CAPITOLO β

Introduzione alla probabilità

Il dilemma di Monty Hall

In un popolare show televisivo americano il presentatore mostra al concorrente tre porte chiuse. Dietro a una di esse si cela il premio in palio, un'automobile; le altre due nascondono una capra. Il giocatore sceglie una delle tre porte, poi il conduttore, che sa qual è quella vincente, ne apre un'altra mostrando una capra. A questo punto il concorrente deve fare la scelta definitiva…

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

La risposta a pag. β19

1. Gli eventi e la probabilità

Eventi certi, impossibili, aleatori

Ci sono avvenimenti che accadono con certezza, mentre altri sicuramente non possono mai verificarsi. Per esempio, se una scatola contiene soltanto palline nere, estraendone una a caso siamo sicuri che è nera, mentre è impossibile estrarre una pallina bianca.
Chiamiamo gli avvenimenti del primo tipo **eventi certi** e quelli del secondo tipo **eventi impossibili**.

Ci sono anche eventi che possono accadere, ma senza certezza. Se la scatola contiene sia palline bianche sia palline nere, l'estrazione di una pallina bianca è un evento possibile ma non certo, così come l'estrazione di una pallina nera. In altre parole, non possiamo prevedere il colore della pallina estratta, perché l'estrazione è *casuale*.

Un fatto che può accadere o non accadere in modo casuale è detto **evento aleatorio**. Per esempio, essere interrogati in matematica nell'arco di una settimana di lezioni è un evento aleatorio.
È opportuno osservare che uno stesso evento può essere certo, aleatorio o impossibile a seconda del contesto in cui viene considerato.

Aleatorio deriva dal latino *ālea*, che significa «gioco dei dadi». Il lancio di un dado è il classico esempio di evento aleatorio.

ESEMPIO L'evento «Susy vince alla lotteria» è certo se Susy compra tutti i biglietti della lotteria, è impossibile se non ne compra nemmeno uno, è aleatorio se ne compra uno o più di uno, ma non tutti.

La probabilità di un evento

Il fatto che certi eventi siano aleatori ha portato l'uomo a formulare scommesse sul loro accadere. Il concetto di probabilità è nato proprio per effetto dei giochi d'azzardo!

Consideriamo il seguente gioco. Hai di fronte due mazzi di carte, A e B, così composti: A contiene 10 carte con figure e 3 carte senza figure; B è formato da 12 carte con figure e 6 senza figure. Devi scegliere una carta da uno dei due mazzi: vinci se scegli una figura. Da quale mazzo conviene scegliere la carta?

Il gioco è interpretabile come un **esperimento** che ha carattere aleatorio, in quanto il **risultato** non dipende da una legge precisa ma, di volta in volta, è imprevedibile.

Se le carte non sono truccate, le estrazioni di una carta dai due mazzi sono tutte **ugualmente possibili**, poiché le carte sono coperte e non possiamo distinguerle l'una dall'altra.

Chiamiamo **casi possibili** tutti i risultati che possono verificarsi. Per il mazzo A i casi possibili sono 13, mentre per il mazzo B sono 18.

Chiamiamo **casi favorevoli** quelli in cui si verifica l'evento che fa vincere. Poiché per vincere bisogna estrarre una figura, i casi favorevoli sono tanti quante le carte con figure: 10 per il mazzo A e 12 per il mazzo B.

Consideriamo il rapporto fra i casi favorevoli e quelli possibili:

$$\text{mazzo } A\text{: } \frac{10}{13}; \qquad \text{mazzo } B\text{: } \frac{12}{18}.$$

Poiché $\frac{10}{13}$ è maggiore di $\frac{12}{18}$, conviene scegliere il mazzo A!

Il quoziente $\dfrac{\text{numero dei casi favorevoli}}{\text{numero dei casi possibili}}$ fornisce una stima sulla possibilità che si verifichi un determinato evento e viene chiamato **probabilità** di quell'evento.

DEFINIZIONE

Probabilità

La probabilità di un evento è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli f e quello dei casi possibili u, quando essi sono tutti ugualmente possibili.

probabilità di E

numero dei casi favorevoli

$$p(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi possibili

D'ora in poi indicheremo un evento con una lettera maiuscola, per esempio E, e la probabilità che l'evento si verifichi con il simbolo $p(E)$.

ESEMPIO Nel lancio di un dado a sei facce consideriamo i seguenti eventi:

E_1 = «esce il 4»; E_2 = «esce un numero dispari»;

E_3 = «esce un numero maggiore di 2».

Calcoliamo la probabilità di ciascun evento nell'ipotesi che il dado non sia truccato:

$p(E_1) = \frac{1}{6}$ (casi possibili 6, casi favorevoli 1);

$p(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (casi favorevoli: numeri 1, 3, 5);

$p(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (casi favorevoli: numeri 3, 4, 5, 6).

I valori della probabilità

Abbiamo detto che u rappresenta il numero dei casi possibili e f il numero dei casi favorevoli.

- Se un evento è impossibile, il numero dei casi favorevoli è 0; quindi

$$p = \frac{f}{u} = \frac{0}{u} = 0.$$

  Pertanto **la probabilità di un evento impossibile è 0**.

- Se un evento è certo, il numero dei casi favorevoli è uguale a quello dei casi possibili; quindi

$$p = \frac{f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

  La probabilità di un evento certo è 1.

- Per gli eventi aleatori, il numero f dei casi favorevoli è compreso fra 0 e u: $0 < f < u$. Dividendo tutti i termini della doppia disuguaglianza per u, si ottiene:

$$\frac{0}{u} < \frac{f}{u} < \frac{u}{u}, \qquad \text{ossia} \qquad 0 < p < 1.$$

  Pertanto **la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso fra 0 e 1**.

In generale, considerando assieme i tre casi, possiamo dire che la probabilità di un evento è compresa fra 0 e 1, estremi inclusi: $\mathbf{0 \leq p \leq 1}$.

Spesso il valore della probabilità viene espresso in termini percentuali. Per esempio, un evento certo si verificherà al 100%.

Gli eventi e gli insiemi

Consideriamo il lancio di un dado e l'evento «esce un numero dispari». Per descrivere la situazione possiamo utilizzare il linguaggio degli insiemi. I casi possibili sono 6, quindi l'insieme universo è

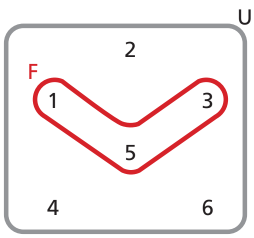
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

I casi favorevoli sono tre; infatti l'evento è verificato quando escono 1, 3, oppure 5. Indichiamo con F l'insieme dei casi favorevoli:

$$F = \{1, 3, 5\}.$$

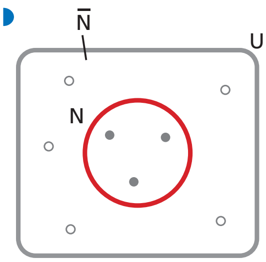
Poiché F è un sottoinsieme di U, il numero degli elementi di F è sempre minore o uguale al numero degli elementi di U. Se l'insieme F non ha elementi, cioè $F = \emptyset$, allora l'evento è impossibile; se F coincide con l'insieme universo U, allora l'evento è certo.

L'insieme U di tutti i casi possibili si chiama **insieme universo**.



L'evento contrario e la sua probabilità

Dato un evento E, il suo **evento contrario** è quell'evento che si verifica quando e solo quando non si verifica E, e lo indichiamo con il simbolo $\overline{E}$.



Se N è l'insieme dei casi favorevoli all'evento E, i casi favorevoli all'evento contrario $\overline{E}$ appartengono al complementare $\overline{N}$ di N rispetto a U, ossia all'insieme degli elementi di U che non appartengono a N.

ESEMPIO

Nel lancio di un dado, l'evento contrario dell'uscita di un numero pari è l'uscita di un numero dispari.

TEOREMA

La somma della probabilità di un evento e di quella del suo evento contrario è 1:

$$p(E) + p(\overline{E}) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE

Se f è il numero di casi favorevoli dell'evento E e u il numero dei casi possibili, il numero dei casi favorevoli dell'evento contrario è $u - f$, quindi:

$$p(E) + p(\overline{E}) = \frac{f}{u} + \frac{u-f}{u} = \frac{f+u-f}{u} = \frac{u}{u} = 1.$$

2. La probabilità della somma logica di eventi

L'evento unione

Consideriamo 12 dischetti numerati da 1 a 12 e gli eventi:

E_1 = «esce un numero pari»;

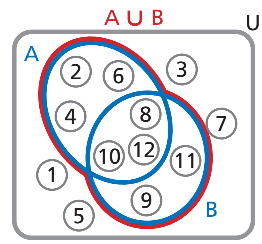
E_2 = «esce un numero maggiore di 7».

L'insieme dei casi favorevoli a E_1 è $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
L'insieme dei casi favorevoli a E_2 è $B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$.
L'evento

E = «esce un numero pari **o** maggiore di 7»

è formato dai due eventi E_1 ed E_2, uniti dal connettivo «o».
Questo evento si verifica se si verifica E_1 oppure E_2, perciò è detto **evento unione** o **somma logica** di E_1 ed E_2.
L'evento E ha come casi favorevoli sia quelli dell'insieme A sia quelli dell'insieme B.
L'insieme che lo rappresenta è quindi l'unione dei due insiemi:

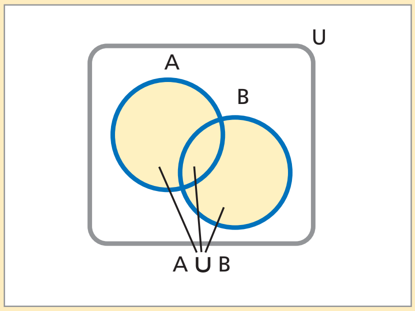
$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$



DEFINIZIONE

Evento unione

Dati gli eventi E_1, E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento unione, che indichiamo con $E_1 \cup E_2$, è quell'evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.



Come nell'esempio precedente, nella figura della definizione, A è l'insieme dei casi favorevoli a E_1, B quello dei casi favorevoli a E_2. Allora $A \cup B$ è l'insieme dei casi favorevoli a $E_1 \cup E_2$.

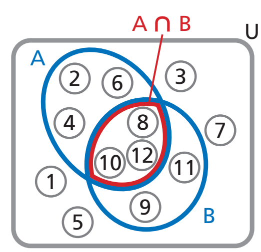
L'evento intersezione

Consideriamo ancora fra i 12 dischetti numerati l'evento

E = «esce un numero pari **e** maggiore di 7»,

formato dai due eventi semplici E_1 ed E_2, uniti dal connettivo «e». Questo evento si verifica se si verificano entrambi gli eventi E_1 ed E_2, perciò è detto **evento intersezione** o **prodotto logico** di E_1 ed E_2. Esso ha come casi favorevoli quelli comuni all'insieme A e all'insieme B. L'insieme che lo rappresenta è l'insieme intersezione:

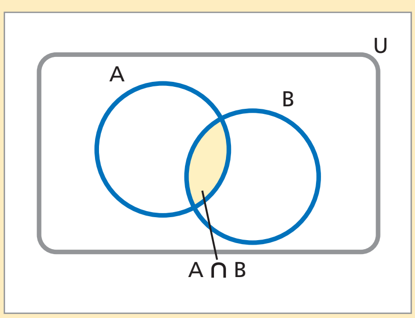
$$A \cap B = \{8, 10, 12\}.$$



DEFINIZIONE

Evento intersezione

Dati gli eventi E_1 ed E_2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento intersezione, che indichiamo con $E_1 \cap E_2$, è quell'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente gli eventi dati.



Le notazioni sono le stesse della definizione precedente. Quindi $A \cap B$ è l'insieme dei casi favorevoli a $E_1 \cap E_2$.

Osserva che, nonostante la notazione insiemistica, $E_1 \cup E_2$ ed $E_1 \cap E_2$ non sono unione e intersezione di insiemi.

Gli eventi compatibili e gli eventi incompatibili

Facendo sempre riferimento all'esempio dei 12 dischetti numerati, osserviamo che gli eventi E_1 ed E_2 possono verificarsi *contemporaneamente*: per esempio, estraendo il dischetto col numero 10, otteniamo sia un numero pari sia un numero maggiore di 7. In questo caso si dice che gli eventi sono *compatibili*.

Consideriamo ora gli eventi:

E_3 = «esce un multiplo di 5»;

E_4 = «esce un multiplo di 3».

Questi due eventi, invece, non possono verificarsi contemporaneamente, e sono chiamati *eventi incompatibili*.

Se i dischetti fossero 20, i due eventi resterebbero incompatibili?

In generale due eventi, relativi allo stesso insieme universo, si dicono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro. In caso contrario si dicono **compatibili**.

Il teorema della somma per eventi incompatibili

Riprendiamo l'esempio dei 12 dischetti numerati e consideriamo i due eventi incompatibili

E_3 = «esce un multiplo di 5»;

E_4 = «esce un multiplo di 3».

Cerchiamo la probabilità dell'evento unione

E = «esce un multiplo di 5 o di 3».

I casi favorevoli di E_3 sono 2, quelli di E_4 sono 4. Pertanto i casi favorevoli di E sono 6, mentre i casi possibili sono 12. La probabilità dell'evento E è uguale alla somma delle due probabilità:

$$p(E) = \frac{6}{12} = \frac{2}{12} + \frac{4}{12} = p(E_3) + p(E_4).$$

Vale il seguente teorema.

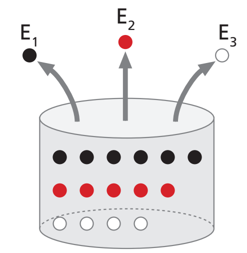
TEOREMA

Teorema della somma per eventi incompatibili

Se due eventi, E_1 ed E_2, sono incompatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità.

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2).$$

ESEMPIO Un'urna contiene 6 gettoni neri, 5 rossi e 4 bianchi. Estraendo un gettone a caso si può verificare uno dei seguenti eventi:



$E_1 =$ «estrazione di un gettone nero»;

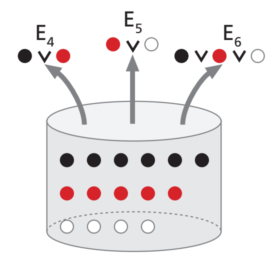
$E_2 =$ «estrazione di un gettone rosso»;

$E_3 =$ «estrazione di un gettone bianco».

Le probabilità sono: $p(E_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $p(E_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $p(E_3) = \frac{4}{15}$.

Questi eventi sono fra loro incompatibili, perché se uno si verifica, non si verifica contemporaneamente nessuno degli altri due.

Calcoliamo, applicando il teorema, la probabilità degli eventi seguenti:



$E_4 =$ «estrazione di un gettone nero o rosso»;

$E_5 =$ «estrazione di un gettone rosso o bianco»;

$E_6 =$ «estrazione di un gettone nero o rosso o bianco».

$$p(E_4) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15};$$

$$p(E_5) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$p(E_6) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{15}{15} = 1.$$

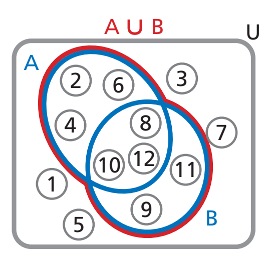
Il teorema della somma per eventi compatibili

Consideriamo nuovamente i 12 dischi e i seguenti eventi compatibili:

$E_1 =$ «esce un numero pari»;

$E_2 =$ «esce un numero maggiore di 7».

I casi favorevoli di E_1 sono 6, quelli di E_2 sono 5.
I casi favorevoli dell'evento composto



$E =$ «esce un numero pari o maggiore di 7»

non sono però 11, ma solo 8. Ciò è dovuto al fatto che vi sono casi favorevoli a entrambi gli eventi. Se sommiamo i casi favorevoli di E_1 e quelli di E_2, vengono considerati per due volte i casi di $E_1 \cap E_2$, mentre nell'unione essi devono essere contati una volta sola. Possiamo concludere che i casi favorevoli di $E_1 \cup E_2$ si possono ottenere dalla somma di quelli di E_1 e di E_2, sottraendo quelli di $E_1 \cap E_2$: $(6 + 5) - 3 = 8$.
Dividendo per il numero di casi possibili otteniamo:

$$p(E_1 \cup E_2) = \frac{(6+5)-3}{12} = \frac{6}{12} + \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} =$$
$$= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

In generale, vale il seguente teorema.

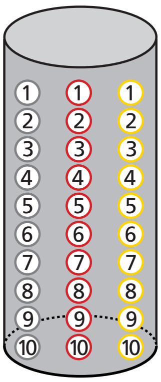
TEOREMA

Teorema della somma per eventi compatibili

Se due eventi E_1 ed E_2 sono compatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità, diminuita della probabilità del loro evento intersezione.

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Il teorema vale anche nel caso di eventi incompatibili. Infatti se E_1 ed E_2 sono incompatibili, l'insieme dei risultati favorevoli a $E_1 \cap E_2$ è vuoto, cioè il numero di casi favorevoli è 0. Pertanto anche la probabilità è 0 e si riottiene la relazione già studiata $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.



ESEMPIO Dentro un'urna vi sono 30 palline: 10 bianche numerate da 1 a 10, 10 rosse e 10 gialle numerate allo stesso modo.
Calcoliamo la probabilità che, estraendone una a caso, venga estratta una pallina gialla o pari.

Il numero totale di palline è 30. La probabilità che venga estratta una gialla è $p(G) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
Le palline con numero pari sono 5 per ogni colore, quindi 15. La probabilità che venga estratto un numero pari è $p(P) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
Gli eventi sono compatibili; i casi favorevoli a entrambi gli eventi (pallina gialla e pari) sono 5. La probabilità dell'evento cercato è

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}.$$

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

La probabilità condizionata

Come si determina la probabilità di un evento che dipende da un altro evento?
Consideriamo di nuovo il sacchetto con i gettoni numerati da 1 a 12 e i due eventi:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_2 = «esce un numero minore di 9».

L'insieme universo è dato da $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, quello dei casi favorevoli a E_1 è $A = \{3, 6, 9, 12\}$, quello dei casi favorevoli a E_2 è $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

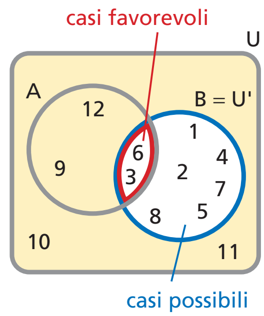
La probabilità di E_1 è: $p(E_1) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
Supponiamo che un amico estragga un numero e, senza farcelo vedere, ci dica che esso è minore di 9, ossia che si è verificato l'evento E_2.

Cosa possiamo dire, ora, della probabilità che il numero estratto sia multiplo di 3, ossia di $p(E_1)$?
L'evento E_1 è condizionato dall'evento E_2: il fatto che E_2 si sia verificato ci dà alcune informazioni in più sulla possibilità che si verifichi E_1.
Indichiamo la probabilità di E_1, calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato, con il simbolo $p(E_1 | E_2)$.

Chiamiamo $\boldsymbol{p(E_1 | E_2)}$ **probabilità di** $\boldsymbol{E_1}$ **condizionata a** $\boldsymbol{E_2}$.

Per calcolare la probabilità condizionata teniamo presente che:

- poiché supponiamo che l'evento E_2 si sia verificato, l'insieme universo U' per $E_1|E_2$ è dato dai risultati favorevoli a E_2, cioè $U' = B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;
- i casi favorevoli per $E_1|E_2$ devono essere ricercati solo all'interno del nuovo insieme universo; quindi sono dati dall'intersezione tra i casi favorevoli per E_1 (insieme A) e quelli per E_2 (insieme B).



L'insieme F dei casi favorevoli è dato da $F = A \cap B = \{3, 6\}$.
Dunque $p(E_1|E_2)$ è data dal rapporto tra il numero di elementi di F e il numero di elementi di U':

$$p(E_1|E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

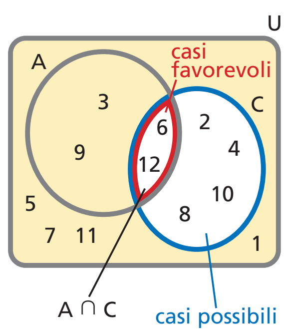
La probabilità di E_1 è $\frac{1}{3}$, mentre quella di E_1 condizionata a E_2 è $\frac{1}{4}$, quindi:

$$p(E_1) \neq p(E_1|E_2).$$

Consideriamo ora un altro caso con i due eventi:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_3 = «esce un numero pari».



Supponiamo che il nostro amico ci dica che ha estratto un numero pari, ossia che si è verificato l'evento E_3 rappresentato dall'insieme $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.
Se si è verificato l'evento E_3, i casi possibili che il numero uscito sia multiplo di 3, cioè dell'evento E_1 condizionato dall'evento E_3, sono 6 e quelli favorevoli 2, cioè quelli dell'insieme $A \cap C = \{6, 12\}$.
La probabilità di E_1 condizionata a E_3 è:

$$p(E_1|E_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

A differenza del primo caso, in questo esempio le due probabilità sono uguali, $p(E_1) = p(E_1|E_3)$.

Due eventi, E_1 ed E_2, si dicono **dipendenti** se $p(E_1)$ è diversa dalla probabilità condizionata $p(E_1|E_2)$.
Gli eventi E_1 ed E_2 si dicono **indipendenti** se $p(E_1)$ è uguale alla probabilità condizionata $p(E_1|E_2)$.

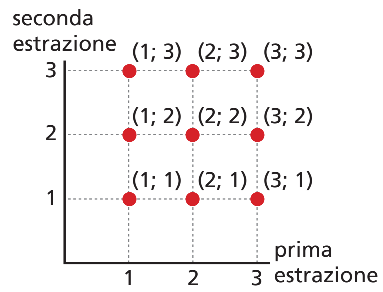
Si può dimostrare che la relazione di indipendenza è simmetrica, ossia che se l'evento E_1 è indipendente dall'evento E_2, cioè $p(E_1) = p(E_1|E_2)$, allora anche E_2 è indipendente da E_1, cioè $p(E_2) = p(E_2|E_1)$.

Le definizioni si interpretano come segue: due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno non modifica la probabilità che anche l'altro si verifichi.

ESEMPIO Lanciamo contemporaneamente una moneta e un dado, e consideriamo i due eventi «esce testa» ed «esce il numero 2».
Fra i due eventi non c'è nessun legame, ognuno si può verificare indipendentemente dall'altro. In altri termini, la probabilità che esca testa sulla moneta non influenza la probabilità che esca il numero 2 sul dado. Questi sono eventi indipendenti.

Il teorema del prodotto per eventi indipendenti

Consideriamo un sacchetto che contiene tre gettoni con i numeri 1, 2, 3. Dal sacchetto estraiamo un gettone e poi un secondo gettone, *dopo che il primo è stato rimesso nel sacchetto*.
Qual è la probabilità che in due estrazioni successive vengano estratti due numeri dispari?
I casi possibili si possono ottenere mediante il diagramma cartesiano della figura 1. Per esempio, la coppia (3; 2) indica che è stato estratto prima il gettone 3, poi il gettone 2.



▶ **Figura 1** In un sacchetto ci sono tre gettoni con scritti i numeri 1, 2 e 3. I casi possibili nelle estrazioni successive di un gettone e di un secondo gettone sono 9 e possono essere rappresentati dalle coppie del prodotto cartesiano.

L'evento composto

E = «escono due numeri dispari»

può essere visto come l'evento intersezione dei due eventi semplici:

E_1 = «il primo numero è dispari»;

E_2 = «il secondo numero è dispari».

E_1 ed E_2 sono indipendenti; infatti, dopo la prima estrazione, il gettone è rimesso nel sacchetto e la situazione iniziale viene ripristinata.
Poiché i numeri dispari sono 2 e i casi possibili 3, le probabilità di E_1 ed E_2 sono:

$$p(E_1) = \frac{2}{3}, \qquad p(E_2) = \frac{2}{3}.$$

I casi favorevoli all'evento composto E corrispondono alle coppie (1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3); quindi sono 4. I casi possibili, come è già stato illustrato nella figura 1, sono 9, quindi:

$$p(E) = \frac{4}{9}.$$

Osserviamo che $\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$, ossia la probabilità dell'evento E, che è l'intersezione di E_1 ed E_2, è data dal prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2.
In generale vale il seguente teorema.

TEOREMA

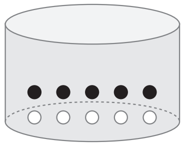
Teorema del prodotto per eventi indipendenti

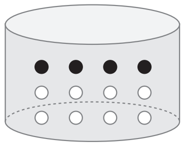
Se due eventi, E_1 ed E_2, sono indipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto delle loro probabilità.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2).$$

ESEMPIO Due urne contengono:

- urna 1: 5 palline bianche e 5 nere;
- urna 2: 8 palline bianche e 4 nere.





Viene estratta una pallina da ogni urna. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?
L'evento «vengono estratte due palline nere» è composto dai due eventi semplici:

E_1 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 1»;

E_2 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 2».

Si ha: $p(E_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $p(E_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Gli eventi sono indipendenti; quindi la probabilità dell'evento intersezione è:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Il teorema del prodotto per eventi dipendenti

Consideriamo ancora il sacchetto con tre gettoni che hanno i numeri 1, 2, 3 e gli eventi

E_1 = «il primo estratto è dispari»,

E_2 = «il secondo estratto è dispari»,

ma supponiamo che, *dopo la prima estrazione, il gettone non venga rimesso nel sacchetto*.
Gli eventi sono dipendenti: infatti, la probabilità del secondo evento non è più quella di prima, perché la composizione iniziale del sacchetto risulta modificata.
I due eventi semplici non hanno lo stesso insieme universo: nella prima estrazione U contiene 3 elementi, nella seconda ne contiene solo 2.

Abbiamo già visto che

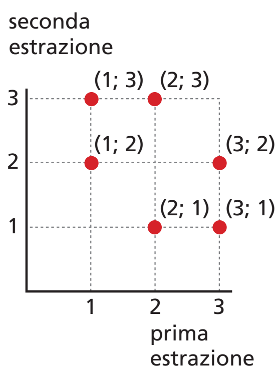
$$p(E_1) = p(E_2) = \frac{2}{3},$$

perché i numeri dispari sono 2 su 3.
Calcoliamo la probabilità condizionata $p(E_2|E_1)$, ossia la probabilità che si abbia E_2 supposto che sia avvenuto E_1.
Se si è verificato E_1, significa che è stato estratto un numero dispari; quindi nel sacchetto rimangono due gettoni: il 2 e l'altro numero dispari. La probabilità di estrarre un altro numero dispari è:

$$p(E_2|E_1) = \frac{1}{2}.$$

Calcoliamo, ora, la probabilità dell'evento composto:

E = «i numeri estratti sono entrambi dispari».



Se il primo gettone non è rimesso nel sacchetto, le coppie (1; 1), (2; 2), (3; 3) non sono possibili.

Poiché la prima volta si estrae un gettone fra tre e la seconda uno fra i due rimanenti, i casi possibili possono essere schematizzati con il diagramma a fianco.
I casi possibili sono 6. I casi favorevoli sono 2, corrispondenti alle coppie (1; 3) e (3; 1). Quindi:

$$p(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Osserviamo che la probabilità di E si ottiene moltiplicando la probabilità di E_1, $p(E_1)$, per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, $p(E_2|E_1)$:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}.$$

In generale vale il seguente teorema.

TEOREMA

Teorema del prodotto per eventi dipendenti

Se due eventi, E_1 ed E_2, sono dipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1.

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1).$$

ESEMPIO In un'urna ci sono 8 palline bianche e 4 nere (figura *a* nella pagina seguente). Qual è la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche?
Si può pensare di estrarre prima una pallina e poi, senza rimettere la prima nell'urna, una seconda pallina.

La probabilità che la prima sia bianca è:

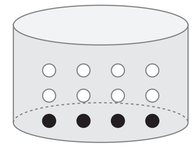
$$p_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

La probabilità che la seconda sia bianca, condizionata dal fatto che la prima estratta sia bianca, si ottiene pensando a un'urna che contiene 7 palline bianche e 4 nere (figura *b*):

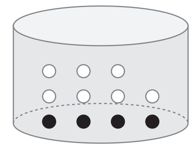
$$p_2 = \frac{7}{11}.$$

La probabilità che entrambe le palline siano bianche è:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$



a. Situazione iniziale.



b. Situazione dopo la prima estrazione.

Il teorema vale anche nel caso di eventi indipendenti. Infatti, se E_1 ed E_2 sono indipendenti,

$$p(E_2|E_1) = p(E_2).$$

Sostituendo nella relazione

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2|E_1),$$

otteniamo

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2),$$

che è la relazione già dimostrata in precedenza.

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Positivo al test!

Nel sito: ▶ Scheda di lavoro

Per avere informazioni sulla diffusione di una malattia, si fanno test diagnostici non invasivi e poco costosi, ottenendo una prima informazione, da sottoporre a verifiche più approfondite nei casi di esito positivo.
Supponiamo che si sappia che la probabilità che il test funzioni correttamente nel caso di individui malati (ossia risulti positivo) sia del 99%, mentre quella che il test funzioni correttamente nel caso di individui sani (ossia risulti negativo) sia del 99,5%. Se si sa anche che la probabilità di avere quella malattia è dello 0,5%, qual è la probabilità che un individuo positivo al test sia davvero malato?

FRANCA: «Se il test è positivo, il paziente è malato almeno al 99%!».

MARCO: «Però la malattia è poco diffusa; intendo dire che è raro che un individuo testato sia malato, quindi la probabilità dovrebbe essere molto più bassa del 99%, direi anche molto più bassa del 90%».

▶ Chi ha ragione, secondo te? Costruisci un diagramma ad albero delle situazioni possibili; poi usa il teorema del prodotto per eventi dipendenti…

4. Fra probabilità e statistica

Le variabili aleatorie discrete e le distribuzioni di probabilità

Consideriamo i punteggi che si possono ottenere nel lancio di due dadi a sei facce e calcoliamo la probabilità che si verifichi ognuno di essi. Esaminiamo la seguente tabella a doppia entrata.

▶ Tabella 1

SECONDO DADO \ PRIMO DADO	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

I casi possibili sono 36. La probabilità che il risultato sia 2 è $p(2) = \frac{1}{36}$, che sia 3 è $p(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, che sia 4 è $p(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ e così via.
Se indichiamo con X un generico valore che può essere assunto dal risultato, possiamo riassumere le probabilità che si ottengono con una tabella.

▶ Tabella 2

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(X)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Notiamo che gli eventi che abbiamo considerato sono tutti quelli possibili; inoltre, essi si escludono a vicenda, quindi costituiscono una partizione dell'insieme universo U di tutti gli eventi.

X viene detta *variabile aleatoria* (o *casuale*) e, poiché può assumere un numero finito di valori, è chiamata *discreta*.

◗ La definizione si può estendere al caso di una *infinità numerabile* di valori $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Per esempio, se lanciamo più volte un dado e ci chiediamo qual è la probabilità che esca 4 per n volte consecutive, la variabile aleatoria ha gli infiniti valori 1, 2, 3, 4, 5, …

DEFINIZIONE

Variabile aleatoria discreta

Una variabile aleatoria discreta X è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrispondenti a eventi aleatori $E_1, E_2, \ldots, E_n$, non impossibili, che si escludono a vicenda e tali che sicuramente uno di essi si verifichi.

Diciamo inoltre che la tabella appena compilata descrive la *distribuzione di probabilità* relativa alla variabile X.

◗ Poiché gli eventi di una variabile aleatoria sono incompatibili e la loro unione coincide con l'insieme universo U, si ha:

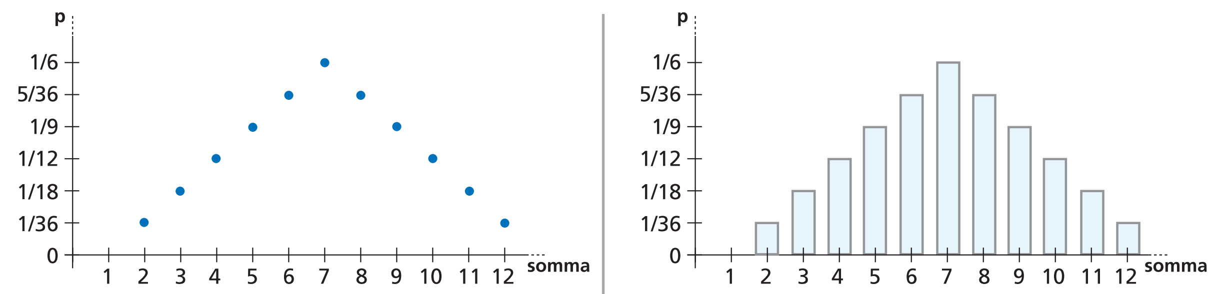
$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

DEFINIZIONE

Distribuzione di probabilità

Data una variabile aleatoria discreta X, con valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la successione delle probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$ a essi associate si chiama distribuzione di probabilità della variabile X.

Per rappresentare una distribuzione di probabilità possiamo utilizzare, oltre che una tabella, un diagramma cartesiano o un istogramma. Per l'esempio precedente abbiamo le rappresentazioni della figura 2.



a. Diagramma cartesiano.

b. Istogramma.

▲ **Figura 2** Rappresentazioni grafiche della distribuzione di probabilità p della variabile X = «somma dei punti realizzati nel lancio di due dadi».

La legge empirica del caso

Consideriamo ancora il lancio, ripetuto più volte, di due dadi. Possiamo studiare i risultati ottenuti da un punto di vista statistico, costruendo una tabella delle frequenze. La tabella che riportiamo è riferita a 10, 100 e 1000 lanci. Abbiamo indicato anche le frequenze relative espresse mediante numeri decimali e le probabilità della tabella 2, approssimate alla terza cifra decimale.

LANCI DI DUE DADI							
SOMMA DEI PUNTI	10 LANCI		100 LANCI		1000 LANCI		PROBABILITÀ
	F	f	F	f	F	f	
2	0	0	1	0,01	27	0,027	0,028
3	1	0,1	4	0,04	51	0,051	0,056
4	0	0	10	0,10	81	0,081	0,083
5	1	0,1	7	0,07	110	0,110	0,111
6	3	0,3	16	0,16	140	0,140	0,139
7	2	0,2	19	0,19	171	0,171	0,167
8	1	0,1	5	0,05	139	0,139	0,139
9	1	0,1	12	0,12	111	0,111	0,111
10	0	0	15	0,15	89	0,089	0,083
11	1	0,1	7	0,07	53	0,053	0,056
12	0	0	4	0,04	28	0,028	0,028

Nella tabella, F rappresenta la frequenza, f la frequenza relativa, ossia $\frac{F}{N}$, dove N è il numero dei lanci. Abbiamo scritto le probabilità della tabella 2 in forma decimale per poter fare meglio il confronto con le frequenze relative.

Osserviamo che, aumentando il numero dei lanci, le frequenze relative tendono ad avvicinarsi ai valori delle probabilità.

In generale si può affermare che, in un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio è molto vicina alla probabilità dell'evento. La differenza fra i due valori tende a diminuire all'aumentare del numero di prove che si eseguono.

Questa affermazione prende il nome di **legge empirica del caso**.

ESEMPIO In un'urna ci sono 20 palline rosse e 30 gialle. Se facciamo 12 000 estrazioni, rimettendo ogni volta la pallina nell'urna, quante volte, approssimativamente, ci aspettiamo che esca una pallina rossa?
Per la legge empirica del caso, visto l'elevato numero di prove, possiamo pensare che le frequenze relative siano molto vicine alle probabilità.
La probabilità che venga estratta una pallina rossa è:

$$p_R = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}.$$

Per ottenere la frequenza delle palline rosse, identifichiamo la probabilità con la frequenza relativa e la moltiplichiamo per il numero delle estrazioni:

$$12\,000 \cdot \frac{2}{5} = 4800.$$

Ci aspettiamo che, su 12 000 palline estratte, circa 4800 siano rosse.

La probabilità statistica

Abbiamo definito la probabilità come quoziente fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili. La probabilità così definita viene anche detta probabilità «**a priori**», perché è calcolata senza che vengano eseguite prove concrete.
Tuttavia ci sono eventi aleatori per i quali non è possibile calcolare la probabilità in questo modo. Per esempio, non è possibile calcolare a priori la probabilità che esca 2 in un dado truccato.
In casi come questi viene in aiuto la legge empirica del caso. Accettiamo infatti come probabilità, che chiamiamo **probabilità statistica**, la frequenza relativa di un evento che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni. Il valore della probabilità statistica è un valore **a posteriori**.

ESEMPIO Il metodo statistico viene utilizzato nel campo delle assicurazioni per calcolare la probabilità che ha una persona di essere in vita o di morire entro un certo periodo.
La tabella a lato, basata su un'ipotetica popolazione di 100 000 nati vivi, riporta il numero di coloro che sono vivi alle diverse età. Dalla tabella si possono calcolare sia le probabilità di morte sia quelle di vita.
Per esempio, la probabilità che una persona di 35 anni e di sesso maschile muoia nei successivi 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero dei decessi nei cinque anni (ossia la differenza fra 97 800 e 97 252) e il numero dei vivi a 35 anni:

$$\frac{97\,800 - 97\,252}{97\,800} \simeq 0{,}006.$$

La stessa probabilità calcolata per una persona di 75 anni è molto maggiore:

$$\frac{66\,138 - 50\,272}{66\,138} \simeq 0{,}24.$$

TAVOLA DI MORTALITÀ ANNO 2003

ETÀ (ANNI)	MASCHI	FEMMINE
0	100 000	100 000
5	99 483	99 557
10	99 420	99 511
15	99 338	99 460
20	99 055	99 362
25	99 651	99 242
30	98 232	99 105
35	97 800	98 927
40	97 252	98 649
45	96 484	98 219
50	95 285	97 526
55	93 270	96 397
60	90 070	94 727
65	85 005	92 154
70	77 534	88 181
75	66 138	81 511
80	50 272	70 339
85	32 085	53 051
90	13 811	28 894
95	3903	10 390
100	529	1818

La fonte della tavola di mortalità è: *http://demo.istat.it*, ottobre 2006.

ESEMPIO

La probabilità che una persona di 50 anni e di sesso femminile sia in vita dopo 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero delle donne vive a 55 anni e quello delle donne vive a 50 anni:

$$\frac{96\,397}{97\,426} \simeq 0{,}99.$$

La stessa probabilità a 80 anni è molto minore:

$$\frac{53\,051}{70\,339} \simeq 0{,}75.$$

I giochi d'azzardo

Un gioco d'azzardo è un gioco composto esclusivamente da mosse casuali, perciò la vincita dipende dal caso anziché dalla bravura del giocatore. Sono esempi di giochi d'azzardo il gioco dei dadi, la roulette, il baccarat ecc.
In un gioco d'azzardo è importante che, a prescindere dall'intervento della casualità, la somma puntata da ciascun giocatore sia proporzionale alla probabilità che questo ha di vincere; in tal caso **il gioco** si dice **equo**.

ESEMPIO

Due giocatori A e B scommettono la stessa somma sul lancio di un dado: A vince se esce il 2, in caso contrario vince B.
È chiaro che questo gioco non è equo, perché B ha più probabilità di vincite di A. Infatti le probabilità di vincita di A e di B sono:

$$p(A) = \frac{1}{6}, \qquad p(B) = \frac{5}{6}.$$

Indichiamo con $S(A)$ la somma puntata da A e con $S(B)$ la somma puntata da B. Affinché il gioco sia equo deve valere la proporzione:

$$S(A) : p(A) = S(B) : p(B).$$

Se il giocatore A punta 0,50 euro sulla vincita, la somma puntata da B deve soddisfare la proporzione:

$$0{,}50 : \frac{1}{6} = S(B) : \frac{5}{6},$$

da cui si ricava:

$$S(B) = 2{,}50.$$

Perché il gioco sia equo, il giocatore B deve puntare una somma 5 volte maggiore, dato che la sua probabilità di vincita è 5 volte più grande di quella di A. In questo modo, secondo la legge empirica del caso, dopo molte partite i due sarebbero circa in parità: uno ha vinto spesso una piccola somma, l'altro ha vinto meno spesso ma ogni volta una somma maggiore.

ESPLORAZIONE: IL GIOCO DEL LOTTO

Le origini del gioco del lotto risalgono al XVI secolo, quando a Genova venivano estratti a sorte, tra 90 candidati, i 5 Reggitori che dovevano governare la Repubblica.

Poiché su questa estrazione la popolazione effettuava scommesse, si decise di regolamentare il gioco in modo da arricchire le casse dello Stato.

Nel gioco del lotto vengono estratti cinque numeri tra i primi 90 numeri naturali. L'estrazione viene effettuata su dieci *ruote* identificate con altrettanti nomi di città italiane. Per vincere è importante indovinare i numeri e non l'ordine con cui i numeri sono estratti. Il gioco può essere effettuato puntando su un numero singolo (ambata o estratto semplice), su due numeri (ambo), su tre (terno), su quattro (quaterna) o su cinque (cinquina).

LOTTO

Estrazione di

giovedì 20 aprile 2006

Bari	90_{6}	70_{31}	84_{1}	66_{38}	21_{7}
Cagliari	17_{66}	36_{5}	3_{6}	45_{16}	1_{2}
Firenze	44_{23}	88_{5}	39_{22}	58_{20}	75_{1}
Genova	13_{4}	80_{0}	55_{6}	38_{7}	47_{2}
Milano	90_{10}	32_{2}	83_{57}	59_{10}	60_{11}
Napoli	82_{3}	37_{1}	65_{3}	5_{4}	29_{2}
Palermo	58_{13}	41_{2}	6_{14}	26_{22}	40_{40}
Roma	35_{2}	79_{6}	48_{14}	62_{20}	70_{25}
Torino	6_{1}	67_{14}	11_{18}	29_{15}	50_{87}
Venezia	52_{24}	75_{15}	29_{39}	24_{2}	35_{35}
Nazionale	42_{22}	22_{11}	5_{5}	66_{1}	29_{21}

I valori a lato degli estratti rappresentano i ritardi all'estrazione.

SuperEnalotto 32 35 44 58 82 90 J: 52 S: 42

Supponiamo di puntare 1 euro sull'uscita del numero 3 sulla ruota di Genova. Per l'estratto semplice, i casi possibili sono 90 e 5 i favorevoli, per cui la probabilità che il numero 3 compaia fra i 5 estratti è di 5/90, cioè 1/18. Quindi dobbiamo aspettarci di vincere in media 1 volta su 18.

Analizziamo la situazione dal punto di vista finanziario, ricordando che il lotto in questo caso paga 11,232 volte la puntata. Ecco allora la conseguenza: se giocando 18 volte 1 euro sull'uscita del numero 3 a Genova vinciamo, in media, una sola volta, spendiamo in tutto 18 euro, ma riceviamo soltanto 11,23 euro!

IN DIECI RIGHE

La tabella mostra (in euro) la vincita reale e quella che si dovrebbe avere in caso di gioco equo. Per confrontare gli svantaggi che il giocatore ha nei confronti dello Stato nei diversi casi, calcola la percentuale della vincita reale rispetto a quella con gioco equo. Quali sono i tipi di scommesse meno penalizzati? Quali invece si posizionano al top delle scommesse inique? Riassumi le tue considerazioni in una relazione redatta con il computer.

GIOCATA	VINCITA REALE (€)	VINCITA CON GIOCO EQUO (€)
Ambata	11,23	18
Ambo	250	400,5
Terna	4250	11 748
Quaterna	80 000	511 038
Cinquina	1 000 000	43 949 268

Cerca nel web: giochi equi, giochi non equi, probabilità.

Il dilemma di Monty Hall

…è più conveniente confermare oppure cambiare porta per ottenere il premio?

Il quesito completo a pag. β1

Il quesito è noto come *dilemma* o *paradosso di Monty Hall*, dal nome del conduttore del celebre gioco a premi televisivo americano *Let's Make a Deal*.
Quando nel 1990 un lettore della rivista *Parade* scrisse alla rubrica *Ask Marilyn* chiedendo quale fosse la strategia vincente, il problema si trasformò in un'accesa controversia. La soluzione proposta da Marilyn Vos Savant, presente nel Guinness dei Primati per il suo altissimo quoziente d'intelligenza, scatenò una valanga di lettere di contestazione, molte delle quali provenivano da matematici e accademici che accusavano Vos Savant di ignorare la teoria della probabilità. Il giornale diventò l'arena di un furente botta e risposta: da una parte Vos Savant, secondo la quale al giocatore conviene sempre cambiare porta; dall'altra chi sosteneva che è indifferente scegliere l'una o l'altra delle due porte rimanenti. Il caso finì persino in prima pagina sul *New York Times*, acquisendo in breve tempo un'enorme popolarità.
Chi aveva ragione?

Esaminiamo il problema: secondo la definizione classica della probabilità di un evento, data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili, quando il concorrente sceglie una delle tre porte chiuse ha una probabilità pari a $\frac{1}{3}$ di vincere il premio.
Dopo che il presentatore ha aperto una porta, mostrando una capra, si potrebbe pensare che la probabilità di aver indovinato la porta esatta salga da $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$. Dopo tutto, restano due porte chiuse e una delle due nasconde l'auto. Pertanto, la probabilità che questa sia dietro l'una o dietro l'altra è identica e pari a $\frac{1}{2}$. A questo punto il giocatore può scegliere a piacimento, perché è indifferente cambiare o non cambiare. Risposta sbagliata!
Infatti, il concorrente ha ancora una probabilità su tre di aver indovinato la porta esatta. La probabilità che l'automobile sia dietro una delle due porte non scelte è $\frac{2}{3}$ e, quando il presentatore rivela quale di queste due non nasconde il premio, la probabilità che l'automobile sia dietro l'altra porta è ancora $\frac{2}{3}$. Di conseguenza, se il giocatore mantiene la scelta iniziale, ha una probabilità di vincere pari a $\frac{1}{3}$, se cambia, pari a $\frac{2}{3}$.

Si può arrivare alla stessa conclusione seguendo un'altra argomentazione, che convincerà i più scettici. Partiamo dal presupposto (fondamentale!) che il conduttore conosce qual è la porta che nasconde l'automobile e apre sempre una porta con dietro una capra. Ora, supponiamo che la prima porta scelta dal giocatore sia sbagliata e nasconda una capra. Il conduttore non ha scelta e aprirà l'altra porta con la capra. In questo caso, se il giocatore cambia porta, vince. Se invece la prima porta scelta dal giocatore è esatta e il giocatore cambia, ovviamente perde.
Possiamo concludere che, se il giocatore cambia porta, *vince se e solo se la sua prima scelta era sbagliata*, evento che ha probabilità pari a $\frac{2}{3}$.
Se la strategia del giocatore è di non cambiare mai, *vince se e solo se la sua prima scelta è corretta*, evento con probabilità $\frac{1}{3}$.

Anche se apparentemente contro-intuitiva, la risposta di Vos Savant era esatta. Perché allora moltissime persone rimasero persuase del contrario? Alla base della controversia c'è probabilmente un punto chiave del problema: il conduttore sa qual è la porta vincente. Se il conduttore non sapesse dove si nasconde l'automobile (e quindi potesse anche aprire la porta fortunata), allora al giocatore resterebbero due porte con identica probabilità: cambiando o non cambiando, il concorrente avrebbe la stessa probabilità di vincere o perdere.
Questo paradosso è una variante del *paradosso delle tre carte* del matematico americano Warren Weaver (1950), il quale, a sua volta, deriva dal *paradosso delle tre scatole*, formulato per la prima volta nel 1889 dal matematico francese Joseph Bertrand.

LA TEORIA IN SINTESI
Introduzione alla probabilità

1. Gli eventi e la probabilità

Un **evento** è un fatto che può accadere o non accadere. Se avviene con certezza è detto **evento certo**, se non può mai accadere **evento impossibile**, **evento aleatorio** altrimenti.
La **probabilità** di un evento E è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili, quando essi siano tutti ugualmente possibili:

$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}.$$

La probabilità di un qualunque evento è un **numero compreso fra 0 e 1**: la probabilità di un evento certo è 1, quella di un evento impossibile è 0, quella di un evento aleatorio è maggiore di 0 e minore di 1.

ESEMPIO Estraiamo una carta da un mazzo di carte da poker; consideriamo i 4 eventi possibili: E_c = «esce cuori», E_q = «esce quadri»; E_f = «esce fiori», E_p = «esce picche». La probabilità dell'evento «esce cuori» è $p(E_c) = \frac{1}{4}$.

L'**evento contrario** $\overline{E}$ di un evento E è l'evento che si verifica nei casi in cui non si verifica E e soltanto in essi. Si ha: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

ESEMPIO Nel mazzo di carte da poker, l'evento contrario a «esce un seme rosso» è «esce un seme nero».

2. La probabilità della somma logica di eventi

Due eventi sono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro; in caso contrario sono **compatibili**.

ESEMPIO L'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce fiori» sono incompatibili; l'evento «esce un re di quadri» e l'evento «esce una figura» sono compatibili.

Dati due eventi, E_1 ed E_2:

- l'**evento unione** $E_1 \cup E_2$ è quello che si verifica se si verifica almeno uno degli eventi dati;
- l'**evento intersezione** $E_1 \cap E_2$ è quello che si verifica se si verificano entrambi gli eventi dati.

La **probabilità dell'evento unione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- alla somma delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono incompatibili;
- alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione, se E_1 ed E_2 sono compatibili.

ESEMPIO L'evento unione di E_c = «esce cuori» e di E_f = «esce fiori» è E = «esce cuori o fiori». Poiché i due eventi E_c ed E_f sono incompatibili, la probabilità dell'evento unione è:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

ESEMPIO L'evento intersezione di E_c = «esce cuori» e di E_p = «esce una carta pari» è E = «esce una carta pari di cuori», ossia E = «esce il 2, o il 4, o il 6, o l'8 o il 10 di cuori».

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

La probabilità dell'evento E_1 condizionata all'evento E_2, $p(E_1 | E_2)$, è la probabilità di E_1 calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato.
E_1 ed E_2 sono eventi **indipendenti** se $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$; in caso contrario sono **dipendenti**.

ESEMPIO Nel lancio di un dado consideriamo l'evento E_1 = «esce il 2», che ha probabilità $\frac{1}{6}$. Supponiamo che l'evento si verifichi al primo lancio. Lanciando di nuovo il dado, ogni numero ha ancora probabilità $\frac{1}{6}$ perché l'esito del nuovo lancio non dipende dal precedente.

ESEMPIO In un mazzo di 40 carte da poker (una volta tolti gli 8, i 9, i 10 e i jolly), la probabilità che si verifichi l'evento E_1 = «esce l'asso di cuori» è $\frac{1}{40}$.
Alla prima estrazione si verifica l'evento E_2: «esce il 2 di picche». Senza reinserire nel mazzo il 2 di picche, facciamo una seconda estrazione: ora la probabilità che esca l'asso di cuori è $\frac{1}{39}$: pertanto $p(E_1) \neq p(E_1 | E_2)$, dunque E_1 ed E_2 sono dipendenti.
Se, prima della seconda estrazione, reimmettiamo il 2 di picche nel mazzo, gli eventi risultano indipendenti.

La **probabilità dell'evento intersezione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- al prodotto delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono indipendenti;
- al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, se E_1 ed E_2 sono dipendenti.

4. Fra probabilità e statistica

Una variabile aleatoria discreta X è una variabile che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ corrispondenti a eventi non impossibili $E_1, E_2, \ldots, E_n$, che sono incompatibili e tali che uno di essi sicuramente si verifichi.

Data una variabile aleatoria discreta X, con valori $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la **distribuzione di probabilità** di X è la successione delle probabilità $p_1, p_2, \ldots, p_n$, associate ai valori di X.

La **legge empirica del caso** afferma che, considerato un evento aleatorio, in un grande numero di prove la sua frequenza relativa è in generale molto vicina alla probabilità e la differenza fra le due tende a diminuire all'aumentare del numero di prove effettuate.
Per questo si definisce come **probabilità statistica** di un evento la frequenza relativa che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni.

ESEMPIO Su 24 000 lanci di una moneta è uscita testa 12 012 volte; $f = \frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$ è la probabilità statistica che esca testa.

Un **gioco** è **equo** se, chiamata $S(A)$ la somma puntata dal giocatore A, $p(A)$ la probabilità che vinca A, $S(B)$ la somma puntata dal giocatore B e $p(B)$ la probabilità che vinca B, vale la proporzione:

$$S(A) : p(A) = S(B) : p(B).$$

1. Gli eventi e la probabilità

Teoria a pag. β1

RIFLETTI SULLA TEORIA

1 **VERO O FALSO?**

a) Dato l'insieme universo $U = \{x, y, z\}$, se l'insieme dei casi favorevoli all'evento E è $\{x, y\}$, la probabilità di E è $p(E) = \frac{1}{3}$. V F

b) Se un evento ha probabilità 0, allora il suo contrario ha probabilità 1. V F

c) Un'urna contiene 7 palline numerate da 2 a 8. Dato l'evento E = «estrazione di una pallina recante un numero primo», l'evento contrario è $\overline{E}$ = «estrazione di un numero pari». V F

d) Un evento ha probabilità 1 quando il numero dei casi favorevoli è uguale a 1. V F

ESERCIZI Nel sito: ▶ 10 esercizi in più

Eventi certi, impossibili, aleatori

2 Determina fra i seguenti eventi quali sono certi, quali impossibili, quali aleatori.
a) Domani pioverà.
b) Il 21 settembre il sole sorge alle 7:30.
c) Nel lancio di un dado esce un numero con una sola cifra.
d) Nel lancio di un dado esce un divisore di 12.

3 Per i seguenti eventi, indica due diversi contesti in cui l'evento è rispettivamente certo e impossibile.
a) Una banconota da cinque euro viene estratta da un portafoglio.
b) La squadra di calcio che tu preferisci vincerà lo scudetto.
c) Paolo Rossi, candidato del partito XY, sarà eletto alle elezioni.
d) Se si lancia un dado esce il numero 1.

4 Per i seguenti eventi, indica due diversi contesti in cui l'evento è rispettivamente certo e aleatorio.
a) Estrai una pallina nera da un'urna.
b) Sei interrogato in Storia.
c) Estrai una figura da un mazzo di carte.
d) Estrai una pedina con un multiplo di 5 da un sacchetto che contiene pedine numerate.

La probabilità di un evento

Nel sito: ▶ 7 esercizi di recupero

ESERCIZIO GUIDA

5 Abbiamo a disposizione un mazzo di 40 carte. Le carte sono di 4 semi (cuori, quadri, fiori, picche), per ogni seme ci sono 10 carte, di cui tre figure (jack, donna, re) e i numeri da 1 a 7. Viene estratta una carta. Calcoliamo la probabilità che si abbia:

a) una figura;
b) una carta di cuori;
c) l'asso di quadri;
d) un numero pari.

Poiché il mazzo contiene 40 carte e ne viene estratta una sola, in tutte le situazioni descritte il numero dei casi possibili è 40.

a) La probabilità che si verifichi un evento è data dal rapporto:

$$p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}.$$

Nel mazzo ci sono 3 figure per ogni seme; quindi in totale le figure sono 12. La probabilità che esca una figura è:

$$p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

b) Nel mazzo ci sono 10 carte di cuori, quindi i casi favorevoli sono 10. La probabilità che esca una carta di cuori è:

$$p = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

c) Nel mazzo c'è un solo asso di quadri, quindi c'è un solo caso favorevole. La probabilità che esca è:

$$p = \frac{1}{40}.$$

d) Per ogni seme ci sono carte numerate da 1 a 7 e i numeri pari sono tre. I casi favorevoli sono ancora 12, perché i semi sono 4. La probabilità che esca un numero pari è:

$$p = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}.$$

6 In una pila di compact disc, 6 sono di musica classica, 5 di cantautori italiani, 8 di complessi rock. Calcola la probabilità che, scegliendone uno a caso, esso sia:
a) di musica classica;
b) di un complesso rock.
$\left[\text{a) } \frac{6}{19}; \text{ b) } \frac{8}{19}\right]$

7 Un'urna contiene 8 palline gialle, 4 rosse e 10 verdi. Calcola la probabilità che venga estratta:
a) una pallina gialla;
b) una pallina rossa;
c) una pallina verde.
$\left[\text{a) } \frac{4}{11}; \text{ b) } \frac{2}{11}; \text{ c) } \frac{5}{11}\right]$

8 Un'urna contiene dei dischetti numerati da 1 a 20. Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, si abbia:
a) un numero primo;
b) un numero dispari.
$\left[\text{a) } \frac{2}{5}; \text{ b) } \frac{1}{2}\right]$

9 Nella roulette ci sono 37 numeri così colorati: lo 0 è bianco, i numeri da 1 a 18 sono rossi, quelli da 19 a 36 sono neri. Calcola la probabilità che, facendo girare la ruota, la pallina si fermi su:
a) un numero nero;
b) 0;
c) un numero dispari.
$\left[\text{a) } \frac{18}{37}; \text{ b) } \frac{1}{37}; \text{ c) } \frac{18}{37}\right]$

10 Si lancia un dado a sei facce. Calcola la probabilità che esca:
a) il numero 3;
b) un numero dispari;
c) un multiplo di 4;
d) un numero primo.
$\left[\text{a) } \frac{1}{6}; \text{ b) } \frac{1}{2}; \text{ c) } \frac{1}{6}; \text{ d) } \frac{1}{2}\right]$

11 Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero. Calcola la probabilità che si abbia:
a) un numero pari;
b) un numero maggiore di 10;
c) un numero con due cifre uguali;
d) un multiplo di 5.
$\left[\text{a) } \frac{1}{2}; \text{ b) } \frac{8}{9}; \text{ c) } \frac{4}{45}; \text{ d) } \frac{1}{5}\right]$

12 Il sacchetto della tombola contiene 90 numeri. Viene estratto un numero. Calcola la probabilità che esca:
a) un numero maggiore di 50;
b) un numero con due cifre diverse;
c) un numero multiplo di 4;
d) un numero primo inferiore a 20.
$\left[\text{a) } \frac{4}{9}; \text{ b) } \frac{73}{90}; \text{ c) } \frac{11}{45}; \text{ d) } \frac{4}{45}\right]$

13 Abbiamo un mazzo di 52 carte. Viene estratta una carta. Calcola la probabilità che esca:
a) una carta di picche;
b) una figura;
c) una carta rossa.
$\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{13}; \text{ c) } \frac{1}{2}\right]$

I valori della probabilità

14 Quali dei seguenti numeri non possono rappresentare la probabilità di un evento?

$$\frac{1}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{1}{4}; \frac{7}{9}; \frac{7}{4}; \frac{8}{100}; \frac{234}{1234}; 0{,}021.$$

15 Nel lancio di un dado a sei facce, indica un evento:
a) con probabilità diversa da 0 e da 1;
b) con probabilità 0;
c) con probabilità 1.

16 Nel gioco della tombola, indica un evento con probabilità diversa sia da 1 sia da 0 e un evento con probabilità 1.

Gli eventi e gli insiemi

Negli esercizi che seguono sono riportati alcuni eventi. Rappresenta l'insieme universo e l'insieme dei casi favorevoli relativo all'evento indicato.

17 Da un sacchetto della tombola viene estratto un numero maggiore di 20.

18 Da un'urna che contiene 10 biglie nere, 8 rosse e 4 bianche viene estratta una biglia nera.

19 Da una collezione composta da 10 francobolli italiani, 7 francesi, 5 inglesi viene estratto un francobollo italiano.

20 Nel gioco della roulette esce un numero pari.

21 Nel lancio di un dado, considera i due eventi seguenti:

E_1 = «esce un multiplo di 3»;

E_2 = «esce il numero 2».

Scrivi qual è l'insieme universo e qual è l'insieme dei casi favorevoli a ciascun evento.

L'evento contrario e la sua probabilità

ESERCIZIO GUIDA

22 Nell'esercizio guida 5, da un mazzo di 40 carte veniva estratta una carta e poi venivano indicati i seguenti quattro eventi: «è una figura»; «è una carta di cuori»; «è l'asso di quadri»; «è un numero pari». Ora proponiamo un altro insieme di eventi:

a) «una carta che non è una figura»;
b) «una carta di quadri o di fiori o di picche»;
c) «un asso di cuori o di fiori o di picche»;
d) «una carta dispari».

Quali di questi ultimi eventi sono contrari a quelli indicati in precedenza? Per gli eventi contrari calcoliamo la probabilità che essi si verifichino.

a) L'evento «estrarre una carta che non è una figura» è contrario all'evento «estrarre una figura». Per calcolarne la probabilità basta sottrarre da 1 la probabilità dell'evento «estrarre una figura»:

$$p = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}.$$

Possiamo verificare questo risultato anche calcolando direttamente la probabilità. Poiché le carte senza figura sono 7 per ogni seme, i casi favorevoli sono $7 \cdot 4 = 28$:

$$p = \frac{28}{40} = \frac{7}{10}.$$

b) «Estrarre una carta di quadri o di fiori o di picche» è un evento contrario a «estrarre una carta di cuori»; quindi:

$$p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

c) I due eventi «estrarre l'asso di quadri» ed «estrarre un asso di cuori o di fiori o di picche» non sono contrari, perché è possibile estrarre carte che non sono assi.

d) Anche in questo caso, i due eventi «estrarre un numero pari» ed «estrarre un numero dispari» non sono uno il contrario dell'altro. Infatti nel mazzo ci sono anche delle figure, che sono carte senza numero.

Nei quattro esercizi che seguono sono indicate, per ogni esperimento, tre coppie di possibili eventi. Per ogni coppia, indica se sono eventi contrari oppure no; in caso di risposta affermativa, calcola la probabilità di entrambi gli eventi.

23 Lancio di un dado a sei facce.

E_1 = «esce il numero 3»;
E_2 = «esce un numero dispari».

E_1 = «esce un multiplo di 2»;
E_2 = «esce un numero dispari».

E_1 = «esce un multiplo di 3 e di 5»;
E_2 = «esce un numero pari».

24 Si estrae un numero dal sacchetto della tombola.

E_1 = «è un numero maggiore di 10»;
E_2 = «è un numero dispari».

E_1 = «è un numero pari»;
E_2 = «è un numero minore di 10».

E_1 = «è un numero con due cifre uguali»;
E_2 = «è un numero pari».

25 Estrazione di una pallina da un'urna che contiene 8 palline gialle, 4 rosse e 10 verdi.

E_1 = «è una pallina gialla»;
E_2 = «è una pallina non gialla».

E_1 = «è una pallina bianca»;
E_2 = «è una pallina rossa».

E_1 = «è una pallina verde»;
E_2 = «è una pallina rossa o gialla».

26 Si fa girare la ruota della roulette. La pallina si ferma su:

E_1 = «un numero nero»;
E_2 = «un numero rosso».

E_1 = «0»;
E_2 = «un numero rosso o nero».

E_1 = «un numero dispari»;
E_2 = «un numero pari».

27 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado si verifichi l'evento contrario dell'evento:

«esce un multiplo di 2». $\left[\frac{1}{2}\right]$

28 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado non esca:
a) il numero 5;
b) un numero maggiore di 5;
c) un numero minore di 5.
$\left[\text{a) } \frac{5}{6}; \text{ b) } \frac{5}{6}; \text{ c) } \frac{1}{3}\right]$

29 Un'urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Calcola la probabilità che, estraendone una a caso, non esca una pallina bianca. $\left[\frac{5}{8}\right]$

30 Un'urna contiene 8 palline bianche, 5 palline nere e 7 palline rosse. Si estrae una pallina. Calcola la probabilità che:
a) esca una pallina nera;
b) non esca una pallina nera;
c) non esca una pallina rossa.
$\left[\text{a) } \frac{1}{4}; \text{ b) } \frac{3}{4}; \text{ c) } \frac{13}{20}\right]$

2. La probabilità della somma logica di eventi

Teoria a pag. β4

RIFLETTI SULLA TEORIA

31 **TEST** Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. La probabilità che la carta estratta sia rossa, o una figura, o un asso è:

A $\frac{21}{26}$. B $\frac{9}{13}$. C $\frac{10}{13}$. D $\frac{11}{13}$. E $\frac{17}{26}$.

32 **TEST** La probabilità che, nell'estrazione del lotto, il primo estratto sulla ruota di Milano sia un numero primo o un numero dispari è:

A $\frac{22}{45}$. B $\frac{1}{2}$. C $\frac{7}{9}$. D $\frac{23}{45}$. E $\frac{4}{15}$.

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 6 esercizi di recupero

Gli eventi unione e intersezione

ESERCIZIO GUIDA

33 In un cassetto ci sono 16 biglie numerate da 1 a 16. Estraiamo una biglia a caso e consideriamo gli eventi:

E_1 = «estrazione di un numero dispari e divisibile per 3»;
E_2 = «estrazione di un numero dispari o divisibile per 3».

Qual è l'insieme degli eventi favorevoli a E_1? E quello degli eventi favorevoli a E_2?

L'insieme universo è:

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 15, 16\}$.

L'evento E_1 è composto da due eventi:

E_1' = «estrazione di un numero dispari»;
E_1'' = «estrazione di un numero divisibile per 3».

Insieme degli eventi favorevoli a E_1':

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

Insieme degli eventi favorevoli a E_1'':

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.

L'insieme favorevole all'evento E_1 è l'intersezione di A e B: $A \cap B = \{3, 9, 15\}$.

L'evento E_2 è formato dagli stessi eventi, però legati dal connettivo «o»; quindi l'insieme degli eventi favorevoli è l'unione di A e di B:

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15\}$.

34 Nel lancio di un dado, considera i due eventi seguenti:

E_1 = «esce un multiplo di 3 o un numero pari»;

E_2 = «esce un multiplo di 3 e un numero pari».

Scrivi qual è l'insieme dei casi favorevoli a ciascun evento.

35 Un'urna contiene 5 palline rosse, 6 bianche e 4 gialle. Considera gli eventi:

E_1 = «estrazione di una pallina gialla»;

E_2 = «estrazione di una pallina nera».

a) Qual è l'insieme dei casi favorevoli a E_1 ed E_2?

b) Scrivi l'evento unione e determina l'insieme che lo rappresenta.

36 Nel lancio di due monete identiche, qual è l'insieme universo e l'insieme dei casi favorevoli all'evento «escono due croci»?

37 Nel lancio contemporaneo di due dadi, quanti elementi contiene l'insieme universo? Qual è l'insieme dei casi favorevoli all'evento «la somma dei due numeri è pari»?

Gli eventi compatibili e gli eventi incompatibili

38 Considera il lancio di un dado. Quali delle seguenti coppie di eventi sono compatibili?

a) «Esce il numero 2, esce un multiplo di 2».

b) «Esce un numero dispari, esce il numero 4».

c) «Esce un numero primo, esce un numero pari».

39 Nell'estrazione di una carta da un mazzo di 40, determina quali fra i seguenti eventi sono compatibili e quali incompatibili:

a) «esce un re»;

b) «esce un asso»;

c) «esce una figura»;

d) «esce una carta di quadri».

40 Si estrae un gettone da una scatola che ne contiene 25 numerati. Quali dei seguenti eventi sono compatibili e quali incompatibili?

a) «Esce un numero maggiore di 10».

b) «Esce un multiplo di 2».

c) «Esce un numero dispari».

Il teorema della somma per eventi incompatibili

ESERCIZIO GUIDA

41 In un sacchetto ci sono 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Calcoliamo la probabilità che venga estratto a caso un gettone nero o bianco.

L'evento che ci interessa è

E = «estrazione di un gettone nero o bianco»,

composto dai due eventi:

E_1 = «estrazione di un gettone nero»;

E_2 = «estrazione di un gettone bianco».

Poiché E_1 ed E_2 sono incompatibili, è sufficiente sommare le probabilità $p(E_1)$ e $p(E_2)$.

$$p(E_1) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13};$$

$$p(E_2) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13};$$

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{4}{13} + \frac{3}{13} = \frac{7}{13}.$$

42 Un cassetto contiene 18 calzini blu, 6 neri e 4 grigi. Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, esso sia blu o grigio. $\left[\frac{11}{14}\right]$

43 Su uno scaffale sono posati 12 musicassette, 20 compact disc e 14 floppy disk. Prendendo un oggetto a caso, qual è la probabilità di prendere un compact disc o un floppy disk? $\left[\frac{17}{23}\right]$

44 Qual è la probabilità di estrarre a caso una biro rossa o nera da un cassetto che ne contiene 20 rosse, 15 nere e 23 blu? $\left[\frac{35}{58}\right]$

45 Su un tavolo ci sono 65 lampadine piccole, 35 medie e 50 grosse. Qual è la probabilità che, prendendo una lampadina a caso, essa sia media o grossa? $\left[\frac{17}{30}\right]$

46 Una cassaforte contiene 400 banconote da 5 euro, 220 da 10 euro e 700 da 20 euro. Qual è la probabilità di estrarne a caso una da 5 euro o da 10 euro? $\left[\frac{31}{66}\right]$

47 In una busta sono contenute 28 figurine numerate da 1 a 28. Calcola la probabilità di estrarre a caso una figurina con numero dispari o multiplo di 4. $\left[\frac{3}{4}\right]$

48 In un'urna vengono introdotti 100 bigliettini gialli, verdi e rossi. I gialli sono 40, i verdi sono i $\frac{2}{3}$ dei rossi.
Calcola la probabilità che, estraendone uno a caso, esso sia verde o rosso. $\left[\frac{3}{5}\right]$

49 Una scatola contiene 54 fra cioccolatini, caramelle e liquirizie. Sapendo che i cioccolatini sono il doppio delle liquirizie e le caramelle sono i $\frac{3}{2}$ delle liquirizie, calcola la probabilità di prendere a caso un cioccolatino o una caramella. $\left[\frac{7}{9}\right]$

50 Nel suo tratto di spiaggia, un bagnino ha 180 ombrelloni, a righe, a quadri o a fiori. Gli ombrelloni a quadri sono 44.
La probabilità che venga assegnato a un bagnante un ombrellone a righe è $\frac{3}{5}$.
Qual è la probabilità che venga assegnato a caso un ombrellone a fiori? $\left[\frac{7}{45}\right]$

51 In un negozio ci sono 240 paia di jeans blu, rossi e neri. La probabilità di prendere a caso un paio blu è $\frac{2}{3}$. Sapendo che i jeans neri sono 60, calcola la probabilità di prendere a caso un paio di jeans rossi. $\left[\frac{1}{12}\right]$

52 In una busta ci sono 210 francobolli, alcuni italiani, altri francesi, altri ancora tedeschi. La probabilità che si prenda a caso un francobollo italiano è $\frac{2}{7}$. I francobolli tedeschi sono 50. Calcola la probabilità che si prenda a caso un francobollo francese. $\left[\frac{10}{21}\right]$

53 In un'urna ci sono palline gialle, rosse e verdi. La probabilità che esca una pallina rossa o verde è $\frac{2}{5}$. Le palline gialle sono 45. Il numero delle rosse è doppio di quello delle verdi. Quante sono le palline verdi? [10]

Il teorema della somma per eventi compatibili

ESERCIZIO GUIDA

54 In un sacchetto ci sono 16 gettoni: 7 di forma quadrata (3 rossi e 4 verdi) e 9 di forma circolare (4 rossi e 5 verdi). Qual è la probabilità di estrarre a caso un gettone rosso oppure tondo?

Gli eventi E_1 = «estrazione di un gettone rosso» ed E_2 = «estrazione di un gettone tondo» sono compatibili; infatti, un gettone può essere contemporaneamente rosso e tondo. Calcoliamo $p(E_1)$ e $p(E_2)$ tenendo presente che i casi possibili sono 16:

$$p(E_1) = \frac{7}{16}; p(E_2) = \frac{9}{16}.$$

Inoltre, per calcolare $p(E_1 \cap E_2)$, teniamo presente che i casi favorevoli sono i gettoni rossi e tondi:

$$p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{16}.$$

La probabilità che si estragga un gettone rosso oppure tondo è:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{16} + \frac{9}{16} - \frac{4}{16} = \frac{3}{4}.$$

55 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, si verifichi almeno uno dei due eventi: E_1 = «numero dispari», E_2 = «numero minore di 4». $\left[\frac{2}{3}\right]$

56 Calcola la probabilità che, lanciando un dado, esca un numero maggiore di 2 o pari. $\left[\frac{5}{6}\right]$

57 In una sacca sportiva ci sono 10 maglie numerate da 1 a 10. Calcola la probabilità che, estraendo a caso una maglia, questa abbia un numero dispari o un numero maggiore di 5. $\left[\frac{4}{5}\right]$

58 I 24 libri di uno scaffale sono numerati da 1 a 24. Qual è la probabilità che, scegliendone uno a caso, si prenda un libro con numero pari o minore di 12? $\left[\frac{3}{4}\right]$

59 In un negozio ci sono 32 paia di sci numerati da 1 a 32. Calcola la probabilità che, prendendone uno a caso, abbia il numero dispari o maggiore di 23. $\left[\frac{21}{32}\right]$

3. La probabilità del prodotto logico di eventi

Teoria a pag. β8

RIFLETTI SULLA TEORIA

60 VERO O FALSO?

a) Si estraggono consecutivamente due carte da un mazzo di 40 carte senza rimettere la prima carta nel mazzo. Gli eventi E_1 = «La prima carta è un quattro» ed E_2 = «La seconda carta è un numero pari» sono indipendenti. V F

b) Se si effettuano estrazioni consecutive da un'urna contenente palline di colore diverso, rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, si hanno eventi dipendenti. V F

c) Se sappiamo che $p(E_1) = \frac{1}{10}$ e $p(E_2 | E_1) = \frac{2}{3}$, allora $p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{15}$. V F

d) Un'urna contiene 3 palline nere, numerate da 1 a 3, e 5 palline gialle, numerate da 1 a 5. L'evento E = «estrazione di una pallina gialla o nera con un numero pari» è un evento intersezione. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 12 esercizi di recupero

La probabilità condizionata

ESERCIZIO GUIDA

61 Un amico lancia un dado e, senza farcelo vedere, dice: «È uscito un numero minore di 5». Qual è la probabilità che sia uscito il 3?

Consideriamo i due eventi:

E_1 = «estrazione del numero 3»;

E_2 = «estrazione di un numero minore di 5».

Insieme universo: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
insieme degli eventi favorevoli a E_1:

$A = \{3\}$;
insieme degli eventi favorevoli a E_2:

$B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Dunque $p(E_1) = \frac{1}{6}$, ma l'evento E_1 è condizionato dal fatto che si è verificato E_2; quindi dobbiamo calcolare la probabilità condizionata $p(E_1|E_2)$; l'insieme universo per $E_1|E_2$ è allora B, mentre quello dei casi favorevoli è $A \cap B = \{3\}$.

Perciò la probabilità cercata è $p(E_1|E_2) = \frac{1}{4}$.

62 Calcola la probabilità che nel lancio di un dado esca un numero primo, sapendo che è uscito un numero minore di 5. $\left[\frac{1}{2}\right]$

63 Da una scatola contenente 20 palline, numerate da 1 a 20, viene estratta a caso una pallina. Calcola la probabilità che si sia realizzato l'evento «estrazione di un multiplo di 3», sapendo che è uscito un numero minore di 12. $\left[\frac{3}{11}\right]$

64 Un'urna contiene palline numerate da 1 a 12, le prime 7 sono nere, le altre rosse. Calcola la probabilità che venga estratta una pallina con numero pari condizionata dal fatto che la pallina sia nera. $\left[\frac{3}{7}\right]$

65 Ripeti l'esercizio precedente, modificando la condizione: la pallina estratta è rossa. $\left[\frac{3}{5}\right]$

66 Calcola la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 40, essa sia un re, sapendo che è uscita una figura. $\left[\frac{1}{3}\right]$

67 Un'urna contiene 22 palline numerate da 1 a 22. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina, essa rechi un numero multiplo di 3, sapendo che è uscito un numero dispari. $\left[\frac{4}{11}\right]$

68 Calcola la probabilità che, lanciando due dadi, la somma delle facce sia un numero dispari, sapendo che le facce portano numeri diversi. $\left[\frac{3}{5}\right]$

Il teorema del prodotto per eventi indipendenti

ESERCIZIO GUIDA

69 In un sacchetto ci sono 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Viene estratto un primo gettone; il gettone viene reimmesso nel sacchetto; viene estratto un secondo gettone. Calcoliamo la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

a) i due gettoni sono rossi (E_1);
b) viene estratto prima un gettone nero e poi uno bianco (E_2);
c) vengono estratti un gettone nero e uno bianco in un ordine qualsiasi (E_3).

Poiché le estrazioni sono **con reimmissione**, gli eventi sono indipendenti.

a) La probabilità $p(R)$ che venga estratto un gettone rosso è:

$$p(R) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$$

quindi, per il teorema del prodotto, la probabilità che ne vengano estratti due è:

$$p(E_1) = p(R) \cdot p(R) = \frac{6}{13} \cdot \frac{6}{13} = \frac{36}{169}.$$

b) La probabilità $p(N)$ che venga estratto un gettone nero è:

$$p(N) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13}.$$

La probabilità $p(B)$ che venga estratto uno bianco è:

$$p(B) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13}.$$

La probabilità dell'evento E_2 è:

$$p(E_2) = p(N) \cdot p(B) = \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{13} = \frac{12}{169}.$$

c) Poiché non viene precisato in quale ordine devono essere estratti i due gettoni, dobbiamo considerare l'evento E_3 come evento unione dei due eventi:

- «esce un gettone nero e poi uno bianco» (E_2);
- «esce un gettone bianco e poi uno nero» (E_2').

Conosciamo già la probabilità dell'evento E_2. Anche E_2' ha la stessa probabilità, infatti:

$$p(E_2') = p(B) \cdot p(N) = \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{13} = \frac{12}{169}.$$

Per il teorema della somma:

$$p(E_3) = p(E_2) + p(E_2') = \frac{12}{169} + \frac{12}{169} = \frac{24}{169}.$$

70 Un sacchetto contiene 4 biglietti blu, 5 rossi e 1 bianco. Calcola la probabilità che in due estrazioni successive, con reimmissione del primo estratto, escano nell'ordine un biglietto blu e uno rosso. $\left[\frac{1}{5}\right]$

71 In un cesto ci sono animali di peluche: 6 cagnolini, 10 gattini, 4 papere. Qual è la probabilità di estrarre a caso, reimmettendo il primo oggetto estratto, un gattino e poi una papera? $\left[\frac{1}{10}\right]$

72 Dal sacchetto della tombola si fanno due estrazioni successive con reimmissione. Calcola la probabilità di ottenere un numero pari e uno dispari. $\left[\frac{1}{2}\right]$

73 Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono due con reimmissione. Calcola la probabilità di ottenere una figura e una carta minore di 7. $\left[\frac{9}{25}\right]$

74 In uno scatolone ci sono 52 paia di scarpe sportive, alcune da tennis, altre da jogging, altre da pallavolo: quelle da tennis sono la metà di quelle da jogging che sono il doppio di quelle da pallavolo. Calcola la probabilità, in due estrazioni con reimmissione, di avere nell'ordine un paio di scarpe da jogging e uno da pallavolo. $\left[\frac{1}{8}\right]$

75 In una libreria ci sono 1500 volumi fra libri gialli, romanzi e saggi. Sapendo che i romanzi sono 348 e i gialli sono il triplo dei saggi, calcola la probabilità di ottenere, in due estrazioni successive con reimmissione, un libro giallo e un romanzo. $\left[\frac{4176}{15\,625}\right]$

76 La probabilità che una persona colpisca un bersaglio è del 20% e la probabilità che lo colpisca un'altra persona è del 60%. Le due persone sparano contemporaneamente. Calcola la probabilità che:

a) il bersaglio venga colpito da entrambi;
b) almeno uno colpisca il bersaglio.

[a) 12%; b) 68%]

Il teorema del prodotto per eventi dipendenti

ESERCIZIO GUIDA

77 Consideriamo il sacchetto dell'esercizio guida 69, contenente 30 gettoni rossi, 20 neri e 15 bianchi. Calcoliamo la probabilità che si verifichino i seguenti eventi:

a) vengono estratti contemporaneamente due gettoni rossi (E_1);

b) viene estratto prima un gettone nero e poi uno bianco, senza però reimmettere il primo gettone nel sacchetto (E_2);

c) vengono estratti contemporaneamente un gettone nero e uno bianco (E_3).

a) Estrarre **contemporaneamente** due gettoni equivale a estrarre prima un gettone e poi, senza rimetterlo nel sacchetto, estrarre un secondo gettone. La probabilità che il primo gettone sia rosso è:

$$p(R) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}.$$

Senza un gettone, sia i casi possibili sia quelli favorevoli sono diminuiti di 1. Perciò la probabilità che il secondo gettone sia rosso, supposto che il primo sia stato rosso, è:

$$p(R \mid R) = \frac{29}{64}.$$

Per il teorema del prodotto per eventi dipendenti:

$$p(E_1) = p(R) \cdot p(R \mid R) = \frac{6}{13} \cdot \frac{29}{64} = \\ = \frac{87}{416}.$$

b) Procedendo come nel caso precedente:

$$p(N) = \frac{20}{65} = \frac{4}{13};$$

$$p(B \mid N) = \frac{15}{64}.$$

Si ha quindi:

$$p(E_2) = p(N) \cdot p(B \mid N) = \frac{4}{13} \cdot \frac{15}{64} = \\ = \frac{15}{208}.$$

c) Considerare l'estrazione contemporanea di un gettone nero e di uno bianco equivale a considerare l'evento unione dei seguenti eventi senza reimmissione:

- «estrarre prima un gettone nero e poi uno bianco» (E_2);
- «estrarre prima un gettone bianco e poi uno nero» (E_2').

Abbiamo già calcolato la probabilità di E_2 nel caso b). Calcoliamo la probabilità dell'evento E_2':

$$p(B) = \frac{15}{65} = \frac{3}{13};$$

$$p(N \mid B) = \frac{20}{64} = \frac{5}{16};$$

$$p(E_2') = \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{208}.$$

Le probabilità di E_2 ed E_2' sono uguali.

Applicando il teorema della somma:

$$p(E_3) = p(E_2) + p(E_2') = \frac{15}{208} + \frac{15}{208} = \frac{15}{104}.$$

78 Nell'estrazione contemporanea di due carte da un mazzo di 40, qual è la probabilità che escano due 5? $\left[\frac{1}{130}\right]$

79 Un cassetto contiene 25 magliette; quelle a manica corta sono i $\frac{2}{3}$ di quelle a manica lunga. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, siano entrambe a manica lunga. $\left[\frac{7}{20}\right]$

80 Calcola la probabilità che da un mazzo di 40 carte vengano estratti contemporaneamente un re e un asso. $\left[\frac{4}{195}\right]$

81 Un ragazzo ha una collezione di 40 videocassette: 10 di film vari, 12 di cartoni animati e le rimanenti di film gialli. Qual è la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, si abbia un cartone animato e un film giallo? $\left[\frac{18}{65}\right]$

82 Da un'urna contenente 20 palline gialle, 18 blu e 4 rosse si estraggono tre palline, senza reimmissione nell'urna. Calcola la probabilità che siano la prima rossa, la seconda blu, la terza gialla. $\left[\frac{6}{287}\right]$

83 Uno scatolone contiene 7 palloni da pallavolo, 5 da pallacanestro e 8 da rugby. Qual è la probabilità che, prelevandone 3, senza reimmetterli nello scatolone, i primi due siano da rugby e il terzo da pallavolo? $\left[\frac{49}{855}\right]$

84 Un cestino contiene 100 fra castagne, noci e nocciole. Le castagne sono 20 e le noci sono $\frac{1}{4}$ delle nocciole. Calcola la probabilità che, estraendone due, senza reimmissione della prima, si ottenga prima una noce e poi una nocciola. $\left[\frac{256}{2475}\right]$

4. Fra probabilità e statistica

Teoria a pag. β14

RIFLETTI SULLA TEORIA

85 VERO O FALSO?

a) Se la frequenza di un evento è 0 allora l'evento è impossibile. V F

b) Quando per un evento è possibile calcolare la probabilità come quoziente fra numero dei casi favorevoli e numero dei casi possibili, è anche possibile calcolare la probabilità statistica. V F

c) In base alla legge empirica del caso, il valore della frequenza dell'estrazione di una figura da un mazzo di 40 carte tende al valore 0,3 quando il numero delle prove tende a diventare infinito. V F

d) Una società di assicurazione ha rilevato che, su 14 300 automobilisti assicurati, 4320 hanno presentato denuncia di sinistro, e valuta che la probabilità di incorrere in un incidente automobilistico sia del 30,21%. Questa valutazione è corretta. V F

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 8 esercizi di recupero

La legge empirica del caso

ESERCIZIO GUIDA

86 Un'urna contiene 60 gettoni telefonici e 30 gettoni per distributori di merendine. Si effettuano 900 estrazioni reinserendo ogni volta il gettone estratto. Quante volte, approssimativamente, uscirà un gettone telefonico?

Per la legge empirica del caso possiamo identificare la frequenza relativa con la probabilità.
La probabilità che esca un gettone telefonico è:

$$p(T) = \frac{60}{90} = \frac{2}{3}.$$

Per ottenere la frequenza dei gettoni telefonici, moltiplichiamo la frequenza relativa, coincidente con la probabilità, per il numero delle estrazioni:

$$F(T) = \frac{2}{3} \cdot 900 = 600.$$

Su 900 estrazioni ci aspettiamo venga estratto un gettone telefonico circa 600 volte.

87 Si lancia 60 volte un dado. Quante volte uscirà approssimativamente un numero minore di 3? [20]

88 Si lancia 1800 volte un dado. Quante volte uscirà approssimativamente un numero diverso da 2? [1500]

89 Una scatola contiene 150 fra cioccolatini e caramelle. Si effettuano 500 estrazioni con reimmissione e si ottengono 350 caramelle. Quanti sono approssimativamente i cioccolatini? [45]

I giochi d'azzardo

ESERCIZIO GUIDA

90 Carla e Guido utilizzano il gioco della tombola per fare scommesse. Carla estrae un numero a caso: se è un multiplo di 5, Guido dovrà pagare 10 euro. Affinché il gioco sia equo, quanto dovrà pagare Carla se il numero non è un multiplo di 5?

I numeri della tombola sono 90 e i multipli di 5 sono 18. La probabilità che venga estratto un multiplo di 5 è:

$$p = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}.$$

La probabilità dell'evento contrario è:

$$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Indicando con S_C la somma pagata da Carla e con S_G la somma pagata da Guido, perché il gioco sia equo deve valere la seguente proporzione:

$$S_C : p = S_G : q;$$

$$S_C : \frac{1}{5} = 10 : \frac{4}{5};$$

$$S_C = 2{,}50.$$

Se vince Guido, Carla deve pagare 2,50 euro.

91 Un giocatore punta 2 euro e vince se, lanciando un dado, esce il numero 4. Quale deve essere la posta del suo avversario perché il gioco sia equo? [10 euro]

92 Un giocatore punta 2,50 euro e vince se, lanciando un dado, esce un numero dispari. Quanto deve valere la posta del suo avversario perché il gioco sia equo? [2,50 euro]

93 Un'urna contiene 30 palline rosse e 20 bianche. Un giocatore punta 3,30 euro sull'uscita di una pallina rossa. Quale deve essere la posta dell'avversario perché il gioco sia equo? [2,20 euro]

RIEPILOGO LA PROBABILITÀ

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più

94 Un sacchetto contiene dei gettoni numerati da 1 a 100. Calcola la probabilità che esca:
a) un numero dispari;
b) un multiplo di 8;
c) un numero a due cifre di cui la seconda cifra sia uguale a 3;
d) un numero non primo.

$\left[\text{a) } \frac{1}{2}; \text{ b) } \frac{3}{25}; \text{ c) } \frac{9}{100}; \text{ d) } \frac{3}{4}\right]$

95 Dal sacchetto della tombola viene estratto un numero. Calcola la probabilità che il numero sorteggiato sia un multiplo di 3, sapendo che è uscito un multiplo di 5. $\left[\frac{1}{3}\right]$

96 Un frigorifero contiene 30 gelati: quelli alla fragola sono 4 in meno di quelli alla crema e 4 in più di quelli al cioccolato. Qual è la probabilità che, estraendone uno a caso, sia al cioccolato o alla fragola? $\left[\frac{8}{15}\right]$

97 In un astuccio ci sono 22 oggetti, tra penne a sfera, matite e pennarelli colorati. La probabilità di prendere a caso un pennarello è $\frac{6}{11}$. Le matite sono 4. Calcola la probabilità di prendere a caso una penna a sfera. $\left[\frac{3}{11}\right]$

98 Da un mazzo di 40 carte se ne estraggono 3, reimmettendo ogni carta nel mazzo. Calcola la probabilità che si abbia nell'ordine un cinque, un asso e una figura. $\left[\frac{3}{1000}\right]$

99 Un vaso contiene 240 biglie colorate (blu o rosse). Sapendo che in 800 estrazioni con reimmissione sono uscite 350 biglie rosse, quante biglie blu ci sono approssimativamente nel vaso? [135]

100 L'evento E ha una probabilità di verificarsi pari a $\frac{9}{10}$; sapendo che si puntano 9 euro e che si vince se l'evento si verifica, calcola la posta dell'avversario perché il gioco sia equo. [1 euro]

101 Un giocatore punta 1 euro e vince se, lanciando un dado, esce un numero maggiore di 4. Calcola la posta dell'avversario perché il gioco sia equo. [2 euro]

102 Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da un'urna che ne contiene 220 numerate in successione, si abbia un numero dispari o un numero maggiore di 180. $\left[\frac{13}{22}\right]$

103 Un cassetto contiene 28 magliette polo: 10 azzurre e 6 bianche a manica corta, 4 azzurre e 8 bianche a manica lunga. Calcola la probabilità che, estraendone una a caso, sia azzurra o a manica corta. $\left[\frac{5}{7}\right]$

104 Da un mazzo di 40 carte vengono estratte contemporaneamente due carte. Calcola la probabilità che siano due sette. $\left[\frac{1}{130}\right]$

105 Da un sacchetto contenente 25 gettoni telefonici e 35 gettoni per distributori di bibite vengono estratti contemporaneamente due gettoni. Qual è la probabilità che siano entrambi telefonici? $\left[\frac{10}{59}\right]$

106 Un cestino contiene 25 biglietti a quadretti, 15 a righe e 8 colorati. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, siano uno a righe e uno colorato. $\left[\frac{5}{47}\right]$

107 Uno scaffale di un negozio contiene 58 tute, di cui 19 con pantalone lungo, 15 con pantalone corto e le rimanenti con la cerniera. Qual è la probabilità che, prendendone due contemporaneamente, siano una con cerniera e una con pantalone lungo? $\left[\frac{8}{29}\right]$

108 Dal sacchetto della tombola vengono estratti contemporaneamente due numeri. Calcola la probabilità che uno sia primo e l'altro multiplo di 10. $\left[\frac{24}{445}\right]$

109 Per assegnare i premi di una lotteria si estraggono tre biglietti senza reimmissione. Sapendo che 26 biglietti sono azzurri, 40 gialli e 14 verdi, calcola la probabilità che il primo sia giallo e gli altri due azzurri. $\left[\frac{25}{474}\right]$

110 Calcola la probabilità che, estraendo successivamente 2 carte da un mazzo di 40, senza rimettere quella estratta per prima nel mazzo, esse siano:
a) la prima una figura e la seconda una non figura;
b) una figura e un sette. $\left[\frac{14}{65}; \frac{4}{65}\right]$

111 Si hanno due mazzi da 40 carte. Da ciascuno viene estratta una carta. Calcola la probabilità che:
a) le due carte siano due re;
b) siano due figure;
c) almeno una carta sia un asso. $\left[\frac{1}{100}; \frac{9}{100}; \frac{19}{100}\right]$

112 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Calcola la probabilità che, estraendo una pallina da ciascuna urna, esse siano:
a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa. $\left[\frac{3}{20}; \frac{1}{4}; \frac{19}{40}\right]$

113 Si hanno due urne. La prima contiene 4 palline bianche e 6 rosse. La seconda ne contiene 3 bianche e 5 rosse. Si estrae una pallina dalla prima urna e la si inserisce nella seconda. Si estrae poi una pallina dalla seconda urna. Calcola la probabilità che le palline siano:
a) entrambe bianche;
b) bianca dalla prima urna e rossa dalla seconda;
c) una bianca e una rossa. $\left[\frac{8}{45}; \frac{2}{9}; \frac{19}{45}\right]$

LABORATORIO DI MATEMATICA

La probabilità con Excel

ESERCITAZIONE GUIDATA

Un sacchetto contiene n gettoni, di cui r rossi, g gialli, b blu. Costruiamo un foglio elettronico che riceva in ingresso i numeri n, r, g, controlli che siano accettabili, calcoli b, determini la probabilità dell'estrazione di un gettone blu, verifichi il risultato teorico con la simulazione di 24 estrazioni, supponendo che ogni volta il gettone venga rimesso nel sacchetto. Proviamo il foglio con $n = 90$, $g = 40$, $g = 20$.

- Attiviamo Excel e inseriamo le didascalie come vediamo in figura 1.
- Per il controllo dei dati digitiamo `= SE(C4 > 0; "accettabile,"; "errato,")` in D4, `= SE(C5 > C4; "errato,";"accettabile,")` in D5, `= SE(C6 > C4 - C5; "errato."; "accettabile.")` in D6 e `= SE(O(D4 = "errato,"; D5 = "errato,"; D6 = "errato."); ""; "=")` in D7.
- Per ottenere la probabilità di uscita del gettone blu, digitiamo `= C4 - (C5+C6)` in C7, `= SE(D7 = ""; "non è calcolabile"; C7/C4)` in C9 e la dichiariamo in formato percentuale.
- Per simulare le 24 estrazioni, digitiamo `= INT($C$4 * CASUALE()) + 1` in A12, copiamo la A12 sino alla D12 e copiamo la riga A12:D12 sino alla riga 17.
- Per abbinare i colori ai numeri casuali, digitiamo `= SE(A12 < $C$5 + 1; "rosso"; SE(A9 < $C$5 + $C$6 + 1; "giallo";"blu")` in A18, copiamo la A18 sino alla D18 e copiamo la riga A18:D18 sino alla riga 23.
- Per calcolare la percentuale di uscite del gettone blu digitiamo `= CONTA.SE(A18:D23; "blu")` in C25, digitiamo `= C25/24` in C26 e la dichiariamo in formato percentuale.
- In C4, C5, C6 inseriamo 90, 40, 20 e otteniamo il foglio di figura 1.
- Se battiamo il tasto F9 effettuiamo un'altra estrazione.

	A	B	C	D
1	Un problema sulla probabilità			
2				
3	Il numero dei gettoni			Il dato è
4	totale		90	accettabile,
5	di colore rosso		40	accettabile,
6	di colore giallo		20	accettabile.
7	di colore blu		30	=
8				
9	La probabilità del blu		33,3%	
10				
11	Proviamo 24 estrazioni			
12	1	61	88	58
13	56	73	16	22
14	21	20	78	64
15	15	45	23	70
16	71	22	27	88
17	43	1	52	63
18	rosso	blu	blu	giallo
19	giallo	blu	rosso	rosso
20	rosso	rosso	blu	blu
21	rosso	giallo	rosso	blu
22	blu	rosso	rosso	blu
23	giallo	rosso	giallo	blu
24				
25	Il blu è uscito		9	volte,
26	in percentuale		37,5%	.

▲ Figura 1

Nel sito: ► 1 esercitazione guidata ► 8 esercitazioni in più

Esercitazioni

Per ognuno dei seguenti problemi costruisci un foglio elettronico che riceva i dati d'ingresso indicati, controlli la loro accettabilità e determini le probabilità teoriche richieste. Nel foglio fai comparire i risultati delle prove casuali consigliate per verificare i risultati teorici, supponi che dopo ogni estrazione l'oggetto venga rimesso nel contenitore.

1 Un'urna contiene n gettoni di cui v verdi ed r rossi. Dati n e v, calcola la probabilità di estrarre un gettone rosso e quella di estrarre un gettone verde. Simula cento estrazioni.

2 Un cestino contiene n biglie, di cui r rosse, b bianche, 20 arancioni. Dati n e r, calcola le probabilità che, estraendone due, escano una rossa e una arancione in un ordine qualsiasi. Estrai una coppia di biglie, osserva se il caso è favorevole e poi rimettile nel cestino.

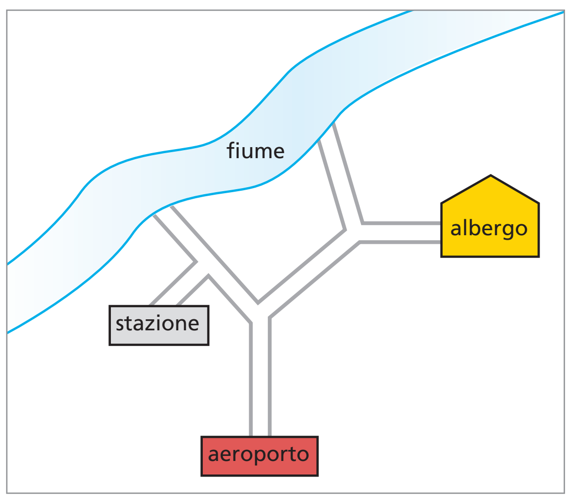
3 Determina le probabilità di estrarre da un mazzo di 40 carte: un asso, una carta di denari, il due di coppe. Per tre volte simula quaranta estrazioni registrando sul quaderno i risultati del foglio elettronico.

4 Un sacchetto contiene n gettoni, di cui a verdi, $a + 4$ gialli, $a - 8$ blu. Dato n, determina la probabilità dell'estrazione per ogni tipo di gettone. Simula centoventi estrazioni.

Matematica per il cittadino

TURISTA PER CASO

Un turista arriva in città dall'aeroporto e deve recarsi in albergo. Non conoscendo la strada, decide di affidarsi al caso e a ogni bivio lancia una moneta: quando esce testa, gira a destra, altrimenti svolta a sinistra.



1. Considerate le strade disegnate nella figura a lato, qual è la probabilità che il turista arrivi in albergo seguendo il percorso più breve?

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{4}$ D $\frac{4}{3}$

2. Qual è la probabilità che egli raggiunga il fiume?

A 50% B 25% C 30% D 75%

3. Uscendo dall'aeroporto, il turista deve passare prima dalla stazione e poi dirigersi in albergo. Pur non conoscendo la strada, sa che se per errore raggiunge il fiume, deve tornare indietro fino al primo bivio che incontra, per poi lanciare di nuovo la moneta. Inoltre, se passa per la seconda volta da uno stesso bivio, lo riconosce e sceglie la strada corretta senza lanciare nuovamente la moneta. Al primo bivio, il turista lancia la moneta e gira a sinistra; in seguito lancia la moneta due volte e riesce a raggiungere i suoi due obiettivi. Spiega passo per passo il percorso compiuto.

4. Riferendoti alla prima domanda, modifica il disegno in modo tale che la probabilità che il turista raggiunga l'albergo dall'aeroporto, percorrendo il tragitto più breve, si riduca della metà.

Verifiche di fine capitolo

TEST

Nel sito: ▶ questi test interattivi ▶ 30 test interattivi in più

1 Quali fra i seguenti eventi è impossibile?

A Lunedì prossimo ci sarà la nebbia.
B Lanciando un dado uscirà il numero 3.
C Domenica prossima tutte le squadre di serie A pareggeranno.
D Sabato andrò al mare.
E Lanciando un dado uscirà un numero a due cifre.

2 La probabilità di un evento aleatorio è:

A uguale a 1.
B uguale a 0.
C compresa tra 0 e 1.
D maggiore di 1.
E minore di 0.

3 Un sacchetto contiene 20 dischetti numerati da 1 a 20. Dobbiamo estrarre un dischetto con stampato sopra un numero pari e multiplo di 3. Quanti sono i casi favorevoli?

A 15 B 3 C 13 D 5 E 14

4 Da un mazzo di 40 carte viene estratta una carta. Quanti sono i casi favorevoli, se la carta deve essere di cuori o un tre?

A 13
B $\frac{13}{40}$
C 14
D 1
E $\frac{7}{20}$

5 Un sacchetto contiene 21 dischetti, ciascuno con stampata una lettera dell'alfabeto italiano. Qual è la probabilità di estrarre un disco con una consonante?

A $\frac{5}{21}$
B $\frac{16}{21}$
C $\frac{5}{16}$
D $\frac{16}{23}$
E 16

6 Due eventi si dicono incompatibili se:

A $E_1 \cup E_2 \neq \emptyset$.
B $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.
C $E_1 \cap E_2 = E_1 \cdot E_2$.
D $E_1 \cup E_2 = E_1 + E_2$.
E $E_1 \cup E_2 = \frac{E_1}{E_2}$.

7 Se due eventi E_1 ed E_2 sono compatibili allora $p(E_1 \cup E_2)$ è uguale a:

A $p(E_1) \cdot p(E_2)$.
B $p(E_1 + E_2)$.
C $p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.
D $p(E_1) \cup p(E_2)$.
E $p(E_1) + p(E_2)$.

8 Un astuccio contiene 5 matite rosse, 2 blu, 3 verdi e 6 gialle. Qual è la probabilità di estrarre una matita gialla o blu?

A $\frac{3}{64}$
B $\frac{1}{2}$
C $\frac{2}{5}$
D $\frac{1}{8}$
E $\frac{3}{8}$

9 Due eventi si dicono indipendenti se:

A $E_1 \cup E_2 \neq \emptyset$.
B $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$.
C $p(E_1) = p(E_2)$.
D $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$.
E $p(E_1) + p(E_2) = 1$.

10 Se due eventi sono indipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è:

A $p(E_1) + p(E_2)$.
B $p(E_1) \cdot p(E_2) - p(E_2 | E_1)$.
C $p(E_1) \cdot p(E_2)$.
D $p(E_1) \cdot p(E_2 | E_1)$.
E $\frac{p(E_2)}{p(E_1)}$.

11 Le frasi che seguono sono riferite a due eventi compatibili E_1 ed E_2. Una sola è *falsa*, quale?

A Il verificarsi di E_1 non esclude il verificarsi contemporaneamente di E_2.

B Se si verifica E_2 si può verificare contemporaneamente E_1.

C L'intersezione di E_1 con E_2 è diversa dall'insieme vuoto.

D $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

E $p(E_1 \cap E_2) = 0$.

12 Le frasi che seguono sono riferite a due eventi indipendenti E_1 ed E_2. Una sola è *falsa*, quale?

A Il verificarsi di E_1 non modifica la probabilità di E_2.

B Il verificarsi di E_2 non modifica la probabilità di E_1.

C $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2)$.

D $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2)$.

E $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$.

13 Da un'urna contenente 3 palline rosse e 10 palline bianche ne vengono estratte tre, una dopo l'altra, senza rimetterle ogni volta nel contenitore. Qual è la probabilità che siano tutte e tre rosse?

A $\frac{3}{13}$ B $\frac{6}{2187}$ C $\frac{1}{286}$ D $\frac{10}{13}$ E $\frac{7}{13}$

14 Su 7800 lanci di un dado, è uscito 1200 volte il numero 5. Qual è la probabilità statistica che con quel dado esca il numero 5?

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{5}{6}$ C $\frac{5}{7800}$ D $\frac{1}{1200}$ E $\frac{2}{13}$

15 Un gioco è equo se, chiamate con $S(A)$ e $S(B)$ le somme puntate dai due giocatori, $p(A)$ e $p(B)$ le rispettive probabilità, vale:

A $S(A) + S(B) = p(A) + p(B)$.

B $S(A) \cdot S(B) = p(A) \cdot p(B)$.

C $p(A) : p(B) = S(A) : S(B)$.

D $S(A) : p(B) = S(B) : p(A)$.

E $S(A) \cdot p(A) = S(B) \cdot p(B)$.

SPIEGA PERCHÉ

16 Si consideri il lancio di un dado e i due eventi E_1 = «uscita di un numero pari» ed E_2 = «uscita di un numero multiplo di 3». L'evento $E_1 \cup E_2$ ha probabilità $p(E_1 \cup E_2) = \frac{2}{3}$ diversa dal valore di $p(E_1) + p(E_2)$. Perché?

17 Se E_1 e E_2 sono incompatibili, allora $p(E_1 | E_2) = 0$. Perché?

18 Due eventi E_1 ed E_2 si dicono indipendenti se $p(E_1) = p(E_1 | E_2)$. Perché?

19 Se $p(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{5}$ e $p(E_1) = \frac{1}{2}$, dimostra se è possibile che il risultato di $p(E_2)$ sia $\frac{4}{5}$. Perché?

20 Per calcolare la probabilità di un evento, che si verifica quando si devono verificare due o più eventi successivi, uno dopo l'altro, in modo prestabilito, si applica il teorema del prodotto logico. Perché?

ESERCIZI

Nel sito: ▶ 15 esercizi in più

21 Nello scaffale di una biblioteca vi sono 10 libri gialli, 20 romanzi e 30 libri di fantascienza. Calcola la probabilità che venga scelto a caso un libro giallo o un libro di fantascienza. $\left[\frac{2}{3}\right]$

22 In un mazzo di quaranta carte le figure sono 12 e i semi sono quattro: coppe, bastoni, denari e spade. Qual è la probabilità di estrarre a caso una figura o una carta di bastoni? $\left[\frac{19}{40}\right]$

23 In un'urna ci sono 100 palline di colore bianco, rosso e nero. Le palline bianche sono 10. La probabilità di pescare una pallina nera è $\frac{3}{5}$.
Qual è la probabilità di pescare una pallina rossa? Quante sono le palline rosse e le palline nere? $\left[\frac{3}{10}; 30; 60\right]$

24 La probabilità di estrarre un oggetto da un'urna è $\frac{2}{15}$. Calcola quante volte, approssimativamente, l'oggetto può essere estratto in 450 estrazioni con reimmissione. [60]

25 Si lancia 900 volte un dado a sei facce. Quante volte è probabile che si verifichi l'evento «esce il numero 1 o il numero 6»? [300]

26 Un sacchetto contiene 600 biglie bianche e nere. Sapendo che in 900 estrazioni con reimmissione sono uscite 375 biglie nere, calcola il probabile numero di biglie bianche nel sacchetto. [350]

27 Un cestino contiene 100 biglie di cui 50 rosse, 30 bianche e 20 nere. Calcola la probabilità che, estraendone due contemporaneamente, si ottengano una biglia bianca e una nera. $\left[\frac{4}{33}\right]$

28 Calcola la probabilità di estrarre 4 assi da un mazzo di 40 carte in questo ordine: asso di bastoni, asso di coppe, asso di denari, asso di spade. $\left[\frac{1}{2\,193\,360}\right]$

29 Da un mazzo di 40 carte si estrae una carta, la si rimette nel mazzo e si estrae quindi una seconda carta. Calcola la probabilità che:
a) le due carte siano due assi;
b) le due carte siano dello stesso seme;
c) le due carte siano una di bastoni l'altra di denari in un ordine qualsiasi.
$\left[\text{a) } \frac{1}{100}; \text{ b) } \frac{1}{16}; \text{ c) } \frac{1}{8}\right]$

30 Un'urna contiene 10 palline rosse, 6 palline bianche e 4 palline nere. Calcola la probabilità di estrarre una pallina rossa oppure una pallina nera. $\left[\frac{7}{10}\right]$

31 Lanciamo un dado e una moneta contemporaneamente. Calcola la probabilità che si verifichi l'evento «esce 6 ed esce testa». $\left[\frac{1}{12}\right]$

32 In un'urna ci sono 10 biglie bianche e 20 nere. Si estraggono contemporaneamente due biglie. Calcola la probabilità che siano entrambe nere. $\left[\frac{38}{87}\right]$

33 Un'urna contiene 10 biglie bianche e 20 nere. Si estrae una biglia, la si rimette nell'urna e quindi si procede a una seconda estrazione. Calcola la probabilità che le biglie estratte siano entrambe bianche. $\left[\frac{1}{9}\right]$

34 Calcola quante volte ci aspettiamo di fare 6 lanciando 120 volte un dado a sei facce. [20]

35 Due giocatori, *A* e *B*, giocano all'estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte, contenente 12 figure. *A* vince se estrae una figura; in caso contrario vince *B*. Calcola quanto deve puntare *B*, affinché il gioco sia equo, se il giocatore *A* punta 1,50 euro. [3,50 euro]

36 Una maestra ha rilevato che il 20% dei suoi alunni non sa riconoscere le parole accentate e il 25% non usa correttamente la lettera «h». Ritenendo i due tipi di errori indipendenti, calcola la probabilità che ha un alunno di commettere entrambi gli errori e quella di commettere il primo o il secondo. [0,05; 0,4]

37 Calcola la probabilità che, estraendo successivamente due carte da un mazzo da 40, senza rimettere la carta estratta nel mazzo, esse siano due carte di bastoni o due figure. Calcola la probabilità anche nel caso in cui la prima carta estratta venga rimessa nel mazzo. $\left[\frac{9}{65}; \frac{47}{320}\right]$

38 Un candidato deve sostenere un esame di ammissione a un corso universitario. Vi sono due commissioni che esaminano i candidati. Si è rilevato che la prima commissione boccia con una percentuale del 30% e la seconda del 40%. Calcola la probabilità che ha un candidato, scegliendo una commissione a caso, di essere ammesso al corso universitario. [65%]

METTITI ALLA PROVA

Nel sito: ▶ 8 esercizi in più

39 In una certa località del Trentino, rilevazioni statistiche accurate consentono di affermare che, mediamente, in ogni settimana vi sono 2 giorni in cui piove e 5 giorni in cui non piove. Inoltre, l'alternarsi dei giorni in cui piove e di quelli in cui non piove è completamente casuale. Qual è la probabilità che, in una data settimana, non piova né il sabato né la domenica?

A $\frac{2}{7}$ C $\frac{10}{21}$ E $\frac{3}{5}$.

B $\frac{5}{14}$ D $\frac{25}{49}$

(*Olimpiadi della matematica, Gara provinciale*, 1995)

40 Quattro ragazzi vogliono telefonare tutti contemporaneamente alle rispettive ragazze. Ogni cellulare può funzionare su quattro frequenze distinte. Se due cellulari si attivano sulla stessa frequenza, la comunicazione cade. Se ogni ragazzo non sa che frequenza scelgono gli altri tre, qual è la probabilità che tutti e quattro riescano a parlare con le loro ragazze?

A $\frac{3}{32}$ C $\frac{1}{256}$ E $\frac{9}{128}$

B $\frac{3}{64}$ D $\frac{1}{16}$

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede*, 2003)

TEST YOUR SKILLS

Nel sito: ▶ 7 esercizi in più

41 TEST A bag contains a number of marbles of which 80 are red, 24 are white and the rest are blue. If the probability of randomly selecting a blue marble from this bag is $\frac{1}{5}$, how many blue marbles are there in the bag?

A 25 B 26 C 27 D 28 E 29

(USA *North Carolina State High School Mathematics Contest*, 2003)

42 Suppose there is a seven-sided die with the property that, when it is rolled, there is an equal probability of getting 1, 2, 3, 4, 5, 6, or 7. If this die is rolled twice, then what is the probability that the sum of the two rolls is even?

(USA *Bay Area Math Meet, BAMM, Bowl Sampler*, 1995)

$\left[\frac{25}{49}\right]$

43 Two different numbers are chosen at random from the set {0, 1, 2, 3, 4}. What is the probability that their sum is greater than their product?

(CAN *Canadian Open Mathematics Challenge, COMC*, 2003)

$\left[\frac{7}{10}\right]$

44 TEST A drawer contains 64 socks. Each sock is one of 8 colors, and there are 8 socks of each color. If the socks in the drawer are thoroughly mixed and you randomly choose two of the socks, then what is the probability that these two socks will have the same color?

A $\frac{1}{7}$ D $\frac{7}{64}$

B $\frac{1}{8}$ E $\frac{9}{64}$

C $\frac{1}{9}$

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2001)

45 A quiz consisting of four multiple-choice questions has four available options (a, b, c, or d) for each question. If a person guesses at every question, what is the probability of answering all questions correctly?

(USA *Southeast Missouri State University: Math Field Day*, 2005)

$\left[\frac{1}{256}\right]$

GLOSSARY

available: disponibile	**to guess**: tentare, provare	**to roll**: far rotolare
die: dado	**marble**: biglia, pallina di vetro	**sock**: calzino
drawer: cassetto	**multiple-choice**: a scelta multipla	**thoroughly**: completamente
even: pari	**randomly, at random**: a caso	**twice**: due volte