

ONDE PROGRESSIVE E REGRESSIVE, ONDE STAZIONARIE

Nel paragrafo 4 del capitolo «Le onde elastiche» sono presentate le equazioni

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) \quad (1)$$

e

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right). \quad (2)$$

La prima descrive l'oscillazione di un'onda di periodo T in funzione del tempo in un punto fissato; la seconda rappresenta, a un istante fissato, la variazione dell'onda di lunghezza d'onda λ in funzione della coordinata spaziale x .

Nel caso generale, però, un'onda armonica che si propaga nella direzione x dipende sia dalla coordinata temporale t che da quella spaziale x . In effetti esistono due leggi che descrivono il comportamento dell'onda: una è

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (3)$$

Fase

Ricorda che il valore dell'argomento dell'onda si chiama *fase* dell'onda.

e l'altra è

$$y = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad (4)$$

Si vede che

L'equazione (3) rappresenta un'onda **progressiva**, cioè un'onda che si propaga nel verso *positivo* delle x .

Per dimostrarlo, consideriamo un istante di tempo t_1 e una posizione x_1 ; con questi valori la fase dell'onda (3) vale

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}t_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_1.$$

Ora consideriamo un istante di tempo successivo, $t_2 > t_1$. Vogliamo sapere dove si trova l'onda a questo istante: ciò è equivalente a chiedersi in che posizione x_2 l'onda ha *la stessa* fase φ_1 .

Quindi otteniamo l'equazione di primo grado

$$\frac{2\pi}{T}t_1 - \frac{2\pi}{\lambda}x_1 = \frac{2\pi}{T}t_2 - \frac{2\pi}{\lambda}x_2$$

che ha come soluzione

$$x_2 = x_1 + \frac{\lambda}{T}(t_2 - t_1). \quad (5)$$

Siccome per ipotesi si ha $t_2 > t_1$, il valore di x_2 risulta maggiore di quello di x_1 ; l'oscillazione che si aveva all'istante $t = t_1$ nel punto di ascissa $x = x_1$, all'istante successivo $t = t_2$ si è propagata nel punto con $x = x_2$, che è più lontano di x_1 dall'origine.

Quindi, come affermato in precedenza, l'equazione (3) descrive un'onda che si propaga nel verso positivo dell'asse x .

In maniera analoga si dimostra che

l'equazione (4) rappresenta un'onda **regressiva**, cioè un'onda che si propaga nel verso negativo dell'asse x .

La generazione di onde stazionarie

Ora consideriamo un'onda che si muove in un ambito limitato. Per fissare le idee, immaginiamo una corda tesa (come una di quelle di una chitarra o di un pianoforte) che ha un estremo in $x = 0$ e l'altro in $x = L$.

Generiamo un'onda progressiva presso l'estremo con $x = 0$. Essa si propaga verso l'altro estremo e, quando vi giunge, viene riflessa all'indietro con la stessa ampiezza, la stessa frequenza e la stessa lunghezza d'onda, ma con la forma dell'onda invertita (cioè con l'oscillazione positiva scambiata con quella negativa e viceversa).

In questo modo, sulla corda si propagano insieme un'onda progressiva y_1 data dalla formula (3) e un'onda regressiva y_2 data dalla formula

$$y = -a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right). \quad (6)$$

Così queste due onde si sovrappongono e l'onda complessiva y presente sulla corda ha la forma

$$y = y_1 + y_2 = a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) - a \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right). \quad (7)$$

Per riconoscere il significato della formula (7) ricordiamo una delle formule di prostaferesi per il coseno, secondo cui:

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p - q}{2} \operatorname{sen} \frac{p + q}{2}. \quad (8)$$

Applicando la formula (8) alla (7) otteniamo:

$$\begin{aligned} y &= a \left[\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \right] = \\ &= -2a \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{2\pi}{T}t + \frac{2\pi}{\lambda}x}{2} \right) = \\ &= -2a \operatorname{sen} \left(-\frac{2\pi}{\lambda}x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T}t \right). \end{aligned}$$

Utilizzando ora la proprietà $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$ possiamo scrivere il risultato trovato come

$$y = 2a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda}x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{T}t \right) \quad (9)$$

L'espressione ottenuta nella formula (9) descrive un'onda di periodo T che, al passare del tempo, oscilla con legge sinusoidale. L'ampiezza A dell'onda è

$$A = 2a \operatorname{sen} \left(\frac{2\pi}{\lambda}x \right); \quad (10)$$

ciò significa che l'ampiezza dell'onda dipende dal punto x che si considera: in certi punti l'ampiezza dell'onda è nulla, in altri il suo modulo vale $2a$ e nelle altre posizioni si hanno valori intermedi tra questi due estremi.

Significa anche che, in un punto di ascissa x , l'onda oscilla sempre con la stessa legge. Quindi non si tratta di un'onda progressiva e neppure di un'onda regressiva: onde come quella della formula (9), che non si propagano nello spazio, si chiamano **onde stazionarie**.

Le condizioni al contorno sull'onda stazionaria

Si può notare che nella posizione $x = 0$ l'ampiezza (10) si annulla, visto che vale la relazione $\sin(0) = 0$. Ciò è fisicamente corretto: la corda vibrante che stiamo considerando ha in $x = 0$ un estremo fisso e quindi in quel punto l'ampiezza deve essere identicamente nulla, qualunque sia il valore di t .

Però lo stesso deve accadere nell'altro estremo, in $x = L$. Quindi è necessario che si abbia

$$2a \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{\lambda}L\right) = 0. \quad (11)$$

Si è così ottenuta un'equazione goniometrica, che ha come soluzione

$$\frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi, \quad (12)$$

dove n è un numero intero positivo. Dalla (12) possiamo ricavare una condizione sulla lunghezza d'onda λ , che risulta

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (13)$$

Imponendo le **condizioni al contorno** in $x = 0$ e in $x = L$ abbiamo così scoperto che le lunghezze d'onda dell'onda stazionaria non possono assumere qualunque valore, ma che devono obbedire alla condizione (13).

Sostituendo questa relazione nella (9) otteniamo che l'espressione più corretta dell'equazione dell'onda stazionaria è

$$y = 2a \operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad (14)$$

I nodi dell'onda stazionaria

La formula precedente ci permette allora di capire qual è il significato del parametro (intero positivo) n . Infatti conviene studiare quali sono i punti della corda in cui l'ampiezza dell'onda si annulla; per farlo, occorre porre uguale a zero il fattore della formula (14) che dipende da x . In questo modo si ottiene l'equazione:

$$\operatorname{sen}\left(n \frac{\pi}{L} x\right) = 0, \quad (15)$$

le cui soluzioni sono

$$n \frac{\pi}{L} x = m\pi \quad (m \text{ intero})$$

da cui si ricava

$$x = \frac{m}{n}L, \quad (m \text{ intero con } 0 \leq m \leq n) \quad (16)$$

- Nel caso $n = 1$, m può assumere soltanto i valori $m = 0$ e $m = 1$, per cui l'ampiezza dell'onda si annulla solo negli estremi $x = 0$ e $x = L$;
- nel caso $n = 2$, m assume i valori 0, 1, 2 e, dalla formula (16), oltre che agli estremi l'onda si annulla identicamente anche nel punto medio $x = L/2$ della corda;
- nel caso $n = 3$, m può valere 0, 1, 2 e 3: l'onda si annulla identicamente agli estremi e in due punti che dividono la corda in tre parti uguali, cioè $x = L/3$ e $x = 2L/3$. Questa onda è rappresentata nella **figura 1**.

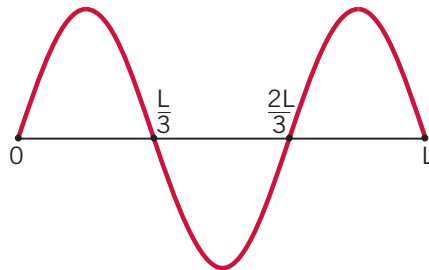


Figura 1 Profilo di un'onda stazionaria con quattro nodi.

I punti in cui l'ampiezza dell'onda stazionaria si annulla si chiamano **nod**i, così,

l'onda stazionaria con $n = 1$ ha due nodi (agli estremi); per altri valori di n l'onda ha $(n + 1)$ nodi, di cui due agli estremi e $(n - 1)$ all'interno della corda vibrante.

Possiamo notare che la condizione (13) risulta uguale alla formula (5) del capitolo «Il suono», che fornisce proprio le lunghezze d'onda dei modi normali su una corda vibrante.

Nel paragrafo 5 di tale capitolo la trattazione delle possibili lunghezze d'onda e dei nodi che ne derivano si basa su un'analisi fenomenologica; con le formule (13), (14) e (16) lo stesso risultato è invece stato raggiunto in modo matematico.

ESERCIZI

PROBLEMI

- 1** ★★★ Un'onda progressiva ha periodo $T = 0,221$ s, lunghezza d'onda $\lambda = 5,18$ m e ampiezza $a = 34,6$ cm.
- Calcola l'altezza dell'onda all'istante $t = 0,154$ s e nella posizione $x = 6,70$ m.
[−0,284 m]
- 2** ★★★ Un'onda regressiva ha periodo e lunghezza d'onda uguali, rispettivamente, a 1,56 s e 48,9 m. L'ampiezza dell'onda è 0,886 m.
- Determina l'altezza dell'onda all'istante $t = 3,35$ s e nella posizione $x = 35,0$ m.
[0,578 m]
- 3** ★★★ Su una corda tesa si propagano un'onda progressiva e la corrispondente onda regressiva. Esse hanno ampiezza $a = 2,47$ cm e lunghezza d'onda 7,43 cm.
- Calcola l'ampiezza A dell'onda risultante nel punto di ascissa 10,5 cm.
[2,56 cm]
- 4** ★★★ Su una corda tesa, di lunghezza $L = 0,650$ m, si genera un'onda stazionaria con cinque nodi e periodo $T = 2,27 \times 10^{-3}$ s. Le onde progressiva e regressiva che generano l'onda stazionaria hanno ampiezza $a = 2,15$ cm.
- Calcola l'ampiezza dell'onda nel punto $x = 0,118$ m e l'altezza dell'onda in tale punto all'istante $t = 4,10 \times 10^{-3}$ s.
[3,26 cm, −3,06 cm]
- 5** ★★★ Considera le due equazioni (3) e (4) delle onde progressive e di quelle regressive.
- Esprimi tali equazioni in modo che contengano la velocità di propagazione v dell'onda e la sua pulsazione $\omega = 2\pi f$ (dove f è la frequenza dell'onda).
[$y = a \cos(\omega(t \pm x/v))$]