Il dilemma di Monty Hall

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

Il quesito è noto come *dilemma* o *paradosso di Monty Hall*, dal nome del conduttore del celebre gioco a premi televisivo americano *Let's Make a Deal*.
Quando nel 1990 un lettore della rivista *Parade* scrisse alla rubrica *Ask Marilyn* chiedendo quale fosse la strategia vincente, il problema si trasformò in un'accesa controversia. La soluzione proposta da Marilyn Vos Savant, presente nel Guinness dei Primati per il suo altissimo quoziente d'intelligenza, scatenò una valanga di lettere di contestazione, molte delle quali provenivano da matematici e accademici che accusavano Vos Savant di ignorare la teoria della probabilità. Il giornale diventò l'arena di un furente botta e risposta: da una parte Vos Savant, secondo la quale al giocatore conviene sempre cambiare porta; dall'altra chi sosteneva che è indifferente scegliere l'una o l'altra delle due porte rimanenti. Il caso finì persino in prima pagina sul *New York Times*, acquisendo in breve tempo un'enorme popolarità. Chi aveva ragione?

Esaminiamo il problema: secondo la definizione classica della probabilità di un evento, data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, quando il concorrente sceglie una delle tre porte chiuse ha una probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di vincere il premio.
Dopo che il presentatore ha aperto una porta, mostrando una capra, si potrebbe pensare che la probabilità di aver indovinato la porta esatta salga da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$. Dopo tutto, restano due porte chiuse e una delle due nasconde l'auto. Pertanto, la probabilità che questa sia dietro l'una o dietro l'altra è identica e pari a $\frac{1}{2}$. A questo punto il giocatore può scegliere a piacimento, perché è indifferente cambiare o non cambiare. Risposta sbagliata!
Infatti, il concorrente ha ancora una probabilità su tre di aver indovinato la porta esatta. La probabilità che l'automobile sia dietro una delle due porte non scelte è $\frac{2}{3}$ e, quando il presentatore rivela quale di queste due non nasconde il premio, la probabilità che l'automobile sia dietro l'altra porta è ancora $\frac{2}{3}$. Di conseguenza, se il giocatore mantiene la scelta iniziale, ha una probabilità di vincere pari a $\frac{1}{3}$, se cambia, pari a $\frac{2}{3}$.

Si può arrivare alla stessa conclusione seguendo un'altra argomentazione, che convincerà i più scettici. Partiamo dal presupposto (fondamentale!) che il conduttore conosce qual è la porta che nasconde l'automobile e apre sempre una porta con dietro una capra. Ora, supponiamo che la prima porta scelta dal giocatore sia sbagliata e nasconda una capra. Il conduttore non ha scelta e aprirà l'altra porta con la capra. In questo caso, se il giocatore cambia porta, vince. Se invece la prima porta scelta dal giocatore è esatta e il giocatore cambia, ovviamente perde.
Possiamo concludere che, se il giocatore cambia porta, *vince se e solo se la sua prima scelta era sbagliata*, evento che ha probabilità pari a $\frac{2}{3}$.
Se la strategia del giocatore è di non cambiare mai, *vince se e solo se la sua prima scelta è corretta*, evento con probabilità $\frac{1}{3}$.

Anche se apparentemente contro-intuitiva, la risposta di Vos Savant era esatta. Perché allora moltissime persone rimasero persuase del contrario? Alla base della controversia c'è probabilmente un punto chiave del problema: il conduttore sa qual è la porta vincente. Se il conduttore non sapesse dove si nasconde l'automobile (e quindi potesse anche aprire la porta fortunata), allora al giocatore resterebbero due porte con identica probabilità: cambiando o non cambiando, il concorrente avrebbe la stessa probabilità di vincere o perdere.
Questo paradosso è una variante del *paradosso delle tre carte* del matematico americano Warren Weaver (1950), il quale, a sua volta, deriva dal *paradosso delle tre scatole*, formulato per la prima volta nel 1889 dal matematico francese Joseph Bertrand.