LE FUNZIONI GONIOMETRICHE E LA RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI

1. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

● Per comodità, riportiamo le quattro pagine di teoria che trovi anche in *Matematica blu*, volume 1.

La misura degli angoli

La misura in gradi

Nel *sistema sessagesimale*, l'unità di misura degli angoli è il **grado sessagesimale**, definito come la 360ª parte dell'angolo giro.

Il grado sessagesimale viene indicato con un piccolo cerchio in alto a destra della misura:

$$1° = \frac{1}{360} \text{ dell'angolo giro.}$$

Il grado viene suddiviso a sua volta in 60 *primi*, indicati con un apice:

$$1° = 60'.$$

Ogni primo viene suddiviso in 60 *secondi*, indicati con due apici:

$$1' = 60''.$$

● Un angolo di 32 gradi, 10 primi e 47 secondi viene scritto così:

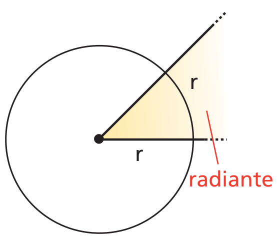
$32°\ 10'\ 47''$.

La misura in radianti

DEFINIZIONE

Radiante

Data una circonferenza, si chiama radiante l'angolo al centro che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio.



L'unità di misura viene indicata con rad, ma generalmente, se si esprime un angolo in radianti, si è soliti trascurare l'indicazione dell'unità di misura.
Per calcolare la misura in radianti di un angolo, si divide la misura dell'arco sotteso dall'angolo per quella del raggio.

Poiché sottende l'intera circonferenza, l'angolo giro misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

L'angolo piatto, che corrisponde a metà circonferenza, misura π, l'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$ ecc.

Riportiamo in una tabella le misure in radianti e in gradi di alcuni angoli.

◀ Tabella 1

MISURE DEGLI ANGOLI									
Gradi	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
Radianti	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π

● Vale la proporzione:

$\alpha° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$.

Per esempio, 30° equivale a $\frac{\pi}{6}$ radianti, perché:

$30° : \alpha_{rad} = 360° : 2\pi$

$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{6}$.

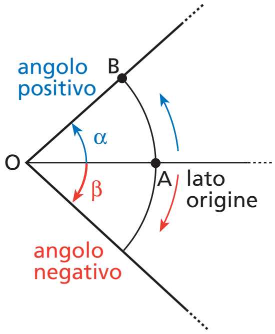
Un radiante corrisponde a circa 57°.

Gli angoli orientati

La definizione di angolo come parte del piano non è adatta per descrivere tutte le situazioni. Per esempio, nell'avvitare o svitare una vite si descrive un angolo che può essere maggiore di un angolo giro.

È utile quindi collegare il concetto di angolo a quello di *rotazione*, cioè al movimento che porta uno dei lati dell'angolo a sovrapporsi all'altro.

Consideriamo la semiretta OA che ruota in senso antiorario intorno al vertice O, fino a sovrapporsi alla semiretta OB, generando l'angolo $\alpha = A\widehat{O}B$. La semiretta OA si chiama **lato origine** dell'angolo α, la semiretta OB si chiama **lato termine**.



DEFINIZIONE

Angolo orientato

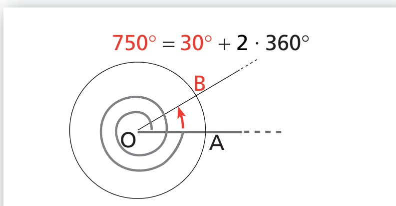
Un angolo si dice orientato quando sono stati scelti uno dei due lati come lato origine e un senso di rotazione.

Un angolo orientato è **positivo** quando è descritto mediante una rotazione in senso antiorario; è **negativo** quando la rotazione è in senso orario.
Un angolo orientato può anche essere maggiore di un angolo giro.

Per indicare in forma sintetica un angolo α minore di un angolo giro e tutti gli infiniti angoli orientati che da α differiscono di un angolo giro, si scrive:
- $\alpha + k \cdot 360°$, con $k \in \mathbb{Z}$, se α è in gradi;
- $\alpha + k \cdot 2\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, se α è in radianti.

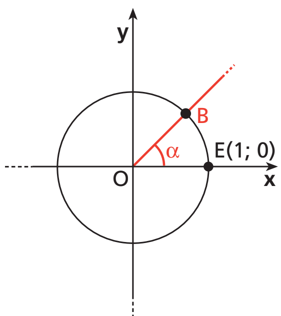
ESEMPIO

Poiché $750° = 30° + 2 \cdot 360°$, l'angolo di 750° si ottiene con la rotazione della semiretta OA di due giri completi e di 30°.



◀ **Figura 1** L'angolo di 750° si ottiene con una rotazione della semiretta OA di 30° e 2 angoli giro.

La circonferenza goniometrica



La circonferenza goniometrica

Nel piano cartesiano, per **circonferenza goniometrica** intendiamo la circonferenza di centro l'origine O degli assi e raggio di lunghezza 1.

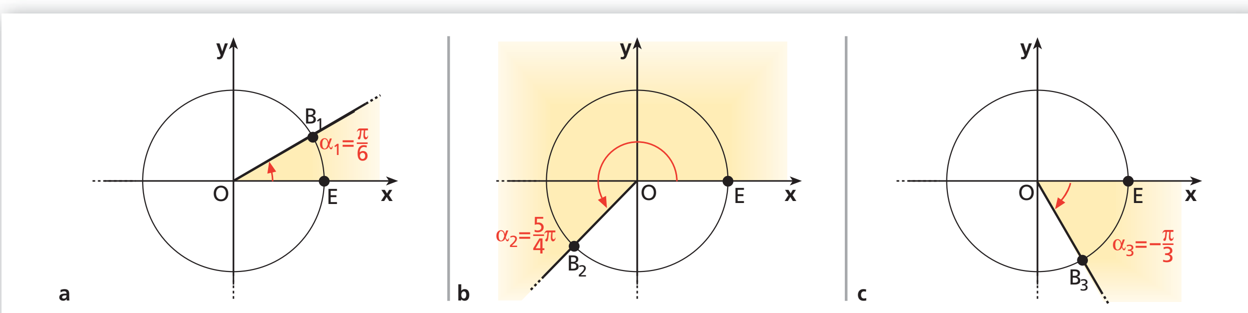
Il punto $E(1; 0)$ si dice **origine degli archi**.
Utilizzando la circonferenza goniometrica, si possono rappresentare gli angoli orientati, prendendo come lato origine l'asse x. In questo modo, a ogni angolo corrisponde un punto di intersezione B fra la circonferenza e il lato termine.

ESEMPIO

Rappresentiamo gli angoli $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \dfrac{5}{4}\pi$, $\alpha_3 = -\dfrac{\pi}{3}$.

Essi individuano sulla circonferenza i punti B_1, B_2 e B_3 della figura 2.

▼ **Figura 2**



Le funzioni seno, coseno e tangente

Introduciamo alcune **funzioni goniometriche** che alla misura della ampiezza di ciascun angolo associano un numero reale.

DEFINIZIONE

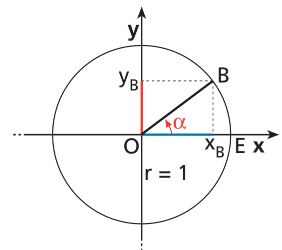
Seno, coseno e tangente

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo orientato α, e sia B il punto della circonferenza associato ad α.

Definiamo coseno e seno di α, e indichiamo con $\cos\alpha$ e $\operatorname{sen}\alpha$, le funzioni che ad α associano, rispettivamente, il valore dell'ascissa e quello dell'ordinata di B.

Definiamo tangente di α, e indichiamo con $\operatorname{tg}\alpha$, la funzione che ad α associa il rapporto, quando esiste, fra l'ordinata e l'ascissa di B.

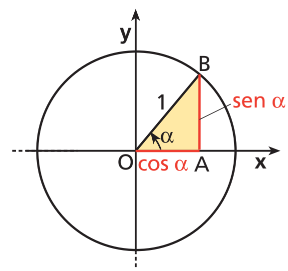
$$\mathbf{sen}\,\alpha = y_B, \qquad \mathbf{cos}\,\alpha = x_B, \qquad \mathbf{tg}\,\alpha = \frac{y_B}{x_B}.$$



$\cos\alpha = x_B$
$\operatorname{sen}\alpha = y_B$
$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B}{x_B}$

Seno e coseno di un angolo α sono funzioni che hanno come dominio $\mathbb{R}$, perché per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste uno e un solo punto sulla circonferenza.

Notiamo inoltre che nel triangolo rettangolo OAB l'ipotenusa misura 1 e i cateti $\operatorname{sen}\alpha$ e $\cos\alpha$, quindi per il teorema di Pitagora:



$$\mathbf{sen}^2\alpha + \mathbf{cos}^2\alpha = 1 \text{ (prima relazione fondamentale).}$$

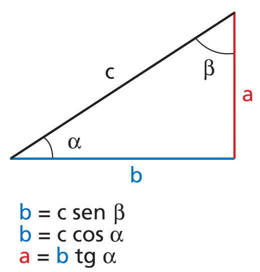
Il rapporto $\frac{y_B}{x_B}$ non esiste quando $x_B = 0$, ossia il dominio della funzione tangente è $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Dalle definizioni date si ricava che:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} \text{ (seconda relazione fondamentale).}$$

FUNZIONI GONIOMETRICHE E CALCOLATRICE

Per determinare il valore di una funzione goniometrica di un angolo possiamo impiegare la calcolatrice. I tasti da utilizzare sono <sin> per la funzione seno, <cos> per il coseno e <tan> per la tangente. Per esempio sin(30) = 0,5. Se la misura dell'angolo è in gradi, sul display deve comparire la scritta DEG (dall'inglese *degree*). È possibile scegliere anche l'opzione RAD per la misura in radianti.
Se invece è l'angolo a essere incognito, possiamo utilizzare i tasti <$\sin^{-1}$>, <$\cos^{-1}$> e <$\tan^{-1}$>, indicati talvolta anche con <asin>, <acos> e <atan>. Per esempio $\sin^{-1}(0,5) = 30$.



Funzioni goniometriche e triangoli rettangoli

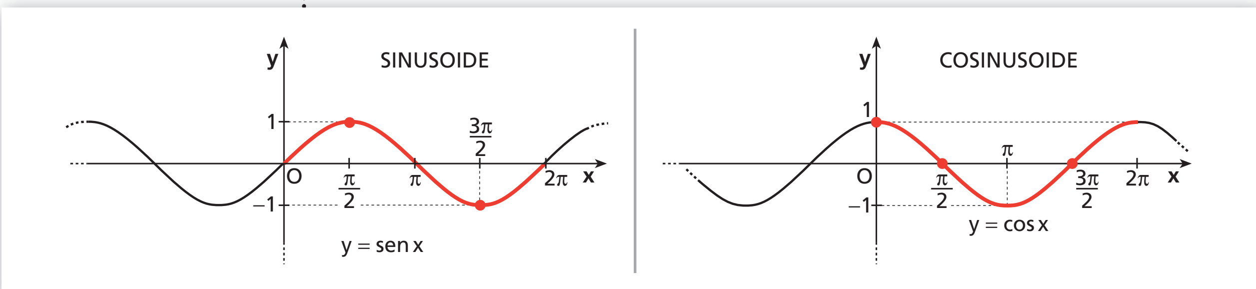
Si può dimostrare che in un triangolo rettangolo la misura di un cateto si calcola come:

- la misura dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto;
- la misura dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.

Inoltre, la misura del cateto opposto a un angolo è uguale a quella del cateto adiacente per la tangente dell'angolo.

Il grafico delle funzioni goniometriche

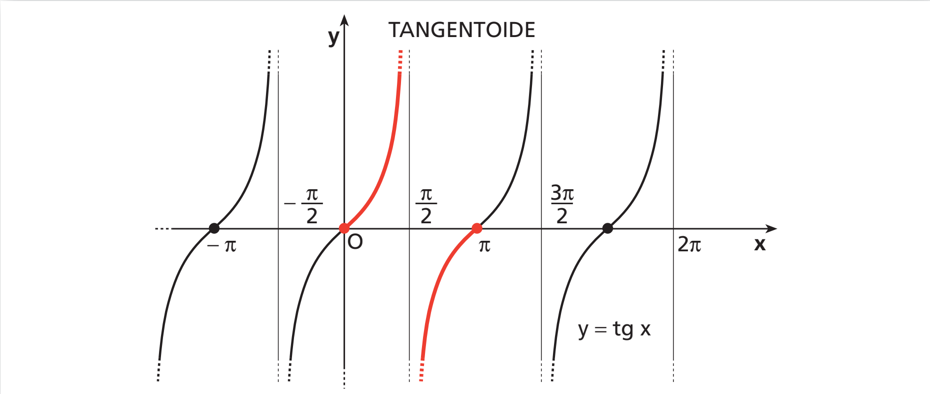
Osserviamo i grafici delle funzioni seno e coseno.



▲ **Figura 3** Grafici delle funzioni seno e coseno. I grafici vengono detti sinusoide e cosinusoide.

I valori del seno e del coseno sono compresi fra -1 e 1. I grafici si ripetono con le stesse caratteristiche a intervalli di ampiezza 2π. Si dice allora che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π.

La tangente è invece una funzione periodica di periodo π. Osserviamo il suo grafico.



► **Figura 4** Il grafico della tangente, che viene detto tangentoide.

Notiamo come, man mano che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$:

- con valori minori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione tende a diventare sempre più grande; diremo che tende a $+\infty$;
- con valori maggiori di $\frac{\pi}{2}$, il valore della funzione è negativo e tende a diventare sempre più grande in valore assoluto; diremo che tende a $-\infty$.

Lo stesso comportamento si ha vicino agli altri valori di x che non fanno parte del dominio della funzione.

La secante, la cosecante, la cotangente

DEFINIZIONE

Secante e cosecante

Dato un angolo α, si chiama:

- secante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\cos\alpha$, purché $\cos\alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\sec\alpha$:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;$$

- cosecante di α la funzione che associa ad α il reciproco del valore di $\operatorname{sen}\alpha$, purché $\operatorname{sen}\alpha$ sia diverso da 0. Si indica con $\operatorname{cosec}\alpha$:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}, \quad \text{con } \alpha \neq 0 + k\pi.$$

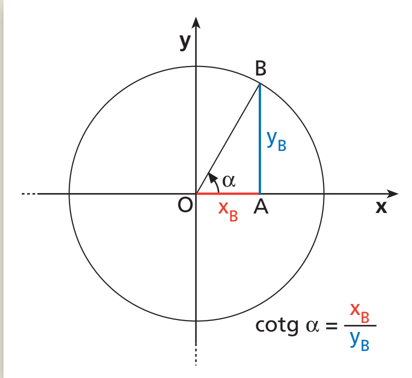
● Secante e cosecante, come seno e coseno, sono funzioni periodiche di periodo 2π.

DEFINIZIONE

Cotangente

Consideriamo un angolo orientato α e chiamiamo B l'intersezione fra il lato termine e la circonferenza goniometrica. Definiamo cotangente di α la funzione che associa ad α il rapporto, quando esiste, fra l'ascissa e l'ordinata del punto B:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x_B}{y_B}.$$



La cotangente di un angolo **non** esiste quando il punto B si trova sull'asse x, ossia quando l'angolo misura 0, π e tutti i multipli interi di π.
$\operatorname{cotg}\alpha$ esiste solo quando $\alpha \neq k \cdot \pi$.

Poiché $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B}{x_B}$ e $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{x_B}{y_B}$, risulta $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{cotg}\alpha = 1$, da cui:

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}, \text{ con } \alpha \neq k\frac{\pi}{2}.$$

● In analogia con la tangente, la funzione cotangente risulta periodica di periodo π: $\operatorname{cotg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{cotg}\alpha$, con $k \in \mathbb{Z}$.

La condizione posta deriva dal fatto che consideriamo $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, quindi occorre scartare gli angoli in cui non esiste $\operatorname{tg}\alpha$, cioè $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, e quelli in cui $\operatorname{tg}\alpha = 0$, cioè $\alpha = 0 + k\pi$, perciò: $\alpha \neq k\frac{\pi}{2}$.

Dalla definizione di cotangente deriva anche che:

$$\boxed{\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}}, \text{ con } \alpha \neq k\pi.$$

Le funzioni goniometriche di angoli particolari

Mediante le proprietà delle figure geometriche, riusciamo a calcolare il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli particolari.

- $\frac{\pi}{6}$ radianti è uguale a 30°;
  $\frac{\pi}{3}$ radianti è uguale a 60°.

L'angolo $\frac{\pi}{6}$

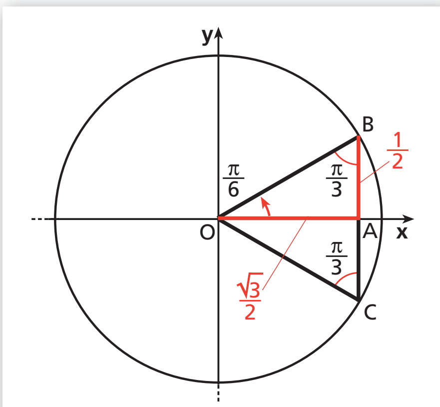
Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché in un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{3}$.

Prolungando il lato BA, otteniamo sulla circonferenza il punto C.

Il triangolo OBC è equilatero, poiché ha gli angoli di $\frac{\pi}{3}$, quindi $\overline{BC} = 1$.

AB è la metà di BC, ossia $\overline{AB} = \frac{1}{2}$.



◄ Figura 5

Ricaviamo $\overline{OA}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{AB}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Noto $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, per determinare $\cos\frac{\pi}{6}$ potremmo anche utilizzare direttamente la prima relazione fondamentale:
  $\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{6} = 1.$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{6}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

- Possiamo ricavare anche secante e cosecante:

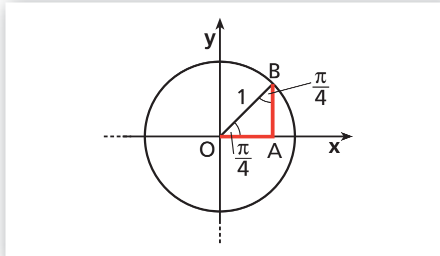
$$\sec\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}} = 2.$$

L'angolo $\frac{\pi}{4}$

Consideriamo la circonferenza goniometrica e il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{4}$ e $\overline{OB} = 1$.

Poiché l'angolo in B è complementare di α, risulta $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{4}$ e il triangolo OAB è anche isoscele.



◄ **Figura 6**

● $\frac{\pi}{4}$ radianti $= 45°$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOB:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2.$$

Poiché $\overline{OA} = \overline{AB}$ e $\overline{OB} = 1$:

$$2\overline{OA}^2 = 1 \to \overline{OA}^2 = \frac{1}{2} \to \overline{OA} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

● Poiché $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4}$, otteniamo:

$$\sec\frac{\pi}{4} = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Calcoliamo tangente e cotangente di $\frac{\pi}{4}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1; \qquad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = 1.$$

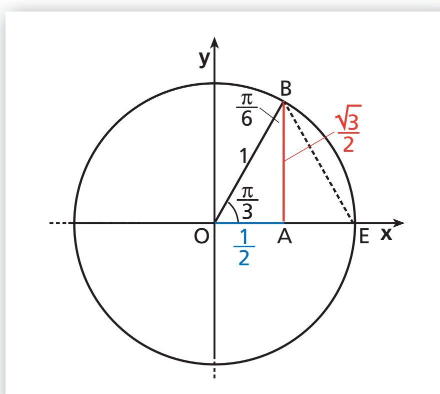
Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

L'angolo $\frac{\pi}{3}$

Nel cerchio goniometrico, consideriamo il triangolo OAB, rettangolo in A, con $\alpha = A\widehat{O}B = \frac{\pi}{3}$ e, di conseguenza, $O\widehat{B}A = \frac{\pi}{6}$.

Congiungendo B con E, otteniamo il triangolo OEB che ha i tre lati congruenti.
BA è l'altezza del triangolo OEB e OA è la metà di OE, quindi $\overline{OA} = \frac{1}{2}$.



▲ **Figura 7**

Ricaviamo $\overline{AB}$ applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

● $$\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}.$$

- Per gli angoli di $\frac{\pi}{6}$ e di $\frac{\pi}{3}$ i valori di seno e coseno, di tangente e cotangente e di secante e cosecante sono scambiati. Per esempio:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Ricaviamo la tangente e la cotangente di $\frac{\pi}{3}$.

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Pertanto:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

2. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

- Se restringiamo il dominio della funzione seno all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, la funzione seno risulta biunivoca, in quanto a ogni valore di sen x corrisponde un solo valore di x. Quindi possiamo considerare la funzione inversa.

DEFINIZIONE

Arcoseno

Dati i numeri reali x e y, con

$$-1 \le x \le 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2},$$

diciamo che y è l'arcoseno di x se x è il seno di y.

Scriviamo: $y = \operatorname{arcsen} x$.

$y = \operatorname{arcsen} x$ ⇕ $x = \operatorname{sen} y$

$D = [-1; 1]$

$C = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

ESEMPIO

$$\operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1; \quad \operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Se consideriamo $[0; \pi]$ come dominio, la funzione coseno è biunivoca e quindi invertibile.

DEFINIZIONE

Arcocoseno

Dati i numeri reali x e y, con

$$-1 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le \pi,$$

diciamo che y è l'arcocoseno di x se x è il coseno di y.

Scriviamo: $y = \arccos x$.

$y = \arccos x$ ⇕ $x = \cos y$

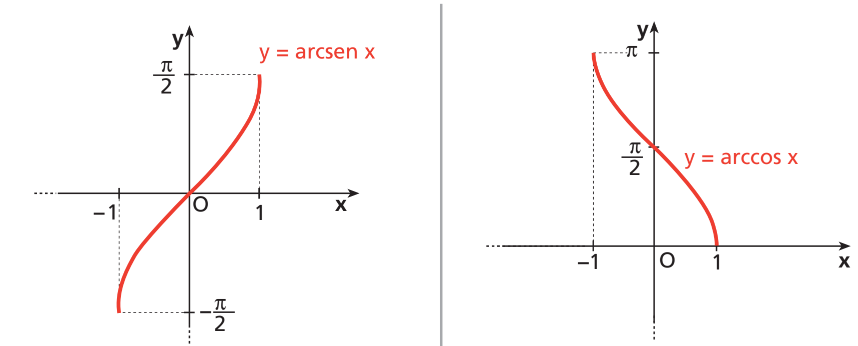
$D = [-1; 1]$

$C = [0; \pi]$

ESEMPIO

$$\arccos(-1) = \pi \leftrightarrow \cos\pi = -1;$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



a. Grafico della funzione $y = \arcsen x$.   **b.** Grafico della funzione $y = \arccos x$.

Per ottenere il grafico della funzione $y = \text{arcsen } x$, basta costruire il simmetrico rispetto alla bisettrice del I e III quadrante del grafico della funzione $y = \text{sen } x$, considerata nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Analogamente si procede per $y = \arccos x$.

◀ **Figura 8**

DEFINIZIONE

Arcotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, diciamo che y è l'arcotangente di x se x è la tangente di y.
Scriviamo: $y = \text{arctg } x$.

$y = \text{arctg } x$ ⇕ $x = \text{tg } y$

$D = \mathbb{R}$

$C = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

Se consideriamo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ come dominio, la funzione tangente è biunivoca e quindi invertibile.

ESEMPIO

$$\text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \text{tg } \frac{\pi}{4} = 1; \quad \text{arctg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \text{tg } \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

DEFINIZIONE

Arcocotangente

Dati i numeri reali x e y, con $x \in \mathbb{R}$ e $0 < y < \pi$, diciamo che y è l'arcocotangente di x se x è la cotangente di y.
Scriviamo: $y = \text{arccotg } x$.

$y = \text{arccotg } x$ ⇕ $x = \text{cotg } y$

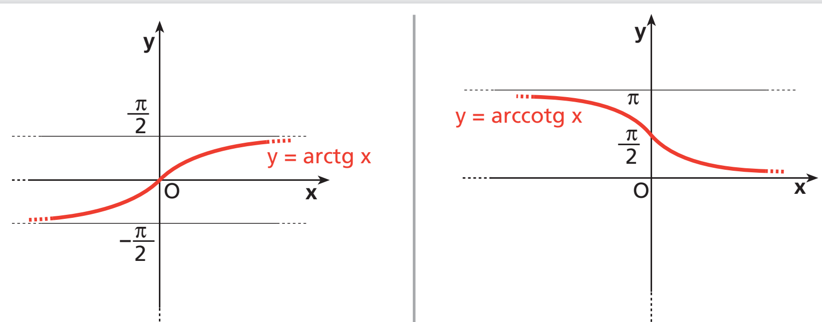
$D = \mathbb{R}$

$C =]0; \pi[$

ESEMPIO

$$\text{arccotg } 0 = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow \text{cotg } \frac{\pi}{2} = 0; \quad \text{arccotg } \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \text{cotg } \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Le funzioni goniometriche inverse e la calcolatrice
Le funzioni arcoseno, arcocoseno e arcotangente si indicano, rispettivamente, con $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$.
Per ottenerle, con la calcolatrice, di solito deve essere premuto prima il tasto relativo alla «seconda funzione», indicato a volte con <INV>, e poi il tasto della funzione seno, coseno o tangente.



a. Grafico della funzione $y = \text{arctg } x$.   **b.** Grafico della funzione $y = \text{arccotg } x$.

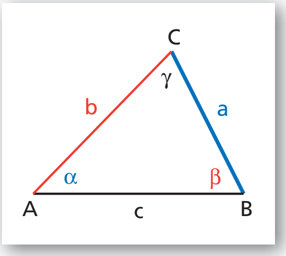
◀ **Figura 9**

3. I TRIANGOLI RETTANGOLI

● La parola **trigonometria** deriva dal greco e significa «misura dei triangoli».

Finora ci siamo occupati di goniometria, ossia della misurazione degli angoli e delle funzioni associate a essi. Ora tratteremo la trigonometria, che studia le relazioni metriche fra i lati e gli angoli di un triangolo.
D'ora in poi, quando ci occuperemo di triangoli, rispetteremo le seguenti convenzioni per la nomenclatura dei diversi elementi. Disegnato un triangolo ABC (figura 10), indichiamo con α la misura dell'angolo $\widehat{A}$, con β la misura dell'angolo $\widehat{B}$ e con γ la misura dell'angolo $\widehat{C}$. Indichiamo poi con a la misura del lato BC, che si oppone al vertice A, con b la misura del lato AC, che si oppone al vertice B, e con c la misura del lato AB, che si oppone al vertice C.

▶ Figura 10

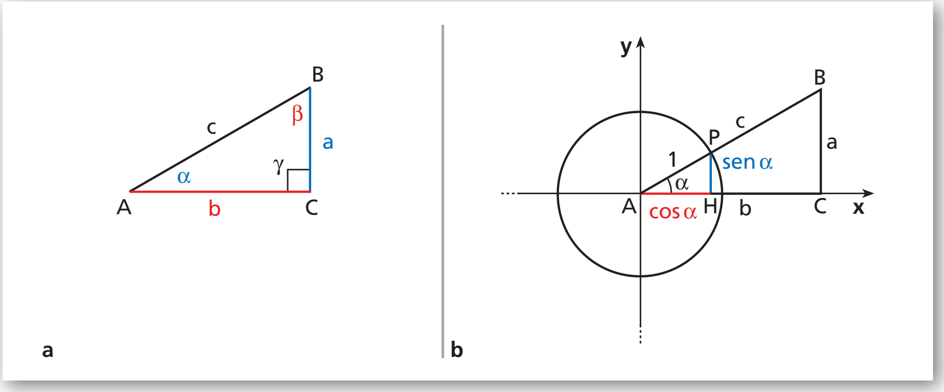


I teoremi sui triangoli rettangoli

Disegniamo un triangolo rettangolo ABC, con l'angolo retto in $\widehat{C}$, come in figura 11*a*, e indichiamo le misure dei lati e degli angoli, secondo le convenzioni appena stabilite.

Tracciamo la circonferenza goniometrica con centro A (figura 11*b*).

▶ Figura 11



In figura sono indicati il punto P, in cui il lato AB incontra la circonferenza goniometrica, e il punto H, proiezione di P sul lato AC.
I triangoli APH e ABC sono simili in quanto sono rettangoli e hanno l'angolo acuto α in comune.
Possiamo scrivere le proporzioni

$$BC : AB = PH : AP,$$

$$AC : AB = AH : AP,$$

e, poiché $\overline{AP} = 1$, $\overline{PH} = \text{sen}\,\alpha$ e $\overline{AH} = \cos\alpha$, otteniamo:

$$\overline{BC} = \overline{AB}\ \textbf{sen}\ \alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{a = c\,\textbf{sen}\,\alpha},$$

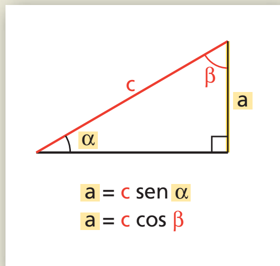
$$\overline{AC} = \overline{AB}\ \textbf{cos}\ \alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{b = c\cos\alpha}.$$

Le due uguaglianze ottenute portano a enunciare il seguente teorema.

TEOREMA

Primo teorema dei triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto o per il coseno dell'angolo (acuto) adiacente al cateto.



cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto
cateto = ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente

Per brevità, a volte scriveremo *cateto* invece di *misura del cateto*, *lato* invece di *misura del lato* ecc.

Consideriamo nuovamente la figura 11*b*. Per la similitudine dei triangoli *APH* e *ABC*, possiamo anche scrivere la proporzione

$$BC : AC = PH : AH,$$

da cui:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha, \text{ oppure } \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \text{cotg}\,\alpha.$$

Scritte nella forma

$$\overline{BC} = \overline{AC}\ \textbf{tg}\ \alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{a = b\,\textbf{tg}\,\alpha},$$

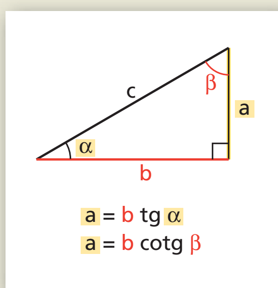
$$\overline{AC} = \overline{BC}\ \textbf{cotg}\ \alpha, \quad \text{ossia} \quad \boldsymbol{b = a\,\textbf{cotg}\,\alpha},$$

le due relazioni portano al seguente teorema.

TEOREMA

Secondo teorema dei triangoli rettangoli

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto o per la cotangente dell'angolo (acuto) adiacente al primo cateto.



cateto = altro cateto · tangente dell'angolo opposto al primo cateto
cateto = altro cateto · cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto

La risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli conoscendo **almeno un lato** e un altro dei suoi elementi (cioè, un angolo o un altro lato).

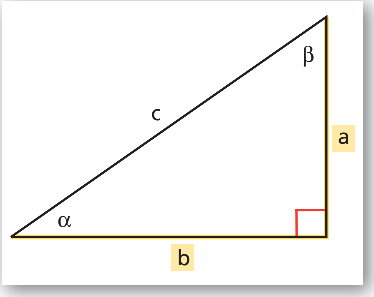
Esaminiamo quattro casi: due casi in cui si conoscono due lati e due casi in cui si conoscono un lato e un angolo.

Se di un triangolo sono noti solo gli angoli, non è possibile trovare i lati, perché esistono infiniti triangoli, tutti simili al dato, che hanno gli angoli congruenti.

Sono noti i due cateti

Conoscendo a e b, vogliamo determinare α, β e c:

▶ Figura 12



$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, da cui ricaviamo

$\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}$;

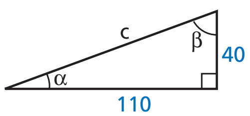
$\beta = 90° - \alpha$;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, per il teorema di Pitagora.

In un triangolo rettangolo gli angoli acuti sono complementari.

ESEMPIO

Le misure dei due cateti del triangolo in figura sono $a = 40$ e $b = 110$:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{110} = 0,\overline{36}, \quad \text{da cui}$$

$$\alpha \simeq 19°\,58'\,59'', \text{ che approssimiamo a } 20°,$$

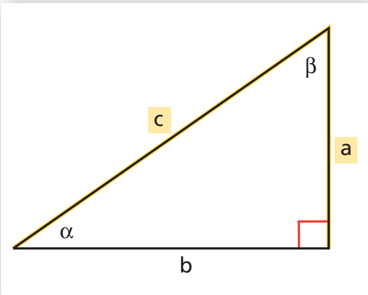
$$\alpha \simeq 20° \quad \to \quad \beta \simeq 90° - 20° \simeq 70°.$$

$$c = \sqrt{40^2 + 110^2} = \sqrt{1600 + 12100} = \sqrt{13700} \simeq 117.$$

È possibile calcolare il valore di c anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma ricavando c dalla formula: $a = c \operatorname{sen}\alpha$.

Sono noti un cateto e l'ipotenusa

Conoscendo a e c, vogliamo determinare α, β e b:



▶ Figura 13

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{a}{c}$, da cui ricaviamo

$\alpha = \operatorname{arcsen}\dfrac{a}{c}$;

$\beta = 90° - \alpha$;

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$, per il teorema di Pitagora.

Si può ricavare b anche senza applicare il teorema di Pitagora, ma con:

$$b = c\cos\alpha \quad \text{o} \quad b = c\operatorname{sen}\beta.$$

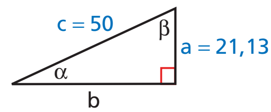
ESEMPIO

In un triangolo rettangolo le misure di un cateto e dell'ipotenusa sono $a = 21{,}13$ e $c = 50$.
Ricaviamo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{21{,}13}{50} = 0{,}4226 \rightarrow \alpha \simeq 25°;$$

$$\beta \simeq 90° - 25° \simeq 65°;$$

$$b = \sqrt{50^2 - (21{,}13)^2} = \sqrt{2500 - 446{,}4769} = \sqrt{2053{,}5231} \simeq 45{,}3.$$



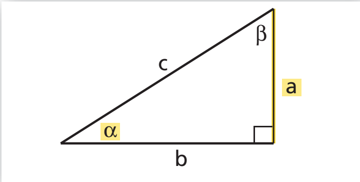
Sono noti un cateto e un angolo acuto

Conoscendo a e α, vogliamo determinare β, b e c:

$$\beta = 90° - \alpha;$$

$$b = a\,\text{tg}\,\beta;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$



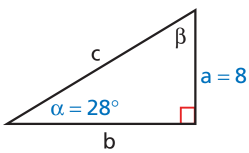
◄ **Figura 14**

ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo in cui sono noti $a = 8$ e $\alpha = 28°$.
Si ricava:

$$\beta = 90° - 28° = 62°; \quad b = 8\,\text{tg}\,62° \simeq 8 \cdot 1{,}88 \simeq 15;$$

$$c \simeq \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$$



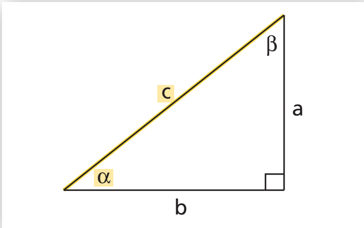
Sono noti l'ipotenusa e un angolo acuto

Conoscendo c e α, vogliamo determinare β, a e b:

$$\beta = 90° - \alpha;$$

$$a = c\,\text{sen}\,\alpha;$$

$$b = c\,\text{sen}\,\beta.$$



◄ **Figura 15**

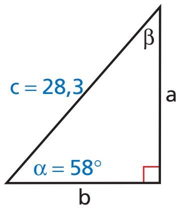
ESEMPIO

Consideriamo il triangolo rettangolo della figura a lato. Le misure dell'ipotenusa e dell'angolo sono rispettivamente $c = 28{,}3$ e $\alpha = 58°$.
Si ricava:

$$\beta = 90° - 58° = 32°;$$

$$a = 28{,}3 \cdot \text{sen}\,58° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}848 \simeq 24;$$

$$b = 28{,}3 \cdot \text{sen}\,32° \simeq 28{,}3 \cdot 0{,}5299 \simeq 15.$$



ESPLORAZIONE

Astri, seni, coseni, tangenti

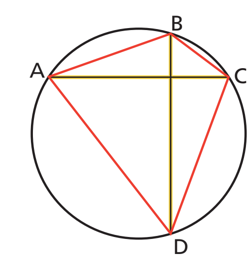
Nasce una nuova scienza

Colui che è ricordato come il fondatore della trigonometria, Ipparco di Nicea, è un astronomo vissuto prevalentemente ad Alessandria d'Egitto nel II secolo a.C. Nei suoi scritti si trovano delle vere e proprie tavole con le misure delle *corde* di un cerchio di raggio fissato riferite alla misura dell'angolo al centro corrispondente.
Considerata la circonferenza goniometrica, la relazione che lega la misura di una corda c e il seno dell'angolo al centro α corrispondente è

$$c = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2},$$

quindi lo studio delle corde è in realtà equivalente a quello dei seni degli angoli al centro corrispondenti.
Un altro astronomo greco, Tolomeo (II sec. d.C.), scrisse un'opera fondamentale non solo per l'astronomia, ma anche per la trigonometria: l'*Almagesto*.

▶ Teorema di Tolomeo: il prodotto delle misure delle diagonali di un quadrilatero inscritto in una circonferenza è uguale alla somma dei prodotti di quelle dei lati opposti del quadrilatero.



$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$$

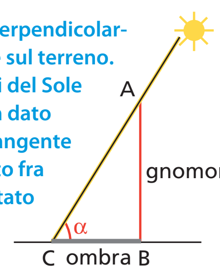
Nell'*Almagesto*, Tolomeo riportò delle tavole molto accurate delle misure delle corde, con valori che andavano, aumentando di mezzo grado, da 1° a 180°.

I nomi delle funzioni goniometriche

In India, Aryabhata (500 d.C.) introdusse l'uso delle mezze corde indicandole con il nome *jiva*. Data la relazione che abbiamo esaminato parlando dei Greci, esse erano già in qualche modo misure dei seni.
Gli Arabi trasformarono il termine originario indiano utilizzando, per assonanza, la parola *jaib*, che vuol dire «piega». Dagli Europei, la parola *jaib* venne poi tradotta in *sinus*, che, appunto, in latino ha anche il significato di «piega». Gli Arabi utilizzavano anche il coseno di un angolo, determinato come seno dell'angolo complementare, ma non esisteva un termine per indicarlo. Per il coseno il francese Francois Viète (1540-1603) usava il termine *sinus residuae*. Solo nel 1620 l'inglese Edmund Gunter (1581-1626) introdusse il termine *cosinus*.
L'introduzione delle funzioni tangente e cotangente è dovuta alla scienza degli orologi solari, la *gnomonica*. Il termine *tangente* fu introdotto nel 1583 dal danese Thomas Fincke e il termine *cotangente* ancora da Gunter nel 1620.

▶ Uno gnomone è un'asta infissa perpendicolarmente su un muro verticale oppure sul terreno. Consideriamo l'angolo α che i raggi del Sole formano rispetto all'orizzonte in un dato momento, ossia la sua altezza. La tangente dell'altezza si ottiene come rapporto fra la lunghezza di uno gnomone piantato a terra e quella della sua ombra:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$



La prima opera di trigonometria occidentale fu *De triangulis omnimodis*, scritta verso il 1464 da Johann Müller, detto Regiomontano.

Attività

Gli Arabi e l'astronomia

Gli Arabi hanno studiato l'astronomia greca e ce ne hanno tramandato opere importanti, come l'*Almagesto* (che in arabo significa *Il più grande*) di Tolomeo.

- Fai una ricerca sui contributi arabi allo sviluppo dell'astronomia medioevale.

◀ Maestro astronomo al lavoro con l'astrolabio. Istanbul, Museo Topkapi.

Cerca nel web:

Qibla, La Mecca, astronomia, Mihrab

4. APPLICAZIONI DEI TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

L'area di un triangolo

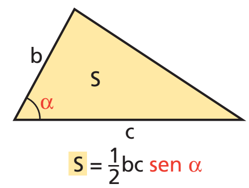
Enunciamo il seguente teorema senza dimostrarlo.

TEOREMA

Area di un triangolo

La misura dell'area di un triangolo è uguale al semiprodotto delle misure di due lati e del seno dell'angolo compreso fra essi.

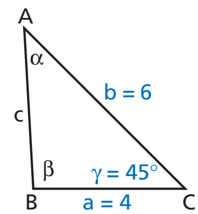
$$\textbf{area} = \frac{1}{2} \cdot \textbf{lato}_1 \cdot \textbf{lato}_2 \cdot \textbf{seno dell'angolo compreso}$$



ESEMPIO

Calcoliamo S, sapendo che $a = 4$, $b = 6$ e che l'angolo compreso tra essi è $\gamma = 45°$ (figura a lato):

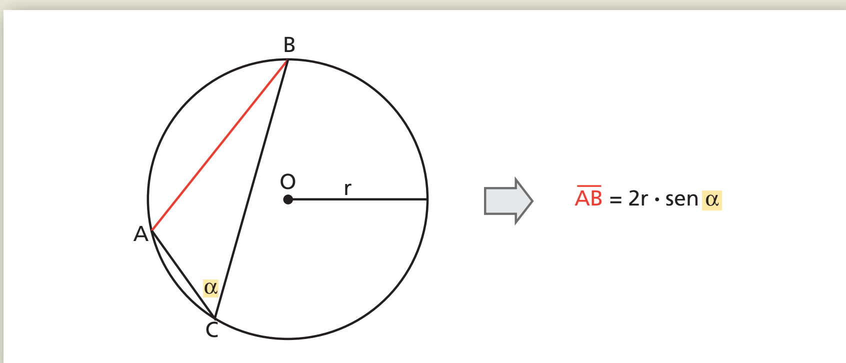
$$S = \frac{1}{2} 4 \cdot 6 \cdot \text{sen}\, 45° = 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}.$$



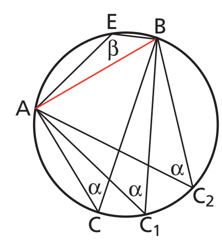
Il teorema della corda

TEOREMA

In una circonferenza la misura di una corda è uguale al prodotto della misura del diametro per il seno di uno degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda.



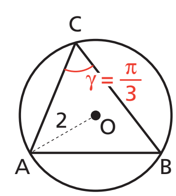
Gli angoli che insistono sulla corda AB sono di due tipi: quelli che insistono sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ minore, come quelli della figura con il vertice in C, C_1 e C_2, e quelli che insistono sull'arco $\overset{\frown}{AB}$ maggiore, come quello con vertice in E.



ESEMPIO

Determiniamo la misura della corda di una circonferenza di raggio 2, sapendo che su di essa insiste un angolo di $\frac{\pi}{3}$.

Applichiamo il teorema della corda: $\overline{AB} = 2 \cdot 2 \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

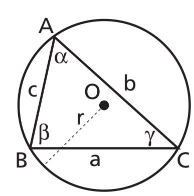


Il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo

Il triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di raggio r.

Il teorema della corda permette di scrivere le relazioni

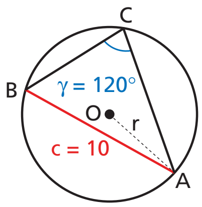
$$a = 2r \cdot \text{sen}\,\alpha, \quad b = 2r \cdot \text{sen}\,\beta, \quad c = 2r \cdot \text{sen}\,\gamma,$$



dalle quali possiamo ricavare r:

$$r = \frac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha}, \quad r = \frac{b}{2\,\text{sen}\,\beta}, \quad r = \frac{c}{2\,\text{sen}\,\gamma}.$$

Queste formule consentono di calcolare il raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo conoscendo un lato del triangolo e l'angolo opposto a esso.



ESEMPIO

Calcoliamo il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo ABC, di cui sono noti il lato $\overline{AB} = 10$ e l'angolo $A\widehat{C}B = 120°$.
Utilizziamo la relazione:

$$r = \frac{c}{2\,\text{sen}\,\gamma} = \frac{10}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

5. I TRIANGOLI QUALUNQUE

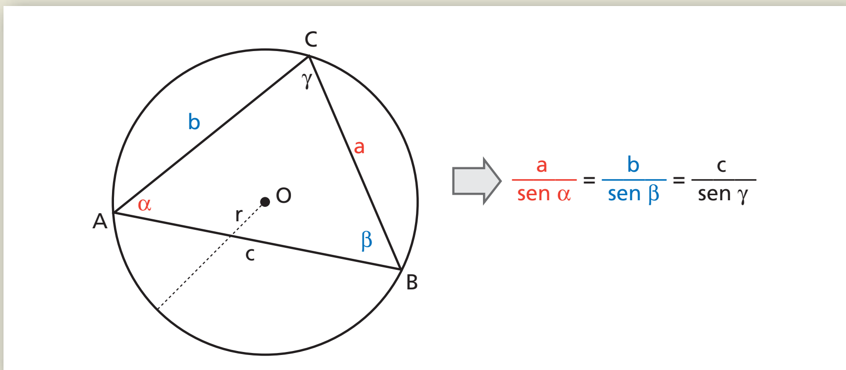
Esaminiamo ora le relazioni che legano le misure dei lati di un triangolo qualunque ai valori delle funzioni goniometriche degli angoli.

Il teorema dei seni

- Il teorema dei seni è anche noto come **teorema di Eulero**.
- Leonhard Euler (1707-1783) nacque a Basilea, dove iniziò la sua formazione matematica. Visse poi a Pietroburgo e a Berlino (1744-1766), alla corte di Federico il Grande, come direttore della sezione di scienze matematiche dell'Accademia. Ci ha lasciato più di 800 scritti, fra libri e articoli.

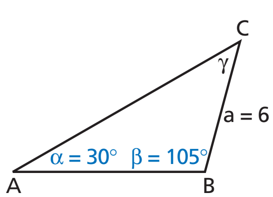
TEOREMA

In un triangolo le misure dei lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti.



Si dimostra che:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = 2r.$$



ESEMPIO

Calcoliamo la misura del lato AB del triangolo ABC sapendo che $\alpha = 30°$, $\beta = 105°$ e che la misura di BC è 6. Per poter applicare il teorema dei seni dobbiamo calcolare l'ampiezza dell'angolo γ:

$$\gamma = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

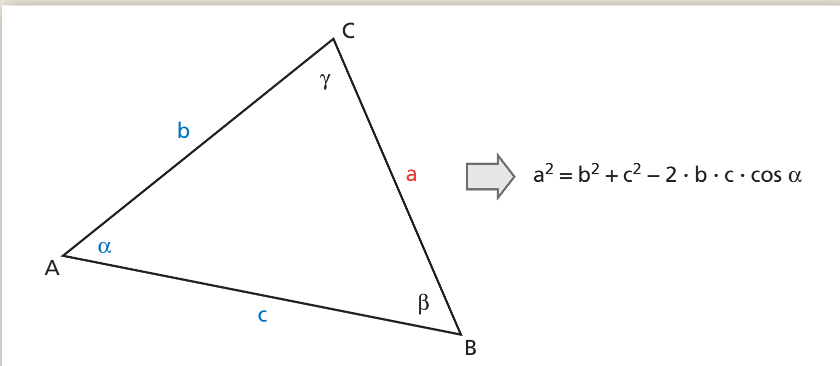
Utilizziamo la relazione $\dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$:

$$\frac{6}{\text{sen}\,30°} = \frac{c}{\text{sen}\,45°} \;\rightarrow\; \frac{6}{\frac{1}{2}} = \frac{c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \;\rightarrow\; c = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}.$$

Il teorema del coseno

TEOREMA

In un triangolo il quadrato della misura di un lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due lati diminuita del doppio prodotto della misura di questi due lati per il coseno dell'angolo compreso fra essi.



- Il teorema del coseno è anche noto come **teorema di Carnot**.
- Lazare-Nicolas Carnot (1753-1823) fu un matematico e un uomo politico francese, da non confondersi con il figlio Sadi Carnot (1796-1832), che fu un eminente fisico, noto per i suoi studi di termodinamica.

ESEMPIO

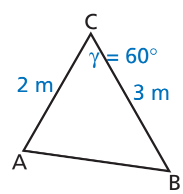
Calcoliamo la misura del lato AB di un triangolo ABC di cui sappiamo che:

$AC = 2$ m, $BC = 3$ m e l'angolo $\gamma = 60°$.

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\gamma = 4 + 9 - 12 \cdot \frac{1}{2} = 7,$$

da cui $AB = \sqrt{7}$ m.



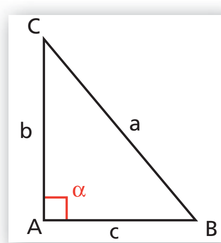
◄ **Figura 16**

- Il teorema del coseno viene anche chiamato **teorema di Pitagora generalizzato**. Questo perché, se il triangolo ABC è rettangolo, il teorema del coseno non è altro che il teorema di Pitagora. Infatti, se $\alpha = 90°$, si ha

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 90°,$$

e poiché $\cos 90° = 0$, ritroviamo il teorema di Pitagora:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$



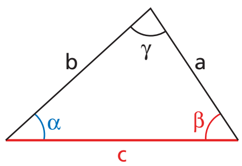
La risoluzione dei triangoli qualunque

Risolvere un triangolo qualunque significa determinare le misure dei suoi lati e dei suoi angoli. È sempre possibile risolvere un triangolo se sono noti *tre* suoi elementi, di cui *almeno uno sia un lato*.

Possiamo utilizzare il teorema dei seni e il teorema del coseno.

- Nel triangolo rettangolo basta conoscere due elementi, infatti il terzo elemento è l'angolo retto.

Esaminiamo i quattro possibili casi.



Sono noti un lato e due angoli

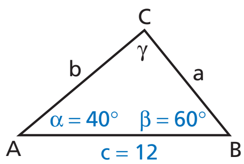
Conoscendo c, α e β, vogliamo determinare γ, a e b.

Determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.
Per il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad \rightarrow \quad a = \frac{c \cdot \text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma}.$$

Ancora per il teorema dei seni:

$$\frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma} \quad \rightarrow \quad b = \frac{c \cdot \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma}.$$



ESEMPIO

Nel triangolo in figura sono noti $c = 12$, $\alpha = 40°$ e $\beta = 60°$.
Ricaviamo γ:

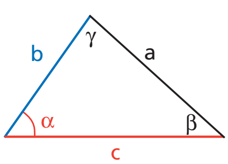
$$\gamma = 180° - (40° + 60°) = 80°.$$

Per il teorema dei seni, $\dfrac{a}{\text{sen}\,40°} = \dfrac{12}{\text{sen}\,80°}$, da cui:

$$a = \frac{12 \cdot \text{sen}\,40°}{\text{sen}\,80°} \simeq \frac{12 \cdot 0{,}64279}{0{,}9848} \simeq 7{,}83.$$

Ancora per il teorema dei seni, $\dfrac{b}{\text{sen}\,60°} = \dfrac{12}{\text{sen}\,80°}$, da cui:

$$b = \frac{12 \cdot \text{sen}\,60°}{\text{sen}\,80°} \simeq \frac{12 \cdot 0{,}866}{0{,}9848} \simeq 10{,}55.$$



Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

Nel triangolo in figura a lato conosciamo b, c e α; determiniamo β, γ e a.

Determiniamo a mediante il teorema del coseno:

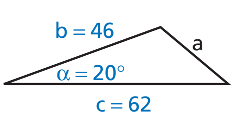
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}\,.$$

Applichiamo nuovamente il teorema del coseno per calcolare β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad 2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Troviamo β con la funzione arcocoseno.
Infine determiniamo γ: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.



ESEMPIO

Del triangolo in figura sono noti $b = 46$, $c = 62$ e $\alpha = 20°$.

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare a:

$$a = \sqrt{46^2 + 62^2 - 2 \cdot 46 \cdot 62 \cdot \cos 20°}$$

$$a \simeq \sqrt{2116 + 3844 - 5704 \cdot 0{,}93969} \simeq \sqrt{600{,}0082} \rightarrow a \simeq 24{,}50.$$

Applichiamo il teorema del coseno per calcolare β:

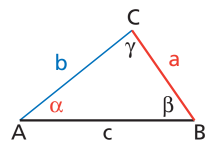
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow 46^2 = 24{,}5^2 + 62^2 - 2 \cdot 24{,}5 \cdot 62 \cdot \cos\beta,$$

$$\cos\beta \simeq 0{,}77 \rightarrow \beta \simeq 40°.$$

$$\gamma \simeq 180° - (20° + 40°) = 120°.$$

Per calcolare β abbiamo usato il teorema del coseno, invece del teorema dei seni, perché, se determiniamo un angolo conoscendo il valore del suo coseno, allora l'angolo che otteniamo è unico. Per esempio, $\cos\beta = \frac{1}{2}$ individua un solo angolo compreso fra 0° e 180°: $\beta = 60°$.
Invece, $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$ individua due angoli: $\beta = 30° \vee \beta = 150°$.
Quindi, se si calcola un angolo conoscendo il valore del suo seno, si ottengono due soluzioni di cui si dovrà poi verificare l'accettabilità.

Sono noti due lati e un angolo opposto a uno di essi
Consideriamo il triangolo *ABC* e supponiamo noti *a, b* e α. Vogliamo conoscere β, γ e *c*.
Applichiamo il teorema dei seni al triangolo dato per calcolare β:

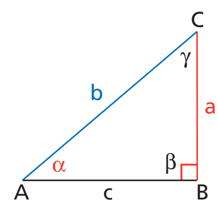


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \quad\rightarrow\quad \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha.$$

Esaminiamo i casi che si possono presentare a seconda del valore di $\operatorname{sen}\beta$, ricordando che deve risultare $0 < \operatorname{sen}\beta \leq 1$, altrimenti β non esiste.

1. $\operatorname{sen}\beta = 1 \rightarrow \beta = 90°$.

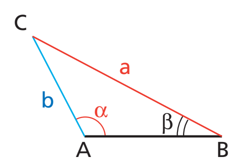
Distinguiamo due casi:
- se $\alpha \geq 90°$, il problema non ha soluzioni;
- se $\alpha < 90°$, il problema ammette una sola soluzione (figura *a*).



a

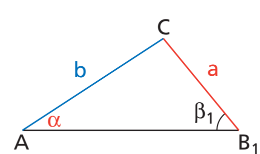
2. $0 < \operatorname{sen}\beta < 1$: in questo caso si hanno due soluzioni, β_1 e β_2, tra loro supplementari, per esempio β_1 acuto e β_2 ottuso.
Per sapere se questi valori sono accettabili, dobbiamo considerare α, *a* e *b*.

- Se $\alpha \geq 90°$, la soluzione β_2 non è accettabile perché un triangolo non può avere due angoli ottusi. Accettiamo solo β_1 acuto; il problema ammette una sola soluzione (figura *b*).



b

- Se $\alpha < 90°$ e $b > a$, allora, poiché a lato maggiore sta opposto angolo maggiore, è $\beta_1 > \alpha$ oppure $\beta_2 > \alpha$; entrambe le situazioni sono accettabili: il problema ammette due soluzioni (figure *c* e *d*).
- Se $\alpha < 90°$ e $b < a$, allora $\beta < \alpha$, per cui β_2, che è ottuso, non è accettabile e abbiamo per soluzione solo β_1.

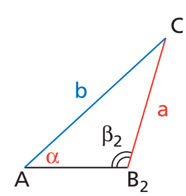


c

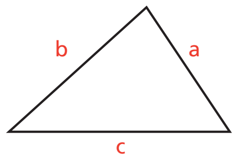
Per finire, dopo aver calcolato β, determiniamo $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$ e poi calcoliamo la misura del terzo lato, applicando il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \quad\rightarrow\quad c = a\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Del caso appena esaminato trovi due esempi nell'esercizio 149 a pagina 33.



d



● Anche in questo caso, come nel secondo, è opportuno utilizzare il teorema del coseno e non quello dei seni.

Sono noti i tre lati

Conoscendo a, b e c (figura a lato), determiniamo α, β e γ.

Ricaviamo α applicando il teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad 2bc\cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Troviamo poi α con la funzione arcocoseno.

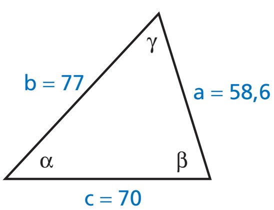
Ricaviamo β allo stesso modo:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \rightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Ricaviamo β con la funzione arcocoseno.

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta).$$



ESEMPIO

Consideriamo il triangolo con $a = 58{,}6$, $b = 77$ e $c = 70$.

Per ricavare α possiamo sostituire, nella formula che esprime la relazione tra il coseno di un angolo e le misure dei lati del triangolo, i valori di a, b e c:

$$\cos\alpha = \frac{77^2 + 70^2 - 58{,}6^2}{2 \cdot 70 \cdot 77} = \frac{5929 + 4900 - 3433{,}96}{10\,780}$$

$$\cos\alpha = \frac{7395{,}04}{10\,780} \quad \rightarrow \quad \cos\alpha \simeq 0{,}686$$

$$\alpha \simeq \arccos 0{,}686 \simeq 47°.$$

Ricaviamo β allo stesso modo:

$$\cos\beta = \frac{70^2 + 58{,}6^2 - 77^2}{2 \cdot 70 \cdot 58{,}6} \simeq 0{,}29$$

$$\beta \simeq \arccos 0{,}29 \simeq 73°.$$

Ricaviamo, infine, γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180° - (47° + 73°) = 60°.$$

1. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

▶ Teoria a pag. 1

La secante, la cosecante, la cotangente

Utilizzando la circonferenza goniometrica, rappresenta gli angoli che verificano le seguenti uguaglianze.

1 $\sec\alpha = 2$

2 $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$

3 $\sec\alpha = -1$

4 $\operatorname{cosec}\alpha = 3$

5 Disegna nel cerchio goniometrico gli angoli che soddisfano le seguenti uguaglianze:

$\operatorname{cotg}\alpha = 1$; $\operatorname{cotg}\beta = 4$; $\operatorname{cotg}\gamma = -2$.

Indica in quale quadrante si trova un angolo α che verifica le seguenti condizioni.

6 $\operatorname{sen}\alpha > 0$, $\operatorname{cotg}\alpha < 0$. [II quadrante]

7 $\operatorname{cotg}\alpha < 0$, $\sec\alpha < 0$. [II quadrante]

8 $\cos\alpha > 0$, $\operatorname{cotg}\alpha > 0$. [I quadrante]

Trova il dominio delle seguenti funzioni.

9 $y = \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

10 $y = \frac{2}{\operatorname{cotg} x}$ $\left[x \neq k\frac{\pi}{2}\right]$

11 $y = \operatorname{cotg} x - 3\operatorname{sen} x$ $[x \neq k\pi]$

Espressioni con le funzioni goniometriche

12 **ESERCIZIO GUIDA**

Semplifichiamo la seguente espressione:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\frac{1}{\sec^2\alpha}.$$

Utilizziamo la seconda relazione fondamentale:

$$\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\frac{1}{\sec^2\alpha}.$$

Eseguiamo il calcolo all'interno della parentesi e utilizziamo la definizione di $\sec\alpha$:

$$\left(\frac{1 + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}.$$

Trasformiamo il tutto in prodotto fra frazioni:

$$\frac{1 + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \cos^2\alpha = 1 + \operatorname{sen}^2\alpha.$$

Semplifica le seguenti espressioni.

13 $(\sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\alpha)\operatorname{cotg}^2\alpha$ $\left[\frac{1}{\operatorname{sen}^4\alpha}\right]$

14 $\frac{\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha - 2}{\operatorname{cotg}\alpha} \cdot \operatorname{cosec}\alpha$ $[-\cos\alpha]$

15 $1 + \frac{1}{\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha} \cdot \operatorname{tg}^2\alpha$ $\left[\frac{1}{\cos^2\alpha}\right]$

16 $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1 - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha + 1$ $\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}\right]$

le funzioni goniometriche di angoli particolari

17 Determina il seno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del seno degli angoli particolari:

$120°$; $135°$; $150°$; $180°$; $270°$; $300°$. $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; 0; -1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

18 Determina il coseno dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza del coseno di angoli particolari:

$120°$; $135°$; $150°$; $180°$; $270°$; $300°$. $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; -1; 0; \frac{1}{2}\right]$

19 Determina la tangente dei seguenti angoli, utilizzando la conoscenza della tangente degli angoli particolari:

$120°$; $135°$; $150°$; $180°$; $270°$; $300°$. $\left[-\sqrt{3}; -1; -\frac{1}{\sqrt{3}}; 0; \text{non esiste}; -\sqrt{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

20 $4 \operatorname{sen} 30° - \sec 60° + \sqrt{2} \operatorname{cosec} 45° + \cos 90° - 3 \sec 0° + \operatorname{cotg} 45°$ $[0]$

21 $4 \cos 0 - 2 \sec \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} - 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2}$ $[0]$

22 $3 \operatorname{tg} 0° + 4 \cos 30° \operatorname{sen} 60° - \sqrt{2} \cos 45° - 6 \operatorname{sen} 90°$ $[-4]$

23 $\cos 0° + \operatorname{sen} 90° - 3 \cos 180° + 5 \operatorname{sen}^2 270° - \operatorname{sen} 180° + 7 \cos 270°$ $[10]$

24 $\sqrt{3} \cos 30° - \sqrt{3} \sec 60° - \operatorname{sen} 45° + \cos 60° \operatorname{cosec} 45° - 8 \operatorname{sen}^2 30°$ $\left[-\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right]$

25 $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} - 3 \sec \frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} \sec \frac{\pi}{6} - 8 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$ $[-3\sqrt{2}]$

26 $\frac{1}{2} \sec 45° - \cos 45° - 2 \cos^2 30° + \sqrt{3} \operatorname{cosec} 60° - 3 \operatorname{tg} 30° + 3 \operatorname{cotg} 60°$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

27 $\frac{1}{3} \cos 0° + \sqrt{3} \operatorname{sen} 60° + 4 \cos 90° - \frac{\sqrt{2}}{3} \cos 45° - 2 \cos 60° - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 90°$ $[-1]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni a coefficienti letterali.

28 $2a \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - b\sqrt{2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} + a \cos \frac{\pi}{2} + b \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}$ $[a - b]$

29 $a \operatorname{sen} 90° + 2b \cos 180° - 3a \operatorname{sen} 270° + b \cos 0°$ $[4a - b]$

30 $2x \cos 60° - 2y \operatorname{sen} 60° + x \sec 60° + y \operatorname{tg} 60°$ $[3x]$

31 $\left(a \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - b \cos \pi\right)\left(2a \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - b \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4}\right) + b^2 \sec \frac{\pi}{3}$ $[a^2 + b^2]$

32 $x \operatorname{tg} 0 + \left(x \operatorname{cotg} \frac{\pi}{6} + y \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^2 - 3y^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{4} - x \operatorname{cotg} \frac{3}{2}\pi$ $[3x^2 + 6xy]]$

2. LE FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

▶ Teoria a pag. 8

COMPLETA le seguenti tabelle.

33

x	$y = \text{arcsen}\, x$	$\text{sen}\, y$
0		
1		
	$\frac{\pi}{6}$	
		$-\frac{1}{2}$
		-1

34

x	$y = \arccos x$	$\cos y$
	$\frac{\pi}{3}$	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
	π	
0		

35

x	$y = \text{arctg}\, x$	$\text{tg}\, y$
		0
	$\frac{\pi}{3}$	
-1		
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
		$-\sqrt{3}$

36

x	$y = \text{arccotg}\, x$	$\text{cotg}\, y$
	$\frac{\pi}{2}$	
$\sqrt{3}$		
		-1
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		
	$\frac{5}{6}\pi$	

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

37 $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\quad \text{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\quad \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{3}\right]$

38 $\text{arcsen}\frac{1}{2}$, $\quad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $\quad \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$

39 $\text{arctg}(-1)$, $\quad \text{arctg}\,\sqrt{3}$. $\quad \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

40 $\text{arcsen}\, 1 + \text{arctg}(-1)$ $\quad \left[\frac{\pi}{4}\right]$

41 $\text{arctg}(-1) + 2\,\text{arcsen}\frac{1}{2} + \text{arctg}(-\sqrt{3})$ $\quad \left[-\frac{\pi}{4}\right]$

42 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arcsen}\frac{1}{2} - \text{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \left[\frac{\pi}{6}\right]$

43 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo $\cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

- Si tratta di una funzione composta; calcoliamo il valore della funzione più «interna», arcsen $\left(-\frac{1}{2}\right)$, tenendo conto che il codominio dell'arcoseno è $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

  $$\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

  Pertanto $\cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

- Calcoliamo ora il valore della funzione «esterna»:

  $$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

44 $\text{sen}\,(\text{arctg}\ 1)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

45 $\text{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$ $[\sqrt{3}]$

46 $\cos[\text{arctg}(-\sqrt{3})]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

47 $\text{sen}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

48 $\cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

49 $\text{cotg}\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

50 $\text{sen}\left(\text{arccotg}\sqrt{3}\right)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

51 $\cos\left[\text{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

52 $\text{tg}\left[\text{arccotg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$ $[-\sqrt{3}]$

53 $\cos\,[\text{arctg}\,(-\,1)]$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

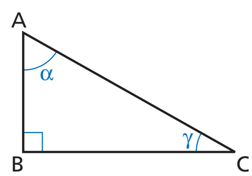
54 $\text{tg}\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$ $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

55 $\text{sen}\left[\text{arccotg}(-\sqrt{3})\right]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

3. I TRIANGOLI RETTANGOLI

Teoria a pag. 10

56 **VERO O FALSO?**



Nel triangolo rettangolo della figura si ha:

a) $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\gamma$. V F

b) $\overline{AC} = \frac{\overline{AB}}{\cos\alpha}$. V F

c) $\overline{BC} = \overline{AB}\ \text{tg}\ \gamma$. V F

d) $\overline{AC} = \overline{BC}\ \text{sen}\ \alpha$. V F

e) $\overline{AB} = \overline{BC}\ \text{cotg}\ \alpha$. V F

f) $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha$. V F

La risoluzione dei triangoli rettangoli

57 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC* rettangolo in *A*, sapendo che:

a) un cateto è lungo 10 cm e l'ipotenusa 26 cm;
b) i due cateti sono lunghi 30 cm e 40 cm.

a) Troviamo gli elementi incogniti del triangolo.
Per ricavare β, applichiamo il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AB} = \overline{BC}\cos\beta$$

$$10 = 26\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{5}{13} \rightarrow \beta = \arccos\frac{5}{13}.$$

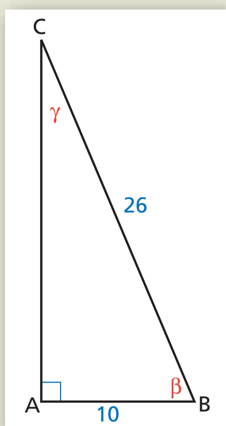
Ricaviamo γ:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{13}.$$

Essendo $\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta = 1$, ricaviamo $\text{sen}\,\beta$:

$$\text{sen}\,\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2\beta} \rightarrow \text{sen}\,\beta = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \frac{12}{13};$$

abbiamo scelto il valore positivo perché β è un angolo acuto.



Per il primo teorema dei triangoli rettangoli si ha:

$$\overline{AC} = \overline{CB}\ \text{sen}\,\beta \rightarrow \overline{AC} = \cancel{26}^{2} \cdot \frac{12}{\cancel{13}_{1}} = 24.$$ La lunghezza di AC è 24 cm.

b) Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli,

$$\overline{AC} = \overline{AB}\ \text{tg}\,\beta \rightarrow 40 = 30\text{tg}\,\beta \rightarrow \text{tg}\,\beta = \frac{4}{3}$$

$$\beta = \text{arctg}\frac{4}{3},$$

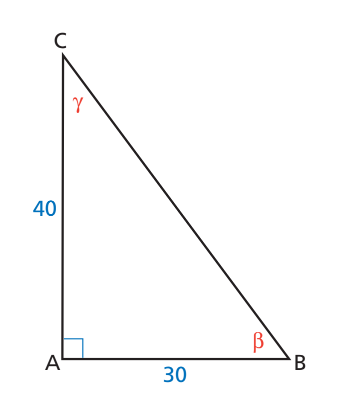
da cui:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \text{arctg}\frac{4}{3}.$$

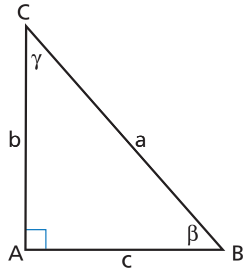
Con il teorema di Pitagora calcoliamo $\overline{BC}$:

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50.$$

L'ipotenusa BC ha lunghezza 50 cm.



Risolvi il triangolo *ABC*, rettangolo in *A*, noti gli elementi indicati.



58 $b = 15$; $\gamma = 30°$. $[a = 10\sqrt{3}; c = 5\sqrt{3}; \beta = 60°]$

59 $a = 24$; $\beta = 60°$. $[b = 12\sqrt{3}; c = 12; \gamma = 30°]$

60 $b = 8$; $c = 8\sqrt{3}$. $[a = 16; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

61 $a = 48$; $b = 24$. $[c = 24\sqrt{3}; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

62 $c = 10$; $\gamma = 60°$. $\left[a = \frac{20}{3}\sqrt{3}; b = \frac{10}{3}\sqrt{3}; \beta = 30°\right]$

63 $b = 22$; $\gamma = 45°$. $[a = 22\sqrt{2}; c = 22; \beta = 45°]$

64 $b = 46$; $\beta = 30°$. $[a = 92; c = 46\sqrt{3}; \gamma = 60°]$

65 $a = 84$; $c = 42\sqrt{3}$. $[b = 42; \beta = 30°; \gamma = 60°]$

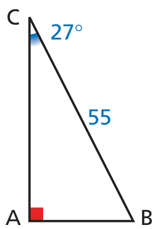
66 $a = 28$; $\gamma = 45°$. $[b = 14\sqrt{2}; c = 14\sqrt{2}; \beta = 45°]$

67 $a = 36$; $\beta = 18°$. $[b \simeq 11{,}12; c \simeq 34{,}24; \gamma = 72°]$

68 $c = 5$; $a = 5\sqrt{2}$. $[b = 5; \beta = \gamma = 45°]$

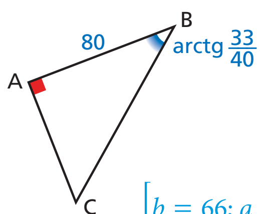
Risolvi i seguenti triangoli rettangoli, noti gli elementi indicati in figura.

69



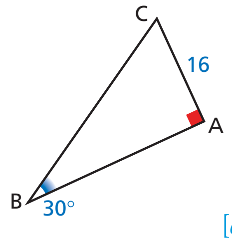
$[c \simeq 24{,}97; b \simeq 49{,}01; \beta = 63°]$

70



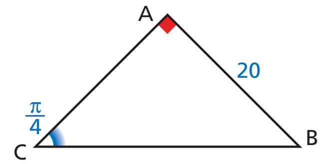
$\left[b = 66; a \simeq 103{,}71; \gamma = \text{arctg}\frac{40}{33}\right]$

71



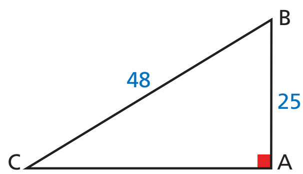
$[a = 32;\ c \simeq 27{,}71;\ \gamma = 60°]$

73



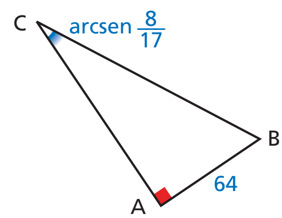
$\left[\beta = \frac{\pi}{4};\ b = 20;\ a = 20\sqrt{2}\right]$

72



$\left[b \simeq 40{,}98;\ \beta \simeq \text{arcsen } 0{,}85;\ \gamma = \text{arcsen}\frac{25}{48}\right]$

74

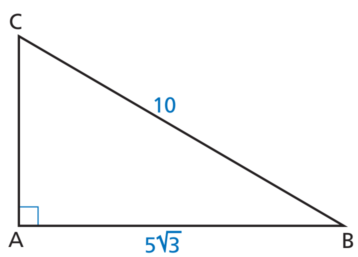


$\left[a = 136;\ b = 120;\ \beta = \text{arcsen}\frac{15}{17}\right]$

I problemi con i triangoli rettangoli

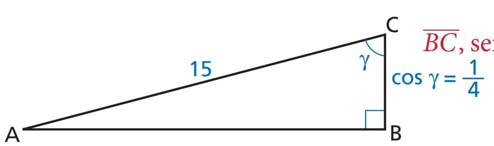
Utilizzando i dati della figura, deduci ciò che è indicato a fianco.

75 β, $\overline{AC}$



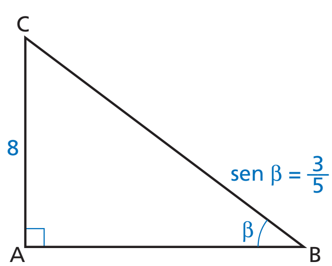
$[30°;\ 5]$

76 $\overline{BC}$, sen α



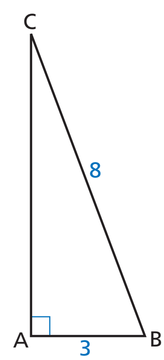
$\left[\frac{15}{4};\ \frac{1}{4}\right]$

77 $\overline{BC}$, cos γ



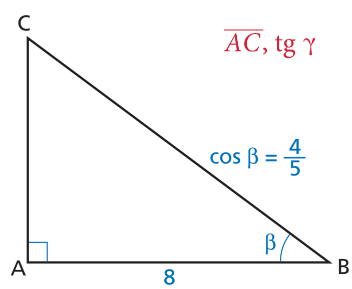
$\left[\frac{40}{3};\ \frac{3}{5}\right]$

78 tg β, cos γ



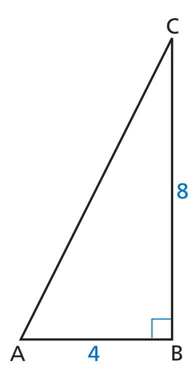
$\left[\frac{\sqrt{55}}{3};\ \frac{\sqrt{55}}{8}\right]$

79 $\overline{AC}$, tg γ



$\left[6;\ \frac{4}{3}\right]$

80 sen γ, sen α



$\left[\frac{\sqrt{5}}{5};\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$

81 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 10 cm e l'angolo opposto a esso è di 40°. Trova il perimetro del triangolo. [37,47 cm]

82 In un triangolo rettangolo il rapporto tra un cateto e l'ipotenusa è $\frac{5}{13}$, e l'altro cateto è lungo 48 cm. Determina l'area del triangolo e le misure degli angoli. [480 cm^2; 22° 37′; 67° 23′]

83 Nel triangolo ABC, rettangolo in A, un cateto è lungo 20 cm e il coseno dell'angolo acuto a esso adiacente è 0,7. Determina l'area e il perimetro del triangolo. [204 cm^2; 68,97 cm]

84 Nel triangolo rettangolo ABC la lunghezza dell'ipotenusa BC è 41 cm e la tangente dell'angolo $\widehat{B}$ è $\frac{40}{9}$. Determina il perimetro e l'area del triangolo. [90 cm; 180 cm^2]

85 Nel triangolo rettangolo ABC le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa BC sono $BH = 25$ cm e $CH = 49$ cm. Determina i cateti e gli angoli acuti. $\left[AB = 5\sqrt{74}\text{ cm}; AC = 7\sqrt{74}\text{ cm}; \widehat{B} = \text{arctg}\frac{7}{5}; \widehat{C} = \text{arctg}\frac{5}{7}\right]$

86 In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 75 cm e il seno del suo angolo opposto è $\frac{15}{17}$. Determina il perimetro del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa. [200 cm; $h \simeq 35{,}29$ cm]

87 In un triangolo isoscele la base è lunga 24 cm e il coseno dell'angolo al vertice è $\frac{7}{25}$. Determina le altezze del triangolo. [16 cm; 19,2 cm]

88 Il lato obliquo di un triangolo isoscele è lungo 81 cm e il coseno dell'angolo alla base è $\frac{9}{41}$. Trova il perimetro e l'area del triangolo. [197,56 cm; 1404,9756 cm^2]

89 Nel trapezio isoscele $ABCD$ di base AB è $AD = DC = 82$ cm e $\text{tg}\,\widehat{A} = \frac{9}{40}$. Determina perimetro e area del trapezio. [488 cm; 2916 cm^2]

90 Trova il perimetro di un triangolo isoscele, di base $\overline{AB} = 48$ cm, in cui il coseno dell'angolo al vertice è uguale a $-\frac{7}{25}$. [108 cm]

91 In un triangolo ABC, $\widehat{A} = 30°$ e $\widehat{B} = 45°$. Essendo $AC = 20$ cm e $CB = 10\sqrt{2}$ cm, calcola la lunghezza del lato AB. [$(10\sqrt{3} + 10)$ cm]

92 In un triangolo rettangolo la differenza dei cateti è 6 cm e la tangente dell'angolo opposto al cateto maggiore è $\frac{21}{20}$. Calcola il perimetro e l'area del triangolo. [420 cm; 7560 cm^2]

93 Il trapezio $ABCD$ è rettangolo in A e D. Sapendo che $AB = 32$ cm, $CD = 8$ cm e $\text{tg}\,\widehat{B} = \frac{5}{12}$, calcola il perimetro e l'area del trapezio e determina il valore di $\cos\widehat{C}$. $\left[76\text{ cm}; 200\text{ cm}^2; -\frac{12}{13}\right]$

94 Determina i lati di un triangolo rettangolo, sapendo che il perimetro è 180 cm e la tangente di uno degli angoli acuti è $\frac{12}{5}$. [30 cm; 72 cm; 78 cm]

Triangoli rettangoli nella realtà

95 Una funivia collega due località, A e B, distanti 1200 m ed è inclinata di 42° sul piano orizzontale. A che altezza, rispetto ad A, si trova la stazione B? [802,96 m]

96 La rampa di un parcheggio sotterraneo è lunga 8,4 m e forma un angolo di 21° con il piano orizzontale. A che profondità si trova il parcheggio? [3,01 m]

97 In un cartello stradale si legge: «Pendenza del 14%». Percorrendo un tratto di 280 m, quanto si sale in altezza? Che angolo forma la strada con il piano orizzontale? [39,2 m; 8,05°]

4. APPLICAZIONI DEI TEOREMI SUI TRIANGOLI RETTANGOLI

▶ Teoria a pag. 15

L'area di un triangolo

Determina l'area di un triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

98 $a = 20$, $b = 5$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $[25\sqrt{3}]$

99 $a = 12$, $c = 3\sqrt{2}$, $\beta = \frac{3}{4}\pi$. [18]

100 $b = \frac{5}{2}\sqrt{3}$, $c = 16$, $\alpha = 120°$. [30]

101 $a = 20$, $b = 12$, $\gamma = 150°$. [60]

102 $b = 65$, $c = 20$, $\alpha = \text{arcsen}\frac{5}{13}$. [250]

103 $a = 26$, $c = 10$, $\beta = \text{arctg}\frac{12}{5}$. [120]

104 Calcola l'area di un triangolo sapendo che due suoi lati sono lunghi 30 cm e 18 cm e l'angolo compreso tra essi è di 45°. [190,9 cm^2]

105 In un triangolo due lati sono lunghi 28 cm e 46 cm. L'angolo compreso tra essi ha il coseno uguale a $\frac{12}{13}$. Determina l'area del triangolo. [247,7 cm^2]

106 Calcola l'area di un parallelogramma in cui due lati consecutivi misurano 12 e 28 e l'angolo compreso fra essi ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$. $[168\sqrt{3}]$

Il teorema della corda

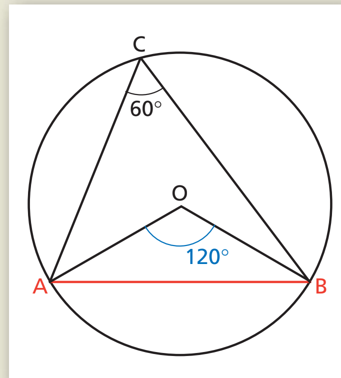
107 **ESERCIZIO GUIDA**

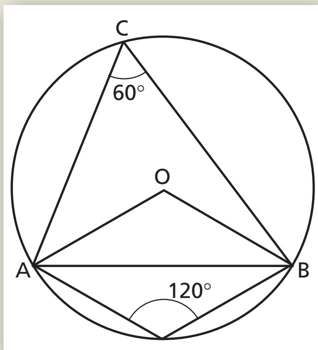
In una circonferenza il raggio è 20 cm. Calcoliamo la lunghezza di una sua corda, sapendo che l'angolo al centro che insiste su di essa ha ampiezza di 120°.

Se l'angolo al centro che insiste sulla corda è 120°, allora il corrispondente angolo alla circonferenza è $\alpha = 60°$.
Per il teorema della corda è:

$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen} \alpha = 2 \cdot 20 \cdot \operatorname{sen} 60° = \overset{20}{\cancel{40}}\, \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}_{1}} = 20\sqrt{3}.$$

La corda è lunga $20\sqrt{3}$ cm.

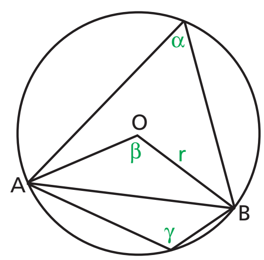




Osservazione. Sulla corda AB insistono angoli alla circonferenza di 60° e angoli alla circonferenza di 120°. La lunghezza della corda AB che calcoliamo non dipende dall'angolo scelto, perché

$$\operatorname{sen} 60° = \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Negli esercizi che seguono trova l'elemento indicato riferendoti alla figura.



108 $\overline{AB} = ?$, $r = 5$, $\alpha = 30°$. $[5]$

109 $\overline{AB} = ?$, $r = 12$, $\gamma = 135°$. $[12\sqrt{2}]$

110 $\overline{AB} = ?$, $r = 15$, $\beta = \arccos \frac{7}{25}$. $[18]$

111 $r = ?$, $\overline{AB} = 10\sqrt{3}$, $\alpha = 30°$. $[10\sqrt{3}]$

112 $r = ?$, $\overline{AB} = 20$, $\beta = 120°$. $\left[\frac{20}{3}\sqrt{3}\right]$

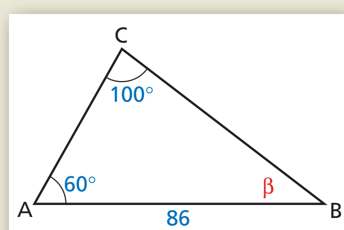
5. I TRIANGOLI QUALUNQUE

Teoria a pag. 16

Il teorema dei seni

113 **ESERCIZIO GUIDA**

Utilizziamo gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati CB e AC del triangolo.



$\beta = 180° - (100° + 60°) = 20°$.

Applichiamo il teorema dei seni per determinare CB e AC:

$$\frac{\overline{CB}}{\operatorname{sen} 60°} = \frac{86}{\operatorname{sen} 100°} \rightarrow \overline{CB} = \frac{86}{\operatorname{sen} 100°} \cdot \operatorname{sen} 60° \simeq 75{,}6.$$

$$\frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} 20°} = \frac{86}{\operatorname{sen} 100°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{86}{\operatorname{sen} 100°} \cdot \operatorname{sen} 20° \simeq 29{,}8.$$

Del triangolo ABC sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

114 $a = 12$, $b = 9$, $\beta = 30°$. sen α? $\left[\frac{2}{3}\right]$

115 $a = 20$, $b = 9$, $\alpha = 120°$. sen β? $\left[\frac{9\sqrt{3}}{40}\right]$

116 $a = 21$, $c = 12$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. sen α? cos β? [impossibile]

117 $b = 12$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(\sqrt{3}+1)]$

118 $a = 12\sqrt{2}$, $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$. b? c? $[12\sqrt{3}(\sqrt{3}-1); 12\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)]$

119 $\alpha = 60°$, $\gamma = 75°$, $b = 12$. a? c? $[6\sqrt{6}; 6(1+\sqrt{3})]$

120 Nel triangolo ABC sono noti $\overline{AB} = 20$, $\operatorname{cotg} \widehat{A} = \frac{3}{4}$ e $\widehat{C} = \frac{\pi}{6}$. Determina la misura degli altri due lati. $[\overline{BC} = 32; \overline{AC} = 4(3+4\sqrt{3})]$

121 Determina il perimetro del parallelogramma $ABCD$ di base AB, sapendo che $\overline{BD} = 12$, $D\widehat{A}B = \frac{\pi}{3}$, $A\widehat{B}D = \frac{\pi}{4}$. $[12\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)]$

122 Nel triangolo ABC si conoscono $AB = 10\sqrt{7}$ m, $\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{3}{5}$ e $\cos \widehat{C} = -\frac{3}{4}$. Determina i lati AC e BC. $[AC = 2(4\sqrt{7}-9)\text{ m}; BC = 24\text{ m}]$

123 Nel triangolo LMN il lato LM è lungo 60 cm e l'angolo $M\widehat{L}N$ ha ampiezza 30°. Sapendo che $\cos L\widehat{N}M = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, determina gli altri lati del triangolo. $[MN = 90\text{ cm}; LN = 30(2\sqrt{2}+\sqrt{3})\text{ cm}]$

124 Il triangolo LMN è ottusangolo in $\widehat{L}$; sapendo che $LM = 19$ m, $LN = 13$ m e che l'altezza relativa al lato LM è $NH = 12$ m, calcola il perimetro del triangolo e l'ampiezza di $L\widehat{N}M$. $\left[(32+12\sqrt{5})\text{ m}; L\widehat{N}M = \arcsen \frac{19\sqrt{5}}{65}\right]$

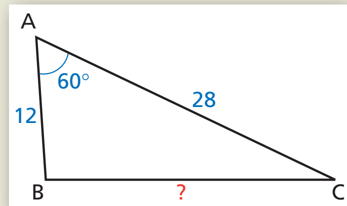
125 Nel triangolo ABC la bisettrice CD misura 8 e forma con la base AB l'angolo $C\widehat{D}B = 60°$. Determina $D\widehat{C}B$ sapendo che:

$\overline{AC} + \overline{CB} = 24$. $\left[\frac{\pi}{5}\right]$

Il teorema del coseno

126 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo la misura del lato *BC* utilizzando gli elementi indicati nella figura.



Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.
Si ha:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos B\widehat{A}C =$$
$$= 12^2 + 28^2 - 2\cdot 12\cdot 28\cos 60° =$$
$$= 144 + 784 - \cancel{2}\cdot 12\cdot 28\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 592.$$

Quindi:

$$\overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24{,}3.$$

Del triangolo *ABC* sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

127 $a = 12$, $b = 6$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. c? $[6\sqrt{3}]$

128 $b = 4\sqrt{2}$, $c = 20$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. a? $[4\sqrt{17}]$

129 $a = 15$, $c = 21$, $\beta = 40°$. b? $[13{,}5]$

130 $a = 24$, $b = 12$, $c = 12\sqrt{3}$. γ? $[60°]$

131 $a = \sqrt{56}$, $b = 10$, $c = 6$. $\cos\alpha$? $\left[\frac{2}{3}\right]$

132 $a = 12$, $b = 4\sqrt{10}$, $c = 8$. $\text{tg}\,\beta$? $[\sqrt{15}]$

133 Nel triangolo acutangolo ABC si ha $\text{sen}\, A\widehat{C}B = \frac{5}{13}$, $AC = 26$ cm e $BC = 8$ cm. Trova AB.
$[AB = 18{,}9 \text{ cm}]$

134 Un rombo ha i lati lunghi 10 cm e un angolo di 25°. Determina le lunghezze delle diagonali.
[4,3 cm; 19,5 cm]

135 Nel triangolo ABC la misura di AC è 4 e il coseno dell'angolo $\widehat{A}$ è $\frac{3}{4}$. Il punto D divide AB nei segmenti $\overline{AD} = 2$ e $\overline{DB} = 1$. Trova $\overline{CD}$, $\overline{CB}$ e la misura di CM, mediana relativa ad AB.
$\left[\overline{CD} = 2\sqrt{2}; \overline{CB} = \sqrt{7}; \overline{CM} = \frac{\sqrt{37}}{2}\right]$

136 In un parallelogramma due lati consecutivi misurano 4 e 20 e l'angolo fra essi compreso è $\alpha = \text{arcsen}\frac{4}{5}$. Calcola le misure dell'area e delle diagonali.
$[\text{area} = 64; 8\sqrt{5}; 16\sqrt{2}]$

La risoluzione dei triangoli qualunque

Sono noti un lato e due angoli

137 **ESERCIZIO GUIDA**

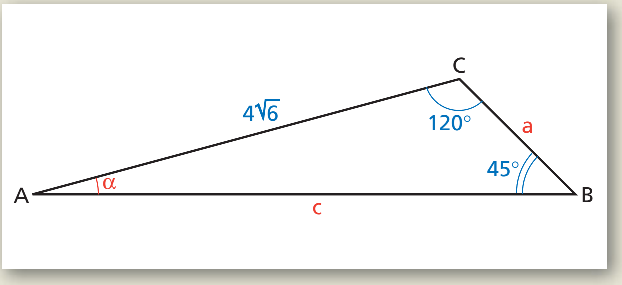
Risolviamo il triangolo *ABC*, sapendo che:

$$b = 4\sqrt{6}, \beta = 45°, \gamma = 120°.$$

Ricaviamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (45° + 120°) = 15°.$$

Applichiamo il teorema dei seni per calcolare c e a:



$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow c = \frac{b\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$c = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen}120°}{\operatorname{sen}45°} = \frac{4\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 12;$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \rightarrow a = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta};$$

$$a = \frac{4\sqrt{6}\operatorname{sen}15°}{\operatorname{sen}45°} = \frac{\cancel{4}\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\overset{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{6}}}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\cdot 2}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{2}}}} = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

138 $c = 12\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $\left[\beta = \frac{5}{12}\pi; a = 12\sqrt{2}; b = 6(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]$

139 $b = \sqrt{3}+1$, $\beta = 15°$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 45°; a = 4 + 2\sqrt{3}; c = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{2}]$

140 $a = 8\sqrt{6}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; b = 8\sqrt{3} - 8; c = 16\right]$

141 $c = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = \frac{7}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; a = 4\sqrt{3} - 4; b = 4\sqrt{6} - 4\sqrt{2}\right]$

142 $a = 28$, $\alpha = 30°$, $\beta = \arccos\frac{1}{3}$. $\left[\gamma \simeq 79°28'; b = \frac{112}{3}\sqrt{2}; c = \frac{28}{3}(2\sqrt{6}+1)\right]$

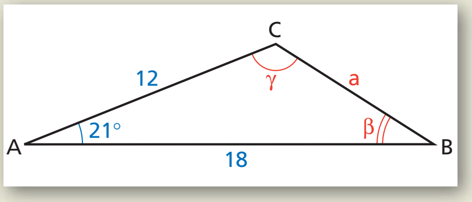
Sono noti due lati e l'angolo fra essi compreso

143 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo il triangolo *ABC*, sapendo che:

$$\mathbf{b = 12,\ c = 18,\ \alpha = 21°.}$$

Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$
$$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2\cdot 12\cdot 18\cos 21° \simeq 64{,}69;$$
$$a \simeq 8{,}04.$$

Ricaviamo β, applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos\beta \simeq \frac{8{,}04^2 + 18^2 - 12^2}{2 \cdot 8{,}04 \cdot 18} \simeq 0{,}85 \rightarrow \beta \simeq 32°.$$

Ricaviamo γ per differenza:

$$\gamma \simeq 180° - (21° + 32°) = 127°.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

144 $b = 14$, $c = 28$, $\alpha = 34°$. [$a \simeq 18{,}17$; $\beta \simeq 26°$; $\gamma \simeq 120°$]

145 $a = 15{,}3$, $b = 6{,}2$, $\gamma = 128°$. [$c \simeq 19{,}73$; $\alpha \simeq 38°$; $\beta \simeq 14°$]

146 $a = \sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$, $\beta = 60°$. [$b \simeq 7{,}94$; $\alpha \simeq 11°$; $\gamma \simeq 109°$]

147 $b = 4$, $c = 20$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. [$a \simeq 22{,}27$; $\beta \simeq 9°$; $\gamma \simeq 51°$]

148 $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $\gamma = 60°$. [$\alpha \simeq 50°$; $\beta \simeq 70°$; $c \simeq 7{,}82$]

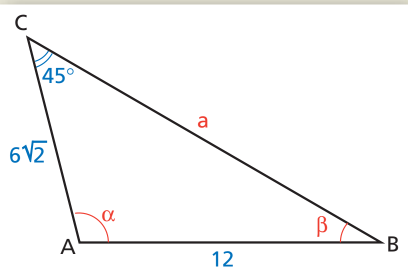
Sono noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi

149 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

a) $b = 6\sqrt{2}$, $c = 12$, $\gamma = 45°$;

b) $b = 4\sqrt{2}$, $c = 4\sqrt{6}$, $\beta = 30°$.



a) Ricaviamo β con il teorema dei seni:

$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta},$$

$$\frac{\cancel{12}^{\,2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{{}^{1}\cancel{6}\sqrt{2}}{\text{sen}\,\beta} \rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 = 30° \\ \beta_2 = 150° \end{cases}$$

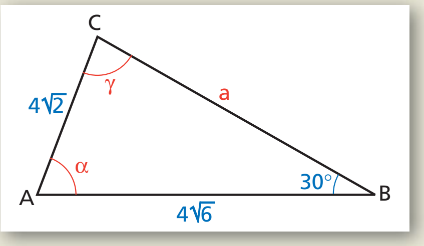
È accettabile solo il valore $\beta_1 = 30°$, in quanto per $\beta_2 = 150°$ si avrebbe $\beta + \gamma = 150° + 45° = 195° > 180°$.
Inoltre non sarebbe vero che ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore: $6\sqrt{2}$, che è minore di 12, sarebbe opposto a 150°, che è maggiore di 45°.
Determiniamo α per differenza:

$$\alpha = 180° - (30° + 45°) = 105°.$$

Troviamo a con il teorema dei seni:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} \rightarrow \frac{a}{\text{sen}\,105°} = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \rightarrow a \simeq 16{,}4.$$

b) Applichiamo il teorema dei seni:



$$\frac{c}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta},$$

$$\frac{4\sqrt{6}}{\text{sen}\,\gamma} = \frac{4\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} \to \text{sen}\,\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \begin{cases} \gamma_1 = 60° \\ \gamma_2 = 120° \end{cases}$$

Entrambe le soluzioni sono accettabili.

- Se $\gamma = 60° \to \alpha = 90°$,

$$\frac{a}{\text{sen}\,90°} = \frac{4\sqrt{2}}{\text{sen}\,30°} \to a = 8\sqrt{2}.$$

- Se $\gamma = 120° \to \alpha = 30°$, il triangolo è isoscele, quindi $a = 4\sqrt{2}$.

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

150 $a = 12\sqrt{2}$, $b = 8\sqrt{3}$, $\alpha = 60°$. $[\beta = 45°; \gamma = 75°; c = 12 + 4\sqrt{3}]$

151 $b = 6\sqrt{3}$, $c = 6\sqrt{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$. $\left[\alpha = \frac{5}{12}\pi; \gamma = \frac{\pi}{4}; a = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}\right]$

152 $a = 2\sqrt{2}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$, $\alpha = 45°$. $[\beta = 60°, \gamma = 75°, b = 2\sqrt{3} \ \vee \ \beta = 30°, \gamma = 105°, b = 2]$

153 $b = 7$, $c = 7\sqrt{3}$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 30°; \beta = 30°; a = 7]$

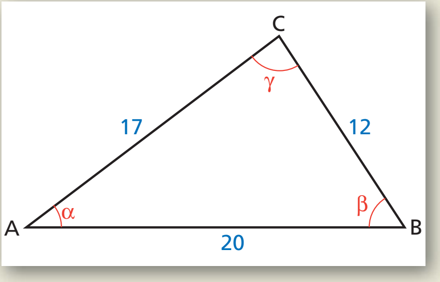
Sono noti i tre lati

154 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo un triangolo *ABC*, sapendo che:

$a = 12, b = 17, c = 20.$

Applichiamo più volte il teorema del coseno:



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{17^2 + 20^2 - 12^2}{2 \cdot 17 \cdot 20} \simeq 0,80 \to \alpha \simeq 36,72°;$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{12^2 + 20^2 - 17^2}{2 \cdot 12 \cdot 20} \simeq 0,53 \to \beta \simeq 57,91°;$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{12^2 + 17^2 - 20^2}{2 \cdot 12 \cdot 17} \simeq 0,08 \to \gamma \simeq 85,36°.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

155 $a = 4$, $b = 9$, $c = 12$. $[\alpha \simeq 15°; \beta \simeq 35°; \gamma \simeq 130°]$

156 $a = 20$, $b = 7$, $c = 14$. $[\alpha \simeq 142°; \beta \simeq 12°; \gamma \simeq 26°]$

157 $a = 52$, $b = 48$, $c = 36$. $[\alpha \simeq 75°; \beta \simeq 63°; \gamma \simeq 42°]$

158 $a = 15,\quad b = 26,\quad c = 40.$ $[\alpha \simeq 10°; \beta \simeq 17°; \gamma \simeq 153°]$

159 $a = 4,\quad b = 2\sqrt{6},\quad c = 2 + 2\sqrt{3}.$ $[45°; 60°; 75°]$

I problemi con i triangoli qualunque

160 In un triangolo un lato misura $9\sqrt{2}$. Un angolo a esso adiacente è di $\frac{\pi}{4}$ e l'altro ha tangente uguale a $-\frac{4}{3}$. Determina le misure degli altri elementi del triangolo. $\left[\text{angolo: } \arccos\frac{\sqrt{98}}{10}; \text{ lati: } 72, 45\sqrt{2}\right]$

161 In un triangolo l'area misura $\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \sqrt{3})$ e due angoli hanno ampiezze $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{3}$. Calcola le misure degli altri elementi del triangolo.
$\left[\text{angolo: } \frac{5}{12}\pi; \text{ lati: } 2, \sqrt{6}, \sqrt{3} + 1\right]$

162 In un triangolo le misure dell'area e di due lati sono rispettivamente $\frac{25}{2}(3 - \sqrt{3})$, 10 e $5(\sqrt{3} - 1)$. Trova gli altri elementi del triangolo.
$[60°, 81°, 39°, 8{,}76 \vee 120°, 45°, 15°, 5\sqrt{6}]$

163 In un triangolo isoscele il seno degli angoli alla base è uguale a $\frac{1}{5}$. Calcola il perimetro e l'area sapendo che la base misura 40.
$\left[10\left(\frac{5}{3}\sqrt{6} + 4\right), \frac{100}{3}\sqrt{6}\right]$

164 Calcola l'area di un rombo di lato 35 cm, sapendo che il coseno dell'angolo acuto è $\frac{7}{25}$. $[1176 \text{ cm}^2]$

165 Determina il perimetro e la diagonale minore di un parallelogramma, sapendo che la diagonale maggiore è lunga 20 cm e forma con un lato un angolo di 30°, mentre l'angolo a essa opposto è di 135°.
$[20(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) \text{ cm}, 20\sqrt{2 - \sqrt{3}} \text{ cm}]$

166 Calcola il perimetro e l'area di un trapezio isoscele, sapendo che la base maggiore è 90 cm, il lato obliquo 30 cm e l'angolo alla base ha il coseno uguale a $\frac{3}{5}$. $[204 \text{ cm}; 1728 \text{ cm}^2]$

167 In un parallelogramma la diagonale minore misura $2\sqrt{2}$ cm e forma con un lato un angolo di 30°. Sapendo che l'angolo opposto a tale diagonale è di 45°, calcola il perimetro del parallelogramma.
$[2(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2) \text{ cm}]$

Le applicazioni della trigonometria alla fisica

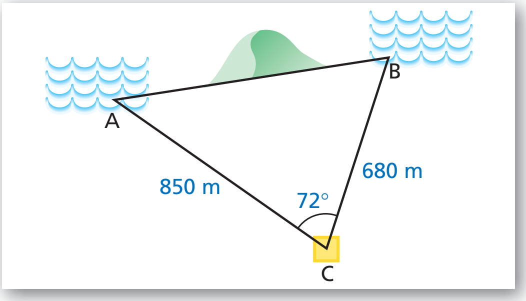
168 Calcola il lavoro che compie una forza costante di intensità pari a 25 N, inclinata di 60° rispetto a un piano orizzontale, agente su un corpo che viene spostato dalla forza su tale piano di 15 m. [187,5 J]

169 Calcola l'intensità e la direzione della risultante delle due forze di intensità $F' = 8$ N, $F'' = 10$ N applicate nel punto A e che formano tra loro un angolo di 30°. [17,39 N; 16° 42′ 19″ risp. a $\vec{F'}$]

170 Una massa puntiforme di 0,5 kg è appesa a un filo verticale di massa trascurabile. Una forza $\vec{F}$ orizzontale di modulo pari a 2 N è applicata alla massa e la tiene in equilibrio in una posizione in cui il filo forma un angolo α con la verticale. Trova l'ampiezza di α. [22° 12′ 13″]

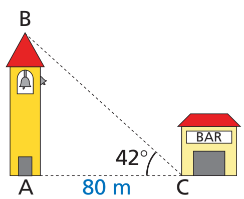
Altre applicazioni della trigonometria alla realtà

171 Calcola la distanza fra due laghi separati da una collina, sapendo che un monastero dista dai due laghi rispettivamente 850 m e 680 m. Inoltre, le direzioni in cui dal monastero si vedono i due laghi formano un angolo di 72°. [909,77 m]



172 Due case, A e B, sono separate da un fiume. Una torre T è posta dalla stessa parte di B, a una distanza da B di 375 m. L'angolo $B\widehat{T}A$ è di 60°; l'angolo $A\widehat{B}T$ è di 75°. Calcola la distanza fra le due case. [459,28 m]

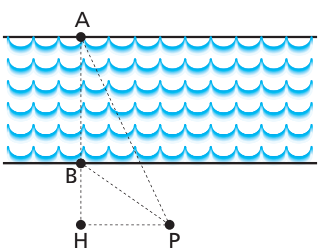
173 Calcola l'altezza di un campanile, sapendo che da un bar distante 80 metri da esso si vede la sua cima secondo un angolo di 42°. [$\simeq$ 72 m]



174 Un geometra deve misurare la larghezza di un canale. Dopo aver individuato un punto di riferimento A sulla sponda opposta alla sua, pianta due paletti: uno, sull'argine, nella posizione B e l'altro nella posizione H in modo che la retta ABH risulti perpendicolare alle sponde (figura a lato). Dalla posizione P, tale che $P\widehat{H}A = 90°$, misura gli angoli $H\widehat{P}B$, $H\widehat{P}A$ e la distanza PH:

$$H\widehat{P}B = 35°;\ H\widehat{P}A = 65°;\ PH = 20\ \text{m}.$$

Qual è la larghezza AB del canale? [28,89 m]



175 Una torre ha la sezione quadrata di area $s = 64\ \text{m}^2$ ed è inclinata su un lato di 4° 45′ 9″ rispetto alla verticale. Il suo baricentro si trova a 25,6 m da terra al centro della sezione della torre. La verticale passante per il baricentro cade dentro la base della torre? [sì, a 2,13 m dal centro]

176 Una piazza ha la forma di un quadrilatero convesso i cui angoli misurano: $\widehat{A} = 70°$, $\widehat{B} = 130°$, $\widehat{C} = 40°$, $\widehat{D} = 120°$. Se il lato AB è lungo 40 m e BC 90 m, quanto misura la superficie della piazza? [3388,26 m^2]

RIEPILOGO La trigonometria

177 Calcola perimetro e area di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa è lunga 3 cm e l'ampiezza di un angolo è di 30°. [$2p = 7{,}1\ \text{cm};\ S = 1{,}9\ \text{cm}^2$]

178 Determina perimetro e area di un triangolo rettangolo di cui un cateto è lungo 4 cm e il suo angolo adiacente ha ampiezza 50°. [$2p = 15\ \text{cm};\ S = 9{,}6\ \text{cm}^2$]

179 Sapendo che l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 5 cm e 4 cm, trova l'ampiezza degli angoli acuti. [$\alpha = 53{,}1°;\ \beta = 36{,}9°$]

180 In un triangolo isoscele la somma degli angoli alla base vale 80° e la lunghezza del lato obliquo è 5 cm. Calcola perimetro e area del triangolo. [$2p = 17,7$ cm; $S = 12,3$ cm^2]

181 In un rettangolo la diagonale, che è lunga 4 cm, divide l'angolo retto in due angoli in modo che uno di essi sia uguale a 20°. Determina perimetro e area del rettangolo. [$2p = 10,4$ cm; $S = 5,3$ cm^2]

182 In un triangolo ABC l'altezza CH relativa al lato AB è tale per cui la lunghezza di AH è 8 cm e le ampiezze degli angoli $A\widehat{C}H$ e $B\widehat{C}H$ sono rispettivamente 20° e 30°. Calcola perimetro e area del triangolo. [$2p = 69,5$ cm; $S = 227,7$ cm^2]

183 In un trapezio isoscele la diagonale forma un angolo retto con il lato obliquo, la cui lunghezza è 8 cm, e la semidifferenza delle basi vale 2 cm. Trova perimetro e area del trapezio. [$2p = 76$ cm; $S = 232,4$ cm^2]

184 L'area di un rombo è 48 cm^2 e una diagonale è lunga 8 cm. Determina le ampiezze degli angoli interni del rombo. [$\alpha = 67,4°$; $\beta = 112,6°$]

185 Un triangolo con un angolo di 40° è inscritto in una semicirconferenza di raggio 5 cm. Calcola perimetro e area del triangolo. [$2p = 24,1$ cm; $S = 24,6$ cm^2]

186 Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo lungo 3 cm e forma un angolo di 30° con la base maggiore, mentre la sua diagonale minore forma un angolo di 40° con l'altezza. Trova il perimetro e l'area del trapezio. [$2p = 9,7$ cm; $S = 3,9$ cm^2]

187 Inscrivi un triangolo ABC in una semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 4a$ in modo che l'angolo in B risulti maggiore dell'angolo in A. Traccia il segmento OH perpendicolare al diametro ($H \in AC$). Determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{B}$ in modo che l'area del rettangolo di lati OH e AC sia uguale a $4a^2$. [60°]

188 Una circonferenza ha il diametro $\overline{AB} = 60$. La corda AC misura 40 e il suo prolungamento incontra in T la tangente alla circonferenza condotta per il punto B. Calcola la lunghezza del segmento BT. [$30\sqrt{5}$]

189 Nel triangolo LMN la bisettrice NP è lunga 78 cm, l'ampiezza dell'angolo $L\widehat{M}N$ è 24° e quella dell'angolo $L\widehat{N}M$ è 54°. Risolvi il triangolo. [$\widehat{L} = 102°$; $MN \simeq 149,03$ cm; $ML \simeq 123,26$ cm; $NL \simeq 61,97$ cm]

190 Nel triangolo ABC la bisettrice dell'angolo in C incontra il lato AB nel punto P tale che $PB = 70$ cm. Sapendo che $A\widehat{B}C = 40°$ e $A\widehat{C}B = 80°$, calcola l'area del triangolo. [4203,61 cm^2]

191 In un triangolo ABC conosci il lato $AB = 35$ cm, l'angolo $A\widehat{B}C = 45°$ e la mediana $AM = 28$ cm. Calcola l'area e il perimetro del triangolo. [1ª soluzione: $S \simeq 936,6$ cm^2; $2p \simeq 167,3$ cm; 2ª soluzione: $S \simeq 288,4$ cm^2; $2p \simeq 83,1$ cm]

192 Nel triangolo ABC i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente 42 cm e 78 cm; la tangente dell'angolo $B\widehat{A}C$ è $-\frac{3}{2}$. Determina gli angoli, il terzo lato del triangolo e la mediana BN. [$\simeq 123,7°$; $\simeq 29,7°$; $\simeq 26,6°$; 46,44 cm; 58,18 cm]

193 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa è lunga 20 dm e un angolo acuto ha ampiezza 27°. Calcola le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa. [15,88 dm; 4,12 dm]

194 Il trapezio scaleno $ABCD$ è circoscritto a una circonferenza; gli angoli alla base maggiore sono $\widehat{A} = 75°$, $\widehat{B} = 45°$ e l'area è $S = 32\sqrt{6}$. Calcola il raggio della circonferenza. [4]

195 Un trapezio rettangolo $ABCD$ circoscritto a una circonferenza ha gli angoli retti in A e in D e l'angolo acuto in B è di 54°. Sapendo che il perimetro è $20\sqrt{5}$, calcola l'area e la lunghezza del lato obliquo BC. [$S = 50\sqrt{5}$; $BC = 10(\sqrt{5} - 1)$]

196 Dimostra che in ogni triangolo rettangolo la tangente di un angolo acuto è uguale a $\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}$, dove a_1 e a_2 sono le misure delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
Determina le misure dei lati del triangolo quando $a_1 = 12$ cm e $a_2 = 4$ cm. [16 cm, $8\sqrt{3}$ cm, 8 cm]

197 Per calcolare l'area di un appezzamento di terreno a forma di quadrilatero convesso un agronomo ne misura i lati trovando: $AB = 58$ m, $BC = 53$ m, $CD = 104$ m e $DDA = 82$ m. Misura poi l'angolo $D\widehat{A}B = 112°\,42'$. Qual è l'area del terreno? [4949,59 m^2]

198 In una zona montuosa un topografo deve calcolare l'altezza di una cima V rispetto alla sua postazione P. Per base prende la distanza $PQ = 483$ m dal punto noto Q situato sulla cima di un'altra montagna. Misura gli angoli $P\widehat{Q}V = 54°\,48'$, $Q\widehat{P}V = 50°\,39'$ e l'angolo $\alpha = 68°\,24'$ che la direzione PV forma col piano orizzontale. Quanto è il dislivello fra P e V? [381 m]

199 Due edifici sono posti uno di fronte all'altro alla distanza di 20 m. Un osservatore A sta sul cornicione (figura a lato) dell'edificio più basso e vede il cornicione C di quello più alto sotto l'angolo $\alpha = 20°$ rispetto al piano orizzontale. L'angolo sotto cui A vede la base B dello stesso edificio è $\beta = 35°$. Trova le altezze dei due palazzi. [14 m; 21,28 m]