In viaggio

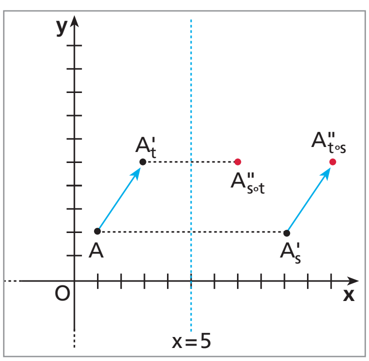
…l'esito di una sequenza di trasformazioni geometriche dipende dall'ordine in cui vengono eseguite?

Ogni trasformazione geometrica è una corrispondenza biunivoca che associa a ogni punto del piano uno e un solo punto del piano stesso. Si tratta pertanto di una funzione. Se si compie un'operazione di composizione tra due funzioni f e g, è noto che tale operazione non gode in generale della proprietà commutativa, ovvero la funzione composta $f \circ g$ è diversa dalla funzione $g \circ f$.
Ciò vale anche per le trasformazioni geometriche: l'ordine con cui viene eseguita la composizione di una serie di trasformazioni è determinante sull'esito della trasformazione composta finale.
Esistono molti esempi che dimostrano il mancato rispetto della commutatività dell'operazione di composizione. Consideriamo per esempio la traslazione t di vettore $\vec{v}(2; 3)$ e la simmetria assiale s di asse $x = 5$. Le equazioni delle trasformazioni sono rispettivamente:

$$t: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \quad s: \begin{cases} x' = 10 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Prendiamo un punto qualsiasi, per esempio $A(1; 2)$, e operiamo le due trasformazioni nei due possibili ordini:

$$A(1; 2) \xmapsto{t} A'_t(3; 5) \xmapsto{s} A''_{s \circ t}(7; 5),$$
$$A(1; 2) \xmapsto{s} A'_s(9; 2) \xmapsto{t} A''_{t \circ s}(11; 5).$$



I punti finali $A''_{s \circ t}$ e $A''_{t \circ s}$ sono diversi.

In generale, si può ricavare la non commutatività di t e s calcolando le trasformazioni composte:

$$s \circ t: \begin{cases} x' = 10 - (x + 2) \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 8 - x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

$$t \circ s: \begin{cases} x' = (10 - x) + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = 12 - x \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Le trasformazioni ottenute sono diverse.
L'ordine con cui si esegue una sequenza di trasformazioni risulta quindi *in generale* essenziale riguardo all'esito finale. Tuttavia esistono casi specifici in cui questo non si verifica. Per esempio, se ci limitassimo a operare la composizione nell'insieme delle sole traslazioni, potremmo facilmente constatare che in tal caso la commutatività è rispettata, cioè l'ordine di esecuzione di una serie di traslazioni non influenza l'esito finale.
Si considerino le seguenti traslazioni:

$$t_1: \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases} \quad t_2: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y - 2 \end{cases} \quad t_3: \begin{cases} x' = x + 4 \\ y' = y \end{cases}$$

Ricaviamo le trasformazioni composte $t_3 \circ t_2 \circ t_1$ e $t_2 \circ t_1 \circ t_3$:

$$t_3 \circ t_2 \circ t_1: \begin{cases} x' = ((x + 2) + 4) + 4 \\ y' = (y + 3) - 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = x + 10 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

$$t_2 \circ t_1 \circ t_3: \begin{cases} x' = ((x + 4) + 2) + 4 \\ y' = (y + 3) - 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = x + 10 \\ y' = y + 1 \end{cases}$$

Le due trasformazioni sono uguali.

In figura è rappresentata l'applicazione sequenziale delle tre trasformazioni al punto $A(1; 2)$.