ESERCIZI IN PIÙ

LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO LETTERALI

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Risolviamo la seguente disequazione nell'incognita x:

$$4x^2 + 4ax - 3a^2 > 0, \quad \text{con } a > 0.$$

Calcoliamo il discriminante dell'equazione associata $4x^2 + 4ax - 3a^2 = 0$:

$$\frac{\Delta}{4} = 4a^2 - 4(-3a^2) = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2.$$

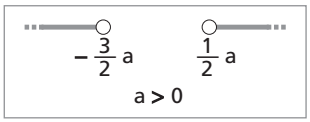
Calcoliamo le radici:

$$x = \frac{-2a \pm 4a}{4} = \begin{cases} -\frac{3}{2}a \\ \frac{1}{2}a \end{cases}$$

Poiché $a > 0$, $-\frac{3}{2}a$ è negativo, mentre $\frac{1}{2}a$ è positivo; allora:

$$-\frac{3}{2}a < \frac{1}{2}a.$$

Poiché il coefficiente di x^2 è $4 > 0$ e $\Delta > 0$, il trinomio $4x^2 + 4ax - 3a^2$ è positivo per valori esterni all'intervallo delle radici



e la disequazione è verificata per:

$$x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{1}{2}a.$$

E se non ci fosse stata l'ipotesi $a > 0$? Avremmo dovuto fare la **discussione**.

Essendo $\frac{\Delta}{4} = 16a^2$, si ha:

$\Delta > 0$ per $a \neq 0$,
$\Delta = 0$ per $a = 0$.

Distinguiamo tre casi.

- Se $a > 0$, abbiamo già ottenuto:
  $x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{1}{2}a.$
- Se $a = 0$, si ha $4x^2 > 0$ verificata per qualsiasi valore di x tranne che per $x = 0$ (soluzione doppia dell'equazione associata).
  Le soluzioni quindi si hanno per $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- Se $a < 0$, risulta $-\frac{3}{2}a > 0$ e $\frac{1}{2}a < 0$, quindi
  $\frac{1}{2}a < -\frac{3}{2}a \quad (a < 0).$
  Le soluzioni si hanno per $x < \frac{1}{2}a \vee x > -\frac{3}{2}a.$

Risolvi le seguenti disequazioni nell'incognita x.

2 $(a-2)x^2 + 9 \geq 0$ $\left[a \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}; a < 2, \frac{-3}{\sqrt{2-a}} \leq x \leq \frac{3}{\sqrt{2-a}}\right]$

3 $ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$ $\left[a > 0, x < -\frac{1}{a} \vee x > a; a < 0, a < x < -\frac{1}{a}; a = 0, x > 0\right]$

4 $x^2 + (a-4)x - 4a \leq 0$ $[a < -4, 4 \leq x \leq -a; a > -4, -a \leq x \leq 4; a = -4, x = 4]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

5 $2x^2 - kx - k^2 > 0$ $\left[k > 0, x < -\frac{k}{2} \vee x > k; k < 0, x < k \vee x > -\frac{k}{2}; k = 0, x \neq 0\right]$

6 $(a-2)x^2 - 2ax + a + 2 \geq 0$ $\left[a < 2,\ \frac{a+2}{a-2} \leq x \leq 1; a = 2,\ x \leq 1; a > 2,\ x \leq 1 \vee x \geq \frac{a+2}{a-2}\right]$

7 $x^2 - bx - 12b^2 > 0$ $[b < 0, x < 4b \vee x > -3b; b = 0, \forall x \neq 0; b > 0, x < -3b \vee x > 4b]$

8 $2[1 + a(x - 4a)] \geq 2 - x^2$ $[a < 0, x \leq 2a \vee x \geq -4a; a = 0, \forall x \in \mathbb{R}; a > 0, x \leq -4a \vee x \geq 2a]$

9 $x^2 + a\left(\frac{x}{3} + \frac{a}{2}\right) < a\left(\frac{a}{3} - \frac{x}{2}\right)$ $\left[a > 0, -\frac{a}{2} < x < -\frac{a}{3}; a = 0, \text{imp.}, a < 0, -\frac{a}{3} < x < -\frac{a}{2}\right]$

10 $x(ax - 3) < \frac{ax^2}{2} - \frac{4}{a}$ $\left[a > 0, \frac{2}{a} < x < \frac{4}{a}; a = 0, \text{perde sign.}; a < 0, x < \frac{4}{a} \vee x > \frac{2}{a}\right]$

11 $ax^2 - x^2 - a^2x + x \geq 0 \quad (a \geq 1)$ $[a = 1, \forall x \in \mathbb{R}; a > 1, x \leq 0 \vee x \geq a + 1]$

12 $6x^2 - ax - a^2 \leq 0$ $\left[a < 0, \frac{a}{2} \leq x \leq -\frac{a}{3}; a = 0, x = 0; a > 0, -\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{a}{2}\right]$

13 $\frac{a^2 + 3x^2}{3} - a\left(a - \frac{3x}{2}\right) - \frac{a^2}{6}\left(\frac{5x}{a} + \frac{7}{2}\right) > 0 \quad (a > 0)$ $\left[x < -\frac{3}{2}a \vee x > \frac{5}{6}a\right]$

14 $-x^2 + \frac{5ax}{4} + \frac{6a^2}{4} > 0$ $\left[a < 0, 2a < x < -\frac{3}{4}a; a = 0, \nexists x \in \mathbb{R}; a > 0, -\frac{3a}{4} < x < 2a\right]$

15 $a(x - 3)^2 > x(1 - 6a) + a(5 + 4ax) \quad \left(a > \frac{1}{2}\right)$ $\left[x < \frac{1}{a} \vee x > 4a\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi