Quale forma per le mura?

…che cosa accomuna le pesanti fortificazioni di una città medievale, una mela e una leggerissima bolla di sapone?

Per quanto robuste e alte fossero, le fortificazioni delle città medievali rimanevano la parte più esposta agli attacchi dei nemici. Se si considera inoltre che trasportare i pesanti massi con cui venivano issate le mura di cinta costava non poca fatica ai costruttori, si comprende che avere un giro di mura che fosse il meno lungo possibile diventava non solo un'esigenza per la sicurezza della città e dei suoi cittadini, ma anche un modo per risparmiarsi un lavoro gravoso.
Non è tuttavia sulle dimensioni della città che i costruttori potevano decidere: queste dipendevano dal numero di famiglie e di abitanti da proteggere. L'unica possibilità diventava quindi quella di trovare come disporre le case all'interno della città in modo da avere il più piccolo perimetro possibile.
Dato che il numero di case definisce una superficie fissata, il problema si può formulare così: tra tutte le figure geometriche con la stessa superficie, qual è quella con il perimetro minimo?
La figura che risolve questo problema è la forma da dare alla città per renderla più sicura.
Proviamo ora a calcolare il perimetro di alcune figure regolari equivalenti (per comodità fissiamo l'area comune uguale a 1).

1. Nel caso del triangolo equilatero, indicato con l il lato e sapendo che l'altezza è pari a $h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, l'area risulta:

$$A_{equilatero} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2.$$

Ricaviamo l e sostituiamo $A_{equilatero} = 1$:

$$l = \frac{2\sqrt{A_{equilatero}}}{\sqrt[4]{3}} \rightarrow l = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}.$$

Il perimetro vale quindi:

$$2p_{equilatero} = 2\sqrt[4]{27} \simeq 4{,}56.$$

2. Nel caso del quadrato di area 1, quest'ultimo ha il lato pari a 1 e quindi il perimetro vale: $2p_{quadrato} = 4$.

3. Per l'esagono regolare di area 1, poiché esso è composto da sei triangoli equilateri di area $\frac{1}{6}$, il lato, alla luce del primo caso, risulta:

$$l_{esagono} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{6}}}{\sqrt[4]{3}} = = 2 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{36 \cdot 3}} = 2\frac{1}{\sqrt[4]{108}} = = 2\frac{1}{\sqrt[4]{4 \cdot 27}} = \frac{1}{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3}.$$

Il perimetro è quindi:

$$2p_{esagono} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{3} \simeq 3{,}72.$$

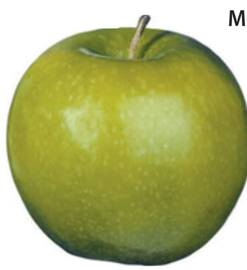
Già da questi tre esempi si può notare che, man mano che il numero dei lati di un poligono regolare aumenta, esso assomiglia sempre più a una circonferenza e, parallelamente, diminuisce la misura del suo perimetro (a parità di area).
Si può quindi concludere che la soluzione del problema dei costruttori è la circonferenza.
Calcoliamo infatti il perimetro del cerchio equivalente ai tre poligoni precedenti. Essendo $A_{cerchio} = \pi r^2 = 1$, il raggio risulta $r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ e il perimetro vale:

$$2p_{circonferenza} = = 2\pi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} = 2\sqrt{\pi} \simeq 3{,}54.$$

Tale valore è inferiore alle misure dei perimetri calcolati in precedenza.
Ecco allora perché la pianta di molte città fortificate è di forma circolare.

BOLLE DI SAPONE E FRUTTA

Le bolle di sapone si ritrovano a dover risolvere la versione tridimensionale del problema dei costruttori: a parità di volume (e cioè di aria soffiata all'interno della bolla), qual è il solido che ha una superficie minore? La soluzione al problema è esattamente la forma che la bolla assume: una sfera.



Molta frutta ha una forma somigliante a una sfera: essendo la buccia la parte più vulnerabile dagli insetti e dagli agenti atmosferici, è vantaggioso che la sua superficie sia ridotta al minimo e che il frutto abbia forma rotondeggiante.