PROBLEMI MODELLO, DOMANDE E PROBLEMI IN PIÙ

2 L'ESPANSIONE DELL'UNIVERSO

PROBLEMA MODELLO 1 QUANT'È LONTANA LA GALASSIA A SPIRALE M51a?

La figura mostra una delle galassie che ha attirato maggiormente la curiosità degli astronomi per la sua forma a spirale. È nota col nome M51a ed è relativamente vicina alla nostra galassia: si allontana dal Sole alla velocità di (463 ± 3) km/s.

- **Calcola a quanto corrisponde, nelle unità del Sistema Internazionale, il valore numerico fornito nel testo per la costante di Hubble.**
- **Utilizza il valore appena trovato per ricavare la distanza di M51a in km e in milioni di anni-luce.**

DATI

Costante di Hubble: $H_0 = (68 \pm 1)\dfrac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$
Velocità di allontanamento di M51a:
$v = (463 \pm 3)$ km/s

INCOGNITE

Valore numerico nel SI della costante di Hubble: $\boldsymbol{H_0} = ?$
Distanza di M51a: $\boldsymbol{r} = ?$

L'IDEA

- La costante di Hubble $H_0 = (68 \pm 1)\dfrac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}$ è riportata nel testo nelle unità che vengono solitamente utilizzate in astronomia.
  Poiché queste unità di misura non appartengono al Sistema Internazionale, occorre trasformare km e parsec in metri.
- Poi calcolo la distanza della galassia invertendo la formula $v = H_0 r$.

LA SOLUZIONE

Esprimo le lunghezze in metri e calcolo il valore di H_0 nel SI.
Per prima cosa conviene calcolare il valore di 1 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ in unità S.I.:

$$1\,\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = \frac{1\ \text{km}}{1\ \text{s} \times 10^6\ \text{pc}} = \frac{10^3\ \text{m}}{1\ \text{s} \times 10^6 \times 3{,}09 \times 10^{16}\ \text{m}} = 3{,}24 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1}.$$

$$H_0 = (68 \pm 1)\frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = (68 \pm 1) \times (3{,}24 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1}) = (220 \pm 3) \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1}$$

Applico la legge di Hubble per determinare la distanza della galassia.
La costante di Hubble è nota con un errore relativo percentuale di poco più dell'1%, e la velocità di deriva della galassia è nota con un errore relativo percentuale minore dell'1%. Nel calcolo della distanza delle galassie basato sulla legge di Hubble, consideriamo le incertezze di entrambe le grandezze.
Quindi:

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{463\ \text{km/s}}{220 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1}} = 2{,}10 \times 10^{20}\ \text{km}$$

Calcolo l'incertezza associata alla distanza r:

$$\Delta r = r\left(\frac{\Delta H_0}{H_0} + \frac{\Delta v}{v}\right) = \frac{v}{H_0^2}\Delta H_0 + \frac{1}{H_0}\Delta v =$$

$$= \frac{463\ \text{km/s}}{(220 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1})^2} \times (3 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1}) + \frac{1}{(220 \times 10^{-20}\ \text{s}^{-1})} \times (3\ \text{km/s}) = 0{,}04 \times 10^{20}\ \text{km}$$

Quindi la distanza della galassia in kilometri vale:

$$r = (2{,}10 \pm 0{,}04) \times 10^{20}\ \text{km}$$

Invece in milioni di anni-luce (ricordando che 1 a.l.= $9{,}46 \times 10^{12}$ km):

$$r = \frac{(2{,}10 \pm 0{,}04) \times 10^{20}\ \text{km}}{9{,}46 \times 10^{12}\ \text{km/a.l.}} = (22{,}4 \pm 0{,}4) \times 10^{6}\ \text{a.l.}$$

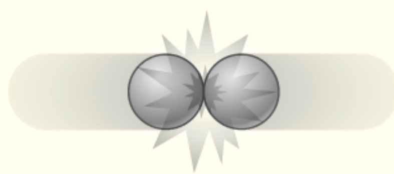
PER NON SBAGLIARE

Il moto di espansione osservato da Hubble è globale e coinvolge tutto l'Universo nel suo insieme. Esistono però deviazioni locali dovute all'attrazione reciproca di galassie fra loro vicine. Per esempio la nostra galassia e quella di Andromeda si stanno avvicinando. Si deve fare attenzione: non è sempre possibile utilizzare la legge di Hubble per stimare la distanza di una galassia.

3 IL MODELLO DEL BIG BANG

PROBLEMA MODELLO 2 UN OROLOGIO A ENERGIA TERMICA

A temperatura ambiente si trova che l'energia tipica scambiata in un urto, dovuto all'agitazione termica, è dell'ordine di 1/40 di eV. Se invece l'urto avviene nel nucleo solare, dove la temperatura raggiunge un valore di $1{,}0 \times 10^7$ K, l'energia scambiata è decisamente superiore.



- **Calcola a quale temperatura corrisponde l'energia di 1/40 eV.**
- **Calcola l'energia scambiata in un urto all'interno del Sole.**
- **Calcola in quali istanti dopo il Big Bang erano presenti queste energie.**

DATI	INCOGNITE
Energia scambiata in un urto: $E_{amb} = 0{,}025$ eV	Temperatura ambiente: $T_{\text{amb}} = ?$
Temperatura all'interno del Sole: $T_{Sole} = 1{,}0 \times 10^7$ K	Energia scambiata in un urto all'interno del sole: $E_{\text{Sole}} = ?$
	Istanti in cui erano presenti questi energie: $t_{\text{amb}} = ?$, $t_{\text{Sole}} = ?$

L'IDEA

- A causa dell'agitazione termica, le particelle si muovono con una certa velocità, regolata dalla temperatura, urtandosi in continuazione. In ogni urto l'energia scambiata è dell'ordine dell'energia cinetica posseduta dalle particelle, che è direttamente proporzionale alla temperatura, cioè: $E \approx k_B T$, dove k_B è la costante di Boltzmann.
- La teoria del Big Bang, supportata dall'osservazione dell'espansione dell'Universo, ci spiega come la temperatura diminuisca man mano che l'Universo si espande. In pratica, è come aver acceso un fuoco e osservarlo mentre si spegne completamente.
- Infine calcolo gli istanti di tempo dopo il Big Bang con la relazione $t = \dfrac{10^{-6}\ \text{s} \cdot \text{GeV}^2}{E_{\text{GeV}}^{\ 2}}$.

LA SOLUZIONE

Calcolo la temperatura ambiente.

Ricorda che 1 eV = $1{,}60 \times 10^{-19}$ J. Di conseguenza, 1/40 di eV corrisponde, in joule, all'energia

$$E = \frac{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}}{40} = 4{,}0 \times 10^{-21}\ \text{J}.$$

Ora ricavo la temperatura corrispondente T da $E \approx k_B T$, cioè:

$$T \approx \frac{E}{k_B} = \frac{4{,}0 \times 10^{-21}\ \text{J}}{1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K}} = 2{,}9 \times 10^{2}\ \text{K}.$$

Questa temperatura conferma una temperatura ambiente di poco meno di 20 °C.

Calcolo l'energia scambiata all'interno del Sole.

$$E_{\text{Sole}} \approx k_B T = \frac{\left(1{,}38 \times 10^{-23}\ \dfrac{\text{J}}{\text{K}}\right) \times \left(1{,}0 \times 10^{7}\ \text{K}\right)}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \dfrac{\text{J}}{\text{eV}}} = 8{,}6 \times 10^{2}\ \text{eV}$$

Calcolo gli istanti di tempo corrispondenti.

$$t_{\text{amb}} = \frac{10^{-6}\text{s} \cdot \text{GeV}^2}{E^2_{\text{amb}-\text{GeV}}} = \frac{10^{-6}\text{s} \cdot \text{GeV}^2}{\left(0{,}025 \times 10^{-9}\ \text{GeV}\right)^2} = 1{,}6 \times 10^{15}\ \text{s} = \frac{1{,}6 \times 10^{15}\ \text{s}}{3{,}15 \times 10^{7}\ \text{s/a}} = 51 \times 10^{6}\ \text{anni}$$

$$t_{\text{Sole}} = \frac{10^{-6}\text{s} \cdot \text{GeV}^2}{E^2_{\text{Sole}-\text{GeV}}} = \frac{10^{-6}\text{s} \cdot \text{GeV}^2}{\left(8{,}6 \times 10^{2} \times 10^{-9}\ \text{GeV}^2\right)^2} = 1{,}4 \times 10^{6}\ \text{s} = \frac{1{,}4 \times 10^{6}\ \text{s}}{8{,}64 \times 10^{4}\ \text{s/g}} = 16\ \text{giorni}$$

9 LA FORZA GRAVITAZIONALE E LA DECIMA UNIFICAZIONE

PROBLEMA MODELLO 3 UN MEDIATORE O L'ALTRO?

In un collisore protone-protone avvengono $6{,}0 \times 10^{20}$ interazioni tra due quark ogni secondo. In un terzo dei casi l'energia scambiata è circa 500 MeV, negli altri casi circa 1 TeV.

- **Fai una stima del numero di gravitoni, fotoni, gluoni emessi dai quark in un secondo.**
- **Se si aspetta un giorno intero si riuscirà a osservare almeno un gravitone?**
- **Immagina ora che l'energia scambiata in ogni collisione sia $2{,}5 \times 10^{18}$ GeV: dopo quanto tempo un quark emetterebbe uno dei mediatori?**

DATI

Interazioni tra due quark al secondo:
$N = 6{,}0 \times 10^{20}$
Energia scambiata in 1/3 degli eventi:
$E_1 = 500$ MeV
Energia scambiata in 2/3 degli eventi: $E_2 = 1$ TeV

INCOGNITE

Numero di gravitoni, fotoni, gluoni in 1 s: $n_G = ?$, $n_\gamma = ?$, $n_g = ?$

L'IDEA

- La probabilità che venga emesso un particolare mediatore è data dalla costante di accoppiamento dell'interazione (elettromagnetica, forte, gravitazionale) calcolata all'energia scambiata nell'evento.
- Per energie di circa 500 MeV sappiamo che $\alpha_{em} \simeq 0{,}0073$, $\alpha_f \simeq 1$, mentre all'energia di 1 TeV vale che $\alpha_{em} \simeq 0{,}01$ e $\alpha_f \simeq 0{,}1$ $\alpha_G \simeq 7{,}0 \times 10^{-33}$. Nel primo caso α_G può essere calcolata con la formula [**9**].
- All'energia di $2{,}5 \times 10^{18}$ GeV tutte le costanti di accoppiamento valgono circa 0,04.

LA SOLUZIONE

Calcolo il numero di fotoni emessi in un secondo.

$$n_\gamma = N_1\alpha_{em1} + N_2\alpha_{em2} = \left(\frac{1}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 0{,}0073\right) + \left(\frac{2}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 0{,}01\right) = 5{,}5 \times 10^{18}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Calcolo il numero di gluoni emessi in un secondo.

$$n_g = N_1\alpha_{f1} + N_2\alpha_{f2} = \left(\frac{1}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 1\right) + \left(\frac{2}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 0{,}1\right) = 2{,}4 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Ricavo il valore dell'accoppiamento gravitazionale α_G all'energia E_1.

$$\alpha_G(E_1) = \frac{GE_1^2}{\hbar c^5} = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)) \times [(500 \times 10^6\ \mathrm{eV}) \times (1{,}6 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV})^2]}{(1{,}05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J}\cdot\mathrm{s}) \times (3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^5} = 1{,}7 \times 10^{-39}$$

Calcolo il numero di gravitoni emessi in un secondo.

$$n_G = N_1\alpha_{G1} + N_2\alpha_{G2} = \left(\frac{1}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 1{,}7 \times 10^{-39}\right) + \left(\frac{2}{3} \times (6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 7{,}0 \times 10^{-33}\right) = 2{,}8 \times 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Questo risultato mostra che non sarà emesso nessun gravitone in un giorno. Infatti il numero di gravitoni in un giorno (pari a 86 400 s) è dato da:

$$n_G \times 86400\ \mathrm{s}^{-1} = 2{,}4 \times 10^{-7} \text{ ed è molto minore di uno.}$$

Calcolo il numero totale di mediatori emessi in un secondo all'energia $2{,}5 \times 10^{18}$ GeV.

Osservo che le probabilità di emissione sono uguali, quindi:

$$n_{TOT} = [(6{,}0 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-1}) \times 0{,}04] \times 3 = 7{,}2 \times 10^{19}\ \mathrm{s}^{-1}$$

Quindi l'intervallo di tempo necessario affinché sia emesso un mediatore è:

$$t = \frac{1}{7{,}2 \times 10^{19}}\ \mathrm{s} = 1{,}4 \times 10^{-20}\ \mathrm{s}$$

10 LE GRANDEZZE DI PLANCK

PROBLEMA MODELLO 4 LA FORZA DI PLANCK

Le grandezze di Planck sono utili per descrivere la fisica a distanze e tempi molto piccoli ed energie molto elevate. Con esse si possono costruire anche altre grandezze derivate.

- ▸ **Ricava l'espressione della forza di Planck F_{Planck} e calcola il suo valore numerico espresso in newton.**
- ▸ **Quanto vale il modulo della forza di attrazione gravitazionale tra due quark-*u* ($m_u = 2{,}4\ \mathrm{MeV}/c^2$) distanti tra loro 1 fm in unità di F_{Planck}?**

DATI	INCOGNITE
Massa del quark-*u*: $m_u = 2{,}4\ \mathrm{MeV/c^2}$	Modulo della forza di Planck: $F_{\text{Planck}} = ?$
Distanza tra i due quark: $d = 1\mathrm{fm}$	Forza di attrazione tra due quark-*u*: F_G (in unità di F_{Planck}) = ?

L'IDEA

- Le dimensioni fisiche della forza sono $[mlt^{-2}]$ quindi posso combinare la massa, la lunghezza e il tempo di Planck in questo modo per ottenere l'espressione di F_{Planck}.
- Il valore numerico si calcola usando i valori delle costanti fondamentali. In seguito, lo utilizzo per esprimere la forza F_G tra due quark-u.

LA SOLUZIONE

Ricavo l'espressione della forza di Planck.

$$F_{\text{Planck}} = \frac{M_{\text{Planck}}\, l_{\text{Planck}}}{t_{\text{Planck}}^{\,2}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\hbar c}{G}} \times \sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^3}}}{\dfrac{\hbar G}{c^5}} = \frac{c^4}{G}$$

Calcolo il valore numerico di F_{Planck} in newton.

$$F_{\text{Planck}} = \frac{(3{,}0 \times 10^8\ \text{m/s})^4}{6{,}7 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)} = 1{,}2 \times 10^{44}\ \text{N}$$

Calcolo la forza di attrazione gravitazionale tra due quark-*u*.

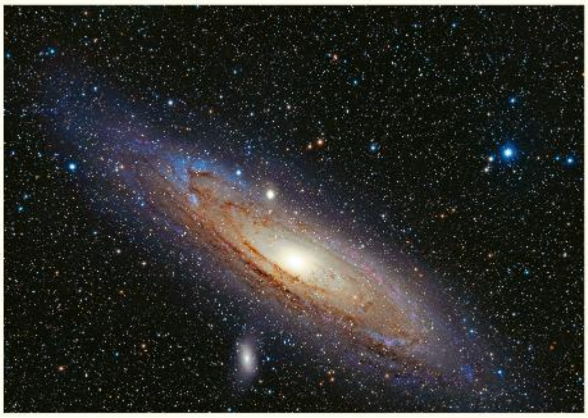
$$F_G = \frac{G m_u^{\,2}}{d^2} = \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)) \times (2{,}4 \times 1{,}8 \times 10^{-30}\ \text{kg})^2}{(1{,}0 \times 10^{-15}\ \text{m})^2} = 1{,}2 \times 10^{-39}\ \text{N}$$

Esprimo F_G in unità di F_{Planck}.

$$F_G = \frac{1{,}2 \times 10^{-39}}{1{,}2 \times 10^{44}} F_{\text{Planck}} \simeq 10^{-83} F_{\text{Planck}}$$

PROBLEMI GENERALI

7 ★★★ La foto mostra un'immagine della Grande Nebulosa di Andromeda, una galassia molto grande che dista $2{,}54 \times 10^6$ a.l. dal Sistema Solare. Osservando le emissioni elettromagnetiche provenienti da Andromeda, si nota che le frequenze rilevate sono maggiori di quelle emesse, cioè $f' = 1{,}0010 \times f$.



- Determina se si tratta di *redshift* o *blueshift* (puoi considerare la situazione non relativistica.)
- Fra quanti anni la Via Lattea e Andromeda si uniranno in una sola galassia?

[$2{,}5 \times 10^9$ a]

8 ★★★ In un esperimento realizzato con un acceleratore del futuro in cui circolano dei fasci di protoni che collidono ogni 10 ns, le energie scambiate tra coppie di quark sono tali che la costante di accoppiamento gravitazionale vale $\alpha_G = 1{,}8 \times 10^{-3}$ ed è sufficiente attendere un tempo di 5 μs perché venga emesso un gravitone da un quark.

- Quante interazioni tra due quark avvengono in totale ogni secondo?
- Quanto vale il raggio di azione della forza gravitazionale a queste energie?

[$1 \times 10^8\ \text{s}^{-1}$; 4×10^{-19} fm]

TEST

1 Un osservatore riceve una luce di frequenza f' emessa da una sorgente S che si allontana da lui. Qual è la frequenza f della luce emessa dalla sorgente? (β è il rapporto tra la velocità v dell'osservatore e la velocità c della luce nel vuoto.)

A $f = f'\sqrt{\dfrac{1+\beta}{(1-\beta)^2}}$

B $f = f'\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

C $f = f'\sqrt{\dfrac{1-\beta}{(1+\beta)^2}}$

D $f = f'\sqrt{\dfrac{1-\beta}{1+\beta}}$

2 L'espressione della legge di Hubble è:

A $v = H_0 r$.

B $r = H_0 v$.

C $H_0 = rv$.

D $v = H_0 = \sqrt{rv}$.

3 Se il parametro $\Omega=\rho/\rho_c$ è maggiore di uno, allora:

A l'Universo è aperto e ha curvatura negativa.

B l'Universo è aperto e ha curvatura positiva.

C l'Universo è chiuso e ha curvatura negativa.

D l'Universo è chiuso e ha curvatura positiva.

4 La costante di gravitazione G, espressa in funzione della densità critica ρ_c, è:

A $G = \dfrac{3H_0}{8\pi\rho_c^2}$.

B $G = \dfrac{3H_0^2}{8\pi\rho_c}$.

C $G = \dfrac{3H_0}{8\pi\rho_c}$.

D $G = \dfrac{3H_0^2}{8\pi\rho_c^2}$.

5 Non è possibile ricevere un segnale luminoso proveniente da un'epoca precedente a 380 000 anni dopo il Big Bang perché:

A i fotoni prodotti a quell'epoca sono assorbiti dalla materia oscura.

B la probabilità che un fotone, prodotto in quelle epoche, non sia scomparso per interazione con la materia è nulla.

C la frequenza della radiazione è troppo piccola per essere misurata.

D non è ancora trascorso un tempo sufficiente perché il segnale giunga fino a noi.

6 I neutralini sono:

A particelle con la stessa massa dei neutroni ma raggio minore.

B particelle con la stessa massa dei neutrini ma raggio minore.

C antiparticelle.

D particelle supersimmetriche neutre invisibili che potrebbero costituire la materia oscura.