IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
3. Le componenti di un vettore	ANIMAZIONE **Versori e componenti cartesiane di un vettore** Come si ottengono le componenti di un vettore lungo gli assi cartesiani? E lungo direzioni qualsiasi?	1 minuto
	ANIMAZIONE **Seno e coseno con la calcolatrice** Un semplice tutorial spiega come usare la calcolatrice scientifica per calcolare seno e coseno e le rispettive operazioni inverse.	3 minuti
4. Il prodotto scalare	ANIMAZIONE **Prodotto scalare** Come si calcola il prodotto scalare tra due vettori?	1 minuto
5. Il prodotto vettoriale	ANIMAZIONE **Il prodotto vettoriale** Come si calcola il prodotto scalare tra due vettori?	1 minuto

30 TEST INTERATTIVI SU ZTE CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...»

VERSO IL CLIL

QUESTIONS AND ANSWERS

AUDIO

► **What is the difference between a scalar and a vector?**

A scalar is a quantity that is fully described by a magnitude (numerical value) alone, whereas a vector is described by both a magnitude and a direction: 5 km and 5 km/s are scalars whereas 5 km north and 5 km/s west are vectors.

► **Why are vectors needed in Physics?**

Many quantities in physics, such as the mass of a book or the time taken for it to fall a certain distance are fully described by a 'size' called a scalar: 10 kg or 10 s for instance. Some quantities such as velocity or force also have direction and to be understandable and verifiable physics requires a mechanism for describing both magnitude and direction, which are combined in vectors.

► **Draw intersecting *x* and *y* axes on a sheet of graph paper. Draw a vector in the plane of the axes and derive the general formula for the magnitude of a vector.**

To make the exercise simple draw the vector in the upper right quadrant where x and y are positive. Once the vector is drawn label the start and end points as (x_1, y_1) and (x_2, y_2). It can be seen that the point (x_2, y_1) form a right angled triangle with the start and end points of the vector. The magnitude (also called the *modulus*) of the vector can therefore be derived using Pythagoras' Theorem.

► **The following instructions are in vector form: A) move 10 m north-west, B) move 10 m north, C) move 10 m east, D) move 10 m south. Does it matter in which order the instructions are carried out?**

The sum of a number of vectors is called the resultant, the sum of the displacement vectors A, B, C and D is the resultant displacement. Vector addition is commutative, for example A+B+C+D=C+A+D+B, and the resultant is independent of the order in which the vectors are added. Therefore the above vector instructions can be carried out in any order and the resultant displacement will always be the same.

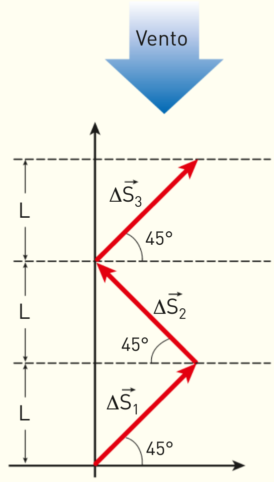
PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

1 VETTORI E SCALARI

10 Il treno Milano-Roma parte alle ore 8:05. Alle ore 9:10 passa per Bologna, alle ore 9:50 arriva a Firenze e alle 10:30 giunge a Roma.

- Individua nella figura i vettori spostamento Milano-Bologna, Bologna-Firenze, Firenze-Roma.
- Individua nella figura il vettore spostamento totale.

11 Le regate sono competizioni tra imbarcazioni senza motore che si muovono a vela. Una gara si svolge su un percorso di andata e ritorno; per muoversi controvento la barca compie una serie di virate a 45° come mostra la figura. Mantenendo una velocità costante di 5,40 km/h, l'imbarcazione più veloce impiega 9,00 min per compiere le virate indicate nella figura e percorrere il tratto controvento.



- Calcola il vettore spostamento in ogni tratto.
- Nel sistema di riferimento disegnato, individua le coordinate della barca all'arrivo.
- Disegna il vettore spostamento totale e calcola la sua lunghezza.
- Confronta la lunghezza del vettore spostamento con la distanza percorsa dalla barca.

[270 m; (191 m, 573 m); 604 m]

2 OPERAZIONI SUI VETTORI

21 Una nave si muove sul mare calmo. In un'ora e mezza la nave si è spostata di 36,7 km verso Est e di 31,4 km verso Nord.

- Disegna i vettori che rappresentano gli spostamenti parziali verso Est e verso Nord, e lo spostamento complessivo $\Delta\vec{s}$.
- Calcola il modulo dello spostamento.
- Descrivi il vettore che rappresenta la velocità media della nave.

[48,3 km; 32,2 km/h]

22 Durante una partita di basket, in 0,38 s un giocatore cambia la propria velocità di 3,1 m/s verso Nord e di 4,3 m/s verso Ovest.

- Disegna i vettori che rappresentano le variazioni parziali di velocità verso Nord e verso Ovest, e la variazione complessiva di velocità $\Delta\vec{v}$.
- Calcola il valore di $\Delta\vec{v}$.
- Calcola il valore dell'accelerazione media del giocatore nell'intervallo di tempo in esame e descrivi il vettore che rappresenta tale accelerazione.

[5,3 m/s; 14 m/s²]

3 LE COMPONENTI DI UN VETTORE

PROBLEMA MODELLO 3 ACCELERAZIONE SU UN PIANO INCLINATO

Una slitta da *sleddog*, trainata da cani, sta procedendo in salita, su un rettilineo inclinato di 12° rispetto all'orizzontale. La massa complessiva della slitta e del passeggero è 95 kg e il coefficiente di attrito tra i pattini della slitta e la neve è 0,11. A un certo istante la forza applicata dai cani lungo la salita ha modulo $F = 5{,}4 \times 10^2$ N.

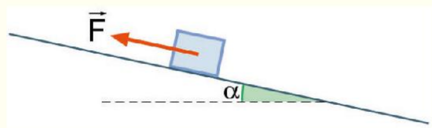
Yongyut Kumsri/Shutterstock

▸ **Quanto vale l'accelerazione della slitta?**

DATI	INCOGNITE
Angolo di inclinazione: $\alpha = 12°$	Accelerazione della slitta: $\boldsymbol{a}$ = ?
Massa totale: $m = 95$ kg	
Coefficiente di attrito dinamico: $\mu_d = 0{,}11$	
Forza esercitata: $F = 5{,}4 \times 10^2$ N	

L'IDEA

La forza totale che accelera la slitta è la somma vettoriale di forze tutte parallele al piano inclinato.



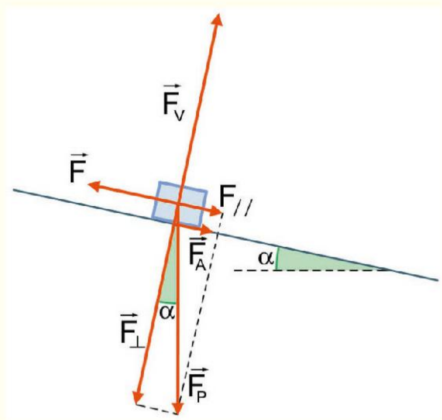
LA SOLUZIONE

Disegno il diagramma delle forze applicate alla slitta.
Sulla slitta sono applicate la forza di trascinamento $\vec{F}$, la forza-peso $\vec{F}_P$, la forza di reazione vincolare $\vec{F}_V$ e la forza di attrito dinamico $\vec{F}_A$. Scomponiamo $\vec{F}_P$ nei suoi componenti $\vec{F}_{//}$ e $\vec{F}_\perp$. In questo modo $\vec{F}_V$ e $\vec{F}_\perp$ si annullano a vicenda e la forza totale $\vec{F}_{tot}$ risulta la somma di forze tutte parallele al piano inclinato:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_{//} + \cancel{\vec{F}_\perp} + \cancel{\vec{F}_V} = \vec{F} + \vec{F}_A + \vec{F}_{//}.$$

Calcolo le componenti della forza-peso.
Tenendo conto delle formule [**10**] possiamo calcolare i moduli di $\vec{F}_{//}$ e $\vec{F}_\perp$, che risultano

$$\begin{cases} F_\perp = mg\cos(12°) = (95\ \text{kg}) \times \left(9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \times 0{,}978 = 9{,}1 \times 10^2\ \text{N} \\ F_{//} = mg\,\text{sen}(12°) = (95\ \text{kg}) \times \left(9{,}8\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \times 0{,}208 = 1{,}9 \times 10^2\ \text{N} \end{cases}$$



Determino l'accelerazione a partire dalla forza totale sulla slitta.
Quindi il modulo della forza di attrito è

$$F_A = \mu_d F_\perp = 0{,}11 \times (9{,}1 \times 10^2\ \text{N}) = 1{,}0 \times 10^2\ \text{N}.$$

Allora, tenendo conto dei versi delle varie forze, possiamo scrivere il modulo della forza totale

$$F_{tot} = F - F_A - F_{//} = 5{,}4 \times 10^2\ \text{N} - 1{,}9 \times 10^2\ \text{N} - 1{,}0 \times 10^2\ \text{N} = \\ = (5{,}4 - 1{,}9 - 1{,}0) \times 10^2\ \text{N} = 2{,}5 \times 10^2\ \text{N}$$

e, dal secondo principio della dinamica $\vec{F}_{tot} = m\vec{a}$, possiamo infine ricavare

$$\boldsymbol{a} = \frac{F_{tot}}{m} = \frac{2{,}5 \times 10^2\ \text{N}}{95\ \text{kg}} = 2{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

PER NON SBAGLIARE

- Con una forza minore di quella data dal problema, la slitta non riuscirebbe ad affrontare la salita e si muoverebbe in discesa: allora l'accelerazione totale sarebbe verso il basso e la forza di attrito punterebbe verso l'alto.

35 ★★★ La componente a_b del vettore $\vec{a}$ lungo $\vec{b}$ vale 12 mentre la componente b_a del vettore $\vec{b}$ lungo $\vec{a}$ vale 34.

- Determina il rapporto tra i due vettori.

[0,35]

36 ★★★ $\vec{a}$ è un vettore lungo 5,0 cm che forma un angolo di 30° verso Est rispetto alla direzione Nord. Moltiplica il vettore $\vec{a}$ per −2.

- Calcola le componenti del vettore risultante rispetto a un sistema di riferimento cartesiano con l'asse y orientato nella direzione Sud-Nord e l'asse x nella direzione Ovest-Est.

[−5,0 cm; −8,7 cm]

37 ★★★ Il vettore $\vec{v}$ è dato dalla combinazione dei tre vettori $\vec{a} = 3\hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{b} = -1\hat{x} + 2\hat{y}$, $\vec{c} = -\hat{x} - 5\hat{y}$ e della costante k, in modo che $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b} - k\vec{c}$.

- Determina il valore della costante k per cui $\vec{v}$ forma un angolo di 45° con l'asse delle x.
- Disegna su un piano cartesiano i quattro vettori.
- Calcola le componenti di $\vec{v}$.

[−1/2; 3/2; 3/2]

38 ★★★ Il vettore $\vec{a} = 1\hat{x} + 1\hat{y}$ forma un angolo di 45° con l'asse delle x e il versore $\hat{b} = b_x\hat{x} + b_y\hat{y}$ è un vettore di lunghezza unitaria che si trova nel quarto quadrante.

- Calcola le componenti del versore $\hat{b}$ affinché si verifichi la condizione: $|\vec{a} + \hat{b}| = |\vec{a} - \hat{b}|$
- Disegna i vettori su un piano cartesiano.

$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y}\right]$

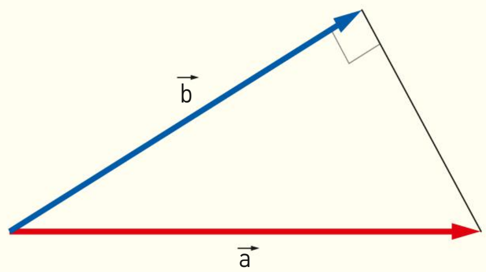
5 IL PRODOTTO VETTORIALE

58 ★★★ I due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ hanno modulo rispettivamente di 5,0 e 8,0 unità. Il vettore $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ha modulo pari a 20 unità.

- Calcola l'ampiezza dell'angolo formato dalle direzioni dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- Il vettore $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{a}$ ha lo stesso modulo di $\vec{c}$?

[30°]

59 ★★★ I vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ costituiscono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo. Il modulo di $\vec{a}$ vale 10 unità e l'altro cateto del triangolo è lungo 5,0 unità. Calcola:



- l'ampiezza dell'angolo formato dalle direzioni dei due vettori;
- il modulo del vettore $\vec{b}$;
- il modulo del prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$.

[30°; 8,7 unità; 44 unità]

60 ★★★ Claudia apre un rubinetto come quello mostrato nella fotografia.

Filmmanjue/Shutterstock

Applica con le dita dalle dita le seguenti forze: F_1 = 3,0 N, F_2 = 4,0 N, F_3 = 5,0 N e F_4 =3,0 N. Il diametro del rubinetto è d = 6,0 cm.

- Calcola il momento totale delle forze rispetto al centro del rubinetto.

[0,45 N · m]

61 ★★★ Un bullone è sottoposto all'azione di una forza. In un sistema di riferimento cartesiano, il vettore che congiunge l'origine O al punto in cui si trova il bullone ha componenti (4,0 cm; −2,0 cm; 3,0 cm). La forza sul bullone di intensità 15 N è diretta in orizzontale cioè parallelamente all'asse x con verso negativo.

- Determina i moduli dei vettori $\vec{r}$ e $\vec{F}$.
- Determina le componenti e il modulo del vettore momento della forza rispetto all'origine del sistema di riferimento.
- Calcola l'angolo compreso fra i due vettori $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

[$5{,}4 \times 10^{-2}$ m, 15 N; $-(45 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{y} + (30 \times 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m})\hat{z}$, 54×10^{-2} N · m; 42°]

PROBLEMI GENERALI

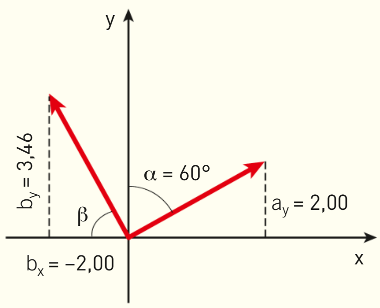
5 ★★★ Il moto di un proiettile è scomposto nel moto lungo x a velocità costante, e nel moto lungo y ad accelerazione costante. Per esempio se si spara un proiettile dall'origine di un sistema di coordinate a un angolo di α = 45° rispetto all'orizzontale con velocità v_0 = 80 m/s si ottengono le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_0 \cos\alpha \\ v_y = v_0 \sin\alpha - gt \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_0(\cos\alpha)t \\ y = v_0(\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

- Determina il prodotto scalare tra la velocità e l'accelerazione.
- Calcola l'istante in cui il vettore velocità è perpendicolare al vettore accelerazione.
- A quale punto sulla traiettoria corrisponde?

[$g^2 t - g v_0 \sin\alpha$; 5,8 s]

6 ★★★ Calcola il prodotto scalare dei due vettori disegnati nella figura.



- In base al risultato ottenuto determina l'angolo β.

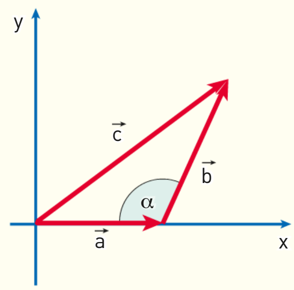
[0; 60°]

7 ★★★ Con i due vettori dell'esercizio precedente vogliamo costruire un nuovo sistema di riferimento cartesiano.

- Determina i nuovi versori $\hat{a}$ e $\hat{b}$.
- Calcola il prodotto scalare tra i nuovi versori e $\hat{x}$.
- Esprimi il versore $\hat{x}$ in funzione di $\hat{a}$ e $\hat{b}$.

$$\left[\frac{3,46\,\hat{x} + 2,00\,\hat{y}}{4,00}; \frac{-2,00\,\hat{x} + 3,46\,\hat{y}}{4,00}; 0,865; -0,500; 0,865\,\hat{a} - 0,500\,\hat{b}\right]$$

8 ★★★ Il teorema del coseno fornisce una relazione matematica che permette di calcolare la lunghezza del lato di un triangolo quando si conosce la lunghezza degli altri due lati e l'angolo compreso fra essi. Per esempio, conoscendo la lunghezza dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e l'angolo compreso α, risulta che $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$.



- Determina le componenti cartesiane dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- Determina le componenti del vettore $\vec{c}$, somma di $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- Dal calcolo del modulo di $\vec{c}$, puoi verificare il teorema del coseno.
- Sai che a = 5,0 cm, b = 5,5 cm e α = 100°; calcola la lunghezza del terzo lato c.

Suggerimento: usa le relazioni cos(π -α) = -cos α e sin α e l'identità trigonometrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

[$a\hat{x}$; $-b\cos\alpha\,\hat{x} + b\sin\alpha\,\hat{y}$$((a - b\cos\alpha), b\sin\alpha)$; 8,0 cm]

TEST

7 Il prodotto vettoriale $\vec{c}$ di due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ è nullo:

A quando i due vettori sono perpendicolari.
B quando i due vettori sono paralleli.
C solamente quando uno dei due vettori è nullo.
D solamente quando entrambi i vettori sono nulli.

8 La componente cartesiana di un vettore lungo una retta r:

A è sempre positiva.
B è sempre negativa.
C può essere positiva, negativa o nulla.
D non può mai essere nulla.

9 Un piccolo carrello è fermo, a causa dell'attrito, su un piano inclinato. Si aumenta l'inclinazione del piano finché il carrello comincia a muoversi; a questo punto si mantiene l'inclinazione raggiunta. Il carrello:

A rallenta.
B accelera.
C scende a velocità costante.
D si ferma immediatamente dopo aver cominciato a muoversi.
E scende a scatti lungo il piano.

Test ammissione Scienze motorie 2012/2013