



## Acqua ed energia

...di quanto si deve aumentare il diametro di una condotta per dimezzare il tempo di svuotamento di un certo volume d'acqua?

Prima di tutto, è meglio ricordare come funziona una centrale idroelettrica: un corso d'acqua viene sbarrato a una certa altitudine attraverso una diga che forma un lago artificiale. Da questo bacino principale l'acqua viene convogliata in vasche di raccolta da cui partono grosse tubature, chiamate «condotte forzate». Se le valvole sono aperte, l'acqua scende verso valle ad alta velocità e arriva nell'impianto dove mette in moto le pale di una turbina.



A questa è collegata un'altra macchina, chiamata alternatore, che trasforma in energia elettrica l'energia di movimento delle pale. Maggiore è la quantità d'acqua che arriva, maggiore è la velocità con cui gira la ruota della turbina. Quindi, più acqua scorre nelle condutture, maggiore è l'energia prodotta nell'impianto.

Supponiamo che la vasca di raccolta di una centrale idroelettrica contenga un volume  $V$  di acqua e

indichiamo con  $t$  il tempo di svuotamento della vasca.

Le condotte forzate sono dotate di dispositivi che consentono di regolare la portata di acqua: per semplicità, possiamo immaginare che le imboccature delle tubature si restringano o si allarghino a seconda della potenza richiesta (per esempio, durante la notte essa è inferiore rispetto alle ore diurne).

Studiamo il caso di una sola tubatura di sezione circolare. Sia  $p$  la sua portata, ovvero il

Vogliamo ora capire quale sia la relazione tra il tempo di svuotamento  $t$  e il diametro  $d$  del foro. Esprimiamo la superficie  $S$  in funzione di  $d$ :

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}.$$

Pertanto:

$$t = k \cdot \frac{V}{\frac{\pi d^2}{4}} = k \cdot \frac{4V}{\pi d^2}.$$

Abbiamo così trovato che il tempo di svuotamento della vasca è inversamente proporzionale al quadrato del diametro del foro. La domanda iniziale era però: di quanto bisogna aumentare il diametro  $d$  del foro per dimezzare il tempo di svuotamento  $t$ ? Per semplicità supponiamo che sia  $V = 1$  e consideriamo che la durata dello svuotamento si dimezzi passando da  $t = 2$  a  $t' = 1$ . Applichiamo la formula sopra per i due tempi:

$$2 = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{d^2},$$

$$1 = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{1}{d'^2}.$$

Dividendo membro a membro otteniamo:

$$\frac{2}{1} = \frac{\cancel{4k} \cdot \frac{1}{d^2}}{\cancel{4k} \cdot \frac{1}{d'^2}}, \text{ da cui}$$

$$2 = \frac{d'^2}{d^2}.$$

Moltiplicando ambo i membri per  $d^2$  otteniamo

$$d'^2 = 2d^2,$$

ed estraendo la radice:

$$d' = \sqrt{2}d.$$

volume d'acqua che attraversa la sezione nell'unità di tempo. Essa è direttamente proporzionale alla superficie circolare  $S$  del foro di scolo della tubatura.

Il tempo di svuotamento  $t$  risulta quindi essere direttamente proporzionale al volume  $V$  di acqua nel serbatoio e inversamente proporzionale a  $S$ ; possiamo scrivere la funzione:

$$t = k \cdot \frac{V}{S},$$

con  $k$  costante di proporzionalità.