetto a un sistema di riferimento inerziale l'astronave è accelerata, da ferma, verso l'alto, con accelerazione costante:  $a = 9,8$  m/s<sup>2</sup> in modo da simulare la gravità terrestre al suo interno. L'astronave parte da ferma, quindi ha velocità non relativistica.

Ogni secondo l'orologio A emette un lampo di luce, che raggiunge B con un certo ritardo.

- ▶ I lampi di luce raggiungono l'orologio B a distanza di 1,0 s oppure no?
- ▶ Calcola la differenza tra la frequenza con cui i lampi di luce raggiungono l'orologio B e la frequenza con cui sono emessi dall'orologio A.
- ▶ I risultati che hai ottenuto valgono anche per due orologi A e B sulla Terra, con B sul suolo e A a 330 m di altezza?



#### ■ DATI

Accelerazione dell'astronave:  $a = 9,8$  m/s<sup>2</sup>  
 Distanza tra gli orologi:  $L = 330$  m  
 Separazione temporale tra due lampi di luce secondo orologio A:  $\Delta t_A = 1,0$  s cioè  $f_0 = 1,0$  Hz

#### ■ INCOGNITE

Differenza tra le frequenze:  $\Delta f = ?$

#### L'IDEA

- Esaminiamo il problema dal sistema di riferimento inerziale.
- In ogni istante ciascun orologio è solidale con un sistema di riferimento inerziale (che varia al passare del tempo).
- Per calcolare la frequenza con cui B riceve i lampi di luce, applico l'effetto Doppler relativistico. Prima, però, devo determinare la velocità  $v_{B,A}$  dell'orologio B quando riceve il lampo rispetto all'orologio A quando lo emette.

#### LA SOLUZIONE

##### Deduco con un ragionamento l'intervallo temporale tra i lampi di luce.

Quando i lampi di luce sono in viaggio, l'orologio B va loro incontro a velocità sempre maggiore, per cui le distanze che i lampi di luce devono coprire per raggiungere B diventano via via più piccole. Pertanto B riceverà i lampi di luce con frequenza *maggiore* di quella con cui sono messi.

##### Calcolo la velocità dell'orologio B quando riceve il lampo rispetto all'orologio A quando emette il lampo.

Quando l'orologio A emette un lampo di luce, entrambi gli orologi hanno la stessa velocità  $v$ . Quando B riceve il segnale, avrà velocità

$$v' = v + \Delta v = v + g\Delta t$$

dove  $\Delta t$  è il tempo impiegato dal lampo di luce per raggiungere B. Pertanto, la velocità dell'orologio B rispetto

all'orologio A, nel momento di ricezione del lampo di luce, è

$$v_{B,A} = v' - v = \Delta v = g\Delta t$$

In linea di principio, il valore di  $\Delta t$  di ciascun lampo differisce da quello degli altri.

### Uso la formula dell'effetto Doppler relativistico per calcolare la frequenza con cui l'orologio B riceve i lampi di luce emessi da A.

Possiamo dunque usare la formula dell'effetto Doppler relativistico (con sorgente e ricevitore in avvicinamento) per calcolare la frequenza con cui l'orologio B riceve i lampi di luce:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + v_{B,A}/c}{1 - v_{B,A}/c}} = f_0 \sqrt{\frac{(1 + v_{B,A}/c) \times (1 + v_{B,A}/c)}{(1 - v_{B,A}/c) \times (1 + v_{B,A}/c)}} = f_0 \frac{(1 + v_{B,A}/c)}{\sqrt{1 - (v_{B,A}/c)^2}} = f_0 \frac{(1 + g\Delta t/c)}{\sqrt{1 - (g\Delta t/c)^2}}$$

### Introduco alcune approssimazioni.

Svolgo i calcoli relativamente al primo lampo di luce emesso da A che raggiunge B, e introduco alcune approssimazioni che mi permettono di semplificare i calcoli.

La quantità adimensionale  $g\Delta t/c$  è molto minore di 1:  $g\Delta t/c \ll 1$ .

Il tempo  $\Delta t$  necessario perché il primo lampo di luce raggiunga l'orologio B è sostanzialmente pari a:

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{330 \text{ m}}{3,0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1,1 \times 10^{-6} \text{ s}$$

(nel calcolare  $\Delta t$  abbiamo trascurato la distanza percorsa dal movimento dell'orologio B verso l'orologio A). Quindi risulta:

$$g \frac{\Delta t}{c} = (9,8 \text{ m/s}^2) \times \frac{1,1 \times 10^{-6} \text{ s}}{(3,0 \times 10^8 \text{ m/s})} = 3,6 \times 10^{-14},$$

che è, come abbiamo detto, molto minore di 1.

Nell'espressione della frequenza possiamo quindi usare l'approssimazione

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (g\Delta t/c)^2}} \simeq 1 + \frac{1}{2}(g\Delta t/c)^2$$

Quindi l'espressione della frequenza si semplifica ulteriormente, diventando:

$$f = f_0 \frac{(1 + g\Delta t/c)}{\sqrt{1 - (g\Delta t/c)^2}} \simeq f_0 (1 + g\Delta t/c) \left(1 + \frac{1}{2}(g\Delta t/c)^2\right)$$

Anche questa espressione può essere ulteriormente semplificata, in quanto le potenze  $(g\Delta t/c)^2$  e  $(g\Delta t/c)^3$  forniscono contributi trascurabili rispetto a  $(g\Delta t/c)$ . L'espressione della frequenza si riduce quindi a:

$$f \simeq f_0 (1 + g\Delta t/c) = f_0 \left(1 + g \frac{L_0}{c^2}\right)$$

La differenza tra le frequenze di ricezione di B e quella di emissione di A è:

$$\Delta f = f - f_0 = f_0 g \frac{L_0}{c^2}$$

Inserendo i valori forniti dal testo e  $f_0 = 1,0 \text{ Hz}$  (la frequenza con cui vengono emessi i lampi di luce) si ottiene:

$$\Delta f = f - f_0 = (1,0 \text{ Hz}) \times (9,8 \text{ m/s}^2) \times \frac{330 \text{ m}}{(3,0 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 3,6 \times 10^{-14} \text{ Hz}$$

Si tratta di una differenza certamente piccola, ma rilevabile dai moderni orologi atomici.

### Esamino il caso dei due orologi a differenti quote in un campo gravitazionale.

Il principio di equivalenza ci porta a concludere che il risultato precedente vale anche per due orologi posti a quote diverse che si trovano nel campo gravitazionale di un pianeta.

**16** ★★★ Un orologio atomico A è posto al livello del suolo, mentre un secondo orologio atomico B è in quota a  $h = 670$  m di altezza dal suolo. L'orologio B invia segnali luminosi all'orologio A ogni secondo.

- Calcola la differenza tra la frequenza con cui l'orologio A riceve i segnali luminosi e quella con cui sono emessi dall'orologio B.

**Suggerimento:** usa le formule ricavate nel problema modello.

[ $7,3 \times 10^{-14}$  Hz]

**17** ★★★ Un orologio atomico A è posto al livello del suolo, mentre un secondo orologio atomico B è in quota ad altezza  $h$  dal suolo. L'orologio B invia segnali luminosi all'orologio A ogni secondo. La differenza tra la frequenza con cui l'orologio B invia i segnali luminosi e quella con cui vengono ricevuti dall'orologio A è  $2,5 \times 10^{-14}$  Hz.

- Calcola l'altezza  $h$ .

**Suggerimento:** usa le formule ricavate nel problema modello.

[ $2,3 \times 10^2$  m]

## TEST

**4** Tra le ipotesi seguenti, quali sono fondamentali nella teoria della relatività generale? (*Più di una risposta è giusta*)

- A** La presenza delle masse produce una curvatura dello spazio-tempo.  
**B** Lo spazio-tempo è curvo e le masse si dispongono in base alla sua curvatura.  
**C** Le particelle soggette a una forza qualunque si muovono nello spazio-tempo seguendo una curva geodetica.  
**D** Le particelle soggette solo alla forza di gravità, si muovono nello spazio-tempo lungo geodetiche.

**5** Lo spazio-tempo di Minkowski:

- A** ha curvatura positiva.  
**B** ha curvatura negativa.  
**C** ha curvatura nulla, al contrario di quello euclideo.  
**D** ha curvatura nulla, come quello euclideo.

**6** La luce all'interno di un campo gravitazionale:

- A** non subisce alcun effetto gravitazionale.  
**B** subisce una forza attrattiva, ma non sufficiente a deviarne il cammino.  
**C** subisce una forza attrattiva, che può provocare una deflessione misurabile.  
**D** subisce una forza repulsiva, che può provocare una deflessione misurabile.

**7** Se una radiazione elettromagnetica si allontana da un forte campo gravitazionale, il *redshift* gravitazionale determinerà un aumento:

- A** della velocità di propagazione.  
**B** della frequenza.

**C** della lunghezza d'onda.

**D** di nessuna delle grandezze precedentemente elencate.

**8** In uno spazio curvo, le geodetiche sono:

- A** le curve di minima lunghezza, che rappresentano le traiettorie di particelle libere da forze diverse da quella gravitazionale.  
**B** le curve di minima lunghezza, che rappresentano le traiettorie di particelle soggette a forze diverse da quella gravitazionale.  
**C** le rette che rappresentano le traiettorie di particelle libere da forze diverse da quella gravitazionale.  
**D** le rette che rappresentano le traiettorie di particelle soggette a forze diverse da quella gravitazionale.

**9** Nello spazio-tempo curvo della relatività generale la curva di minima lunghezza che unisce due punti su una superficie sferica è sempre:

- A** una linea retta.  
**B** un'ellisse.  
**C** un'iperbole.  
**D** un arco di circonferenza massima.

**10** Le onde gravitazionali sono:

- A** le onde che si propagano in un fluido soggetto alla forza di gravità.  
**B** le distorsioni dello spazio-tempo determinate dal rapido movimento delle grandi masse.  
**C** le onde d'urto che si propagano in un mezzo materiale per effetto dell'attrazione gravitazionale.  
**D** le diverse curvature dello spazio-tempo determinate dalla presenza di masse diverse.