IDEE PER UNA LEZIONE DIGITALE

PARAGRAFO	CONTENUTO	DURATA (MINUTI)
1. Il problema della gravitazione	ESPERIMENTO VIRTUALE Accelerazioni e forze Gioca, misura, esercitati	
	IN 3 MINUTI • $E = mc^2$	
MAPPA INTERATTIVA	20 TEST INTERATTIVI SU ZTE CON FEEDBACK «Hai sbagliato, perché...»	

VERSO IL CLIL

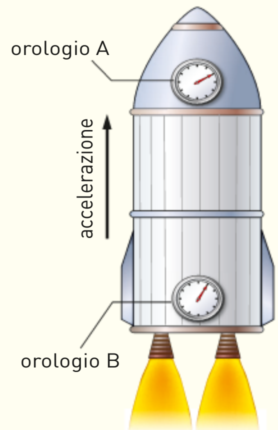
FORMULAE IN ENGLISH		AUDIO
Rest energy	$E_0 = m_0 c^2$	The total internal energy of a body at rest is equal to the product of its rest mass m_0 (also called invariant mass) and the square of the speed of light.
Relativistic mass	$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0$	The relativistic mass of an object with nonzero rest mass moving with respect to a given frame of reference is equal to the product of the Lorentz factor γ and the rest mass m_0.
Total energy	$E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m_0 c^2$	The energy of an object with rest mass m_0 moving with respect to a given frame of reference is equal to the product of the Lorentz factor γ, the rest mass m_0 and the square of the speed of light.

PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

5 LO SPAZIO-TEMPO CURVO E LA LUCE

PROBLEMA MODELLO 2 LA DILATAZIONE GRAVITAZIONALE DEI TEMPI

A bordo di un'astronave del futuro sono collocati due orologi. L'orologio A si trova in testa e l'orologio B in coda, a distanza $d = 330$ m l'uno dall'altro. Rispetto a un sistema di riferimento inerziale l'astronave è accelerata, da ferma, verso l'alto, con accelerazione costante: $a = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ in modo da simulare la gravità terrestre al suo interno. L'astronave parte da ferma, quindi ha velocità non relativistica.
Ogni secondo l'orologio A emette un lampo di luce, che raggiunge B con un certo ritardo.



- **I lampi di luce raggiungono l'orologio B a distanza di 1,0 s oppure no?**
- **Calcola la differenza tra la frequenza con cui i lampi di luce raggiungono l'orologio B e la frequenza con cui sono emessi dall'orologio A.**
- **I risultati che hai ottenuto valgono anche per due orologi A e B sulla Terra, con B sul suolo e A a 330 m di altezza?**

DATI	INCOGNITE
Accelerazione dell'astronave: $a = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$ Distanza tra gli orologi: $L = 330$ m Separazione temporale tra due lampi di luce secondo orologio A: $\Delta t_A = 1{,}0$ s cioè $f_0 = 1{,}0$ Hz	Differenza tra le frequenze: $\Delta f = ?$

L'IDEA

- Esaminiamo il problema dal sistema di riferimento inerziale.
- In ogni istante ciascun orologio è solidale con un sistema di riferimento inerziale (che varia al passare del tempo).
- Per calcolare la frequenza con cui B riceve i lampi di luce, applico l'effetto Doppler relativistico. Prima, però, devo determinare la velocità $v_{B,A}$ dell'orologio B quando riceve il lampo rispetto all'orologio A quando lo emette.

LA SOLUZIONE

Deduco con un ragionamento l'intervallo temporale tra i lampi di luce.

Quando i lampi di luce sono in viaggio, l'orologio B va loro incontro a velocità sempre maggiore, per cui le distanze che i lampi di luce devono coprire per raggiungere B diventano via via più piccole. Pertanto B riceverà i lampi di luce con frequenza *maggiore* di quella con cui sono messi.

Calcolo la velocità dell'orologio B quando riceve il lampo rispetto all'orologio A quando emette il lampo.

Quando l'orologio A emette un lampo di luce, entrambi gli orologi hanno la stessa velocità v. Quando B riceve il segnale, avrà velocità

$$v' = v + \Delta v = v + g\Delta t$$

dove Δt è il tempo impiegato dal lampo di luce per raggiungere B. Pertanto, la velocità dell'orologio B rispetto all'orologio A, nel momento di ricezione del lampo di luce, è

$$v_{B,A} = v' - v = \Delta v = g\Delta t$$

In linea di principio, il valore di Δt di ciascun lampo differisce da quello degli altri.

Uso la formula dell'effetto Doppler relativistico per calcolare la frequenza con cui l'orologio B riceve i lampi di luce emessi da A.

Possiamo dunque usare la formula dell'effetto Doppler relativistico (con sorgente e ricevitore in avvicinamento) per calcolare la frequenza con cui l'orologio B riceve i lampi di luce:

$$f = f_0\sqrt{\frac{1+v_{B,A}/c}{1-v_{B,A}/c}} = f_0\sqrt{\frac{(1+v_{B,A}/c)\times(1+v_{B,A}/c)}{(1-v_{B,A}/c)\times(1+v_{B,A}/c)}} = f_0\frac{(1+v_{B,A}/c)}{\sqrt{1-(v_{B,A}/c)^2}} = f_0\frac{(1+g\Delta t/c)}{\sqrt{1-(g\Delta t/c)^2}}$$

Introduco alcune approssimazioni.

Svolgo i calcoli relativamente al primo lampo di luce emesso da A che raggiunge B, e introduco alcune approssimazioni che mi permettono di semplificare i calcoli.
La quantità adimensionale $g\Delta t/c$ è molto minore di 1: $g\Delta t/c \ll 1$.
Il tempo Δt necessario perché il primo lampo di luce raggiunga l'orologio B è sostanzialmente pari a:

$$\Delta t = \frac{L_0}{c} = \frac{330\ \text{m}}{3{,}0\times10^8\ \text{m/s}} = 1{,}1\times10^{-6}\ \text{s}$$

(nel calcolare Δt abbiamo trascurato la distanza percorsa dal movimento dell'orologio B verso l'orologio A). Quindi risulta:

$$g\frac{\Delta t}{c} = (9{,}8\ \text{m/s}^2)\times\frac{1{,}1\times10^{-6}\ \text{s}}{(3{,}0\times10^8\ \text{m/s})} = 3{,}6\times10^{-14},$$

che è, come abbiamo detto, molto minore di 1.
Nell'espressione della frequenza possiamo quindi usare l'approssimazione

$$\frac{1}{\sqrt{1-(g\Delta t/c)^2}} \simeq 1+\frac{1}{2}(g\Delta t/c)^2$$

Quindi l'espressione della frequenza si semplifica ulteriormente, diventando:

$$f = f_0\frac{(1+g\Delta t/c)}{\sqrt{1-(g\Delta t/c)^2}} \simeq f_0(1+g\Delta t/c)\left(1+\frac{1}{2}(g\Delta t/c)^2\right)$$

Anche questa espressione può essere ulteriormente semplificata, in quanto le potenze $(g\Delta t/c)^2$ e $(g\Delta t/c)^3$ forniscono contributi trascurabili rispetto a $(g\Delta t/c)$. L'espressione della frequenza si riduce quindi a:

$$f \simeq f_0(1+g\Delta t/c) = f_0\left(1+g\frac{L_0}{c^2}\right)$$

La differenza tra le frequenza di ricezione di B e quella di emissione di A è:

$$\Delta f = f - f_0 = f_0 g\frac{L_0}{c^2}$$

Inserendo i valori forniti dal testo e $f_0 = 1{,}0Hz$ (la frequenza con cui vengono emessi i lampi di luce) si ottiene:

$$\Delta f = f - f_0 = (1{,}0\ \text{Hz})\times(9{,}8\ \text{m/s}^2)\times\frac{330\ \text{m}}{(3{,}0\times10^8\ \text{m/s})^2} = 3{,}6\times10^{-14}\ \text{Hz}$$

Si tratta di una differenza certamente piccola, ma rilevabile dai moderni orologi atomici.

Esamino il caso dei due orologi a differenti quote in un campo gravitazionale.

Il principio di equivalenza ci porta a concludere che il risultato precedente vale anche per due orologi posti a quote diverse che si trovano nel campo gravitazionale di un pianeta.

16 ★★★ Un orologio atomico A è posto al livello del suolo, mentre un secondo orologio atomico B è in quota a $h = 670$ m di altezza dal suolo. L'orologio B invia segnali luminosi all'orologio A ogni secondo.

▸ Calcola la differenza tra la frequenza con cui l'orologio A riceve i segnali luminosi e quella con cui sono emessi dall'orologio B.

Suggerimento: usa le formule ricavate nel problema modello.

[$7{,}3 \times 10^{-14}$ Hz]

17 ★★★ Un orologio atomico A è posto al livello del suolo, mentre un secondo orologio atomico B è in quota ad altezza h dal suolo. L'orologio B invia segnali luminosi all'orologio A ogni secondo. La differenza tra la frequenza con cui l'orologio B invia i segnali luminosi e quella con cui vengono ricevuti dall'orologio A è $2{,}5 \times 10^{-14}$ Hz.

▸ Calcola l'altezza h.

Suggerimento: usa le formule ricavate nel problema modello.

[$2{,}3 \times 10^{2}$ m]

TEST

4 Tra le ipotesi seguenti, quali sono fondamentali nella teoria della relatività generale? (*Più di una risposta è giusta*)

A La presenza delle masse produce una curvatura dello spazio-tempo.

B Lo spazio-tempo è curvo e le masse si dispongono in base alla sua curvatura.

C Le particelle soggette a una forza qualunque si muovono nello spazio-tempo seguendo una curva geodetica.

D Le particelle soggette solo alla forza di gravità, si muovono nello spazio-tempo lungo geodetiche.

5 Lo spazio-tempo di Minkowski:

A ha curvatura positiva.

B ha curvatura negativa.

C ha curvatura nulla, al contrario di quello euclideo.

D ha curvatura nulla, come quello euclideo.

6 La luce all'interno di un campo gravitazionale:

A non subisce alcun effetto gravitazionale.

B subisce una forza attrattiva, ma non sufficiente a deviarne il cammino.

C subisce una forza attrattiva, che può provocare una deflessione misurabile.

D subisce una forza repulsiva, che può provocare una deflessione misurabile.

7 Se una radiazione elettromagnetica si allontana da un forte campo gravitazionale, il *redshift* gravitazionale determinerà un aumento:

A della velocità di propagazione.

B della frequenza.

C della lunghezza d'onda.

D di nessuna delle grandezze precedentemente elencate.

8 In uno spazio curvo, le geodetiche sono:

A le curve di minima lunghezza, che rappresentano le traiettorie di particelle libere da forze diverse da quella gravitazionale.

B le curve di minima lunghezza, che rappresentano le traiettorie di particelle soggette a forze diverse da quella gravitazionale.

C le rette che rappresentano le traiettorie di particelle libere da forze diversa da quella gravitazionale.

D le rette che rappresentano le traiettorie di particelle soggette a forze diverse da quella gravitazionale.

9 Nello spazio-tempo curvo della relatività generale la curva di minima lunghezza che unisce due punti su una superficie sferica è sempre:

A una linea retta.

B un'ellisse.

C un'iperbole.

D un arco di circonferenza massima.

10 Le onde gravitazionali sono:

A le onde che si propagano in un fluido soggetto alla forza di gravità.

B le distorsioni dello spazio-tempo determinate dal rapido movimento delle grandi masse.

C le onde d'urto che si propagano in un mezzo materiale per effetto dell'attrazione gravitazionale.

D le diverse curvature dello spazio-tempo determinate dalla presenza di masse diverse.