ESERCIZI IN PIÙ

LE EQUAZIONI E LE DISEQUAZIONI PARAMETRICHE

Le equazioni parametriche

1 Stabilisci per quali valori di k l'equazione in x

$$2(x-k)=-5(x+1)$$

ha soluzione minore del doppio della soluzione dell'equazione $3kx-5=x-2k$.

$\left[k<-\frac{13}{3} \vee \frac{1}{3}<k<\frac{5}{2}\right]$

2 Per quali valori reali del parametro k la soluzione x dell'equazione

$$(k^2-3)x+6x-3k^2x+k=0$$

verifica la disequazione $x^2-x \leq 0$?

$\left[[-1;0] \cup \left[\frac{3}{2};+\infty\right[\right]$

3 **ESERCIZIO GUIDA**

Data l'equazione nell'incognita x

$$(k+4)x^2+2(k-1)x-(k-1)=0,$$

determiniamo per quali valori di k la somma delle radici è minore di 4.

Determiniamo per quali valori di k l'equazione ha soluzioni reali:

$$\frac{\Delta}{4}=(k-1)^2+(k+4)(k-1)=k^2+1-2k+k^2-k+4k-4=2k^2+k-3.$$

Imponiamo la condizione di realtà delle radici $\left(\frac{\Delta}{4} \geq 0\right)$:

$$2k^2+k-3 \geq 0.$$

Poniamo la condizione che la somma delle radici sia minore di 4:

$$\frac{-2(k-1)}{k+4}<4.$$

Mettiamo poi a sistema le due condizioni e risolviamo:

$$\begin{cases} 2k^2+k-3 \geq 0 \\ \dfrac{-2(k-1)}{k+4}<4 \end{cases}$$

- *Prima disequazione*. Ricaviamo le soluzioni dell'equazione:

$$2k^2+k-3=0, k=\frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{4}=\frac{-1 \pm 5}{4}= \begin{cases} -\dfrac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione sono $-\frac{3}{2}$ e 1, pertanto la disequazione è risolta da:

$$k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq 1.$$

- *Seconda disequazione*. Risolviamo:

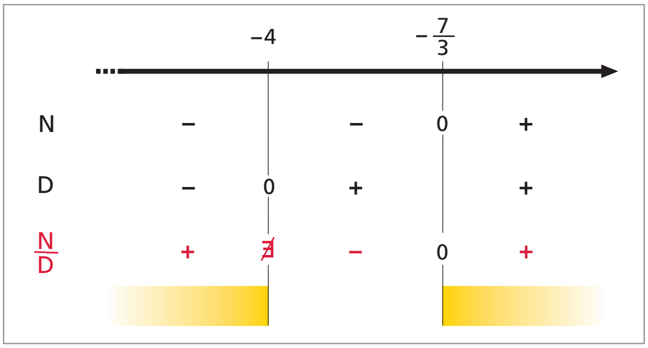
$$\frac{-2k+2-4k-16}{k+4}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{-6k-14}{k+4}<0 \quad \rightarrow \quad \frac{3k+7}{k+4}>0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$$3k+7>0 \quad \rightarrow \quad k>-\frac{7}{3}$$

$$k+4>0 \quad \rightarrow \quad k>-4.$$

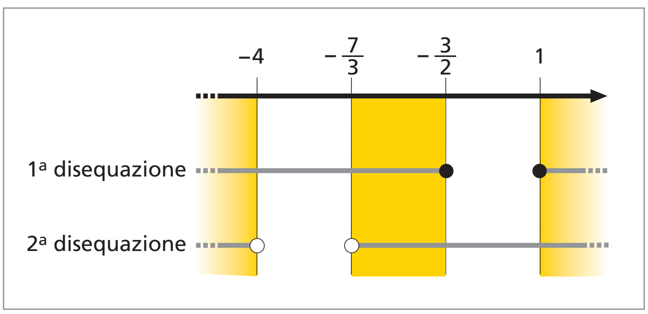
Compiliamo il quadro dei segni:



La soluzione della seconda disequazione è:

$$k<-4 \vee k>-\frac{7}{3}.$$

- *Soluzione del sistema*. Facciamo un grafico di sistema con le soluzioni trovate:



Il sistema è verificato per $k<-4 \vee -\frac{7}{3}<k \leq -\frac{3}{2} \vee k \geq 1$.

Per tali valori la somma delle radici è minore di 4.

Date le seguenti equazioni parametriche di secondo grado nell'incognita x, stabilisci per quali valori del parametro le soluzioni sono reali.

4 $x^2-2(a-2)x+9=0$ $[a \leq -1 \vee a \geq 5]$

5 $2x^2-ax+2=0$ $[a \leq -4 \vee a \geq 4]$

6 $x^2-2kx-k^2+8=0$ $[k \leq -2 \vee k \geq 2]$

7 $(a+2)x^2-2x-a=0$ $[\forall a \in \mathbb{R}]$

8 $kx^2-(k+3)x-2k=0$ $[\forall k \in \mathbb{R}]$

9 Stabilisci per quali valori di k l'equazione, in x, $x^2 - kx + 2x - \frac{k^2 - 5k}{4} = 0$ ammette due soluzioni reali distinte. $\left[k < \frac{1}{2} \vee k > 4\right]$

10 Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(k-2)x^2 - 2kx - 3 + 2k = 0$ non ammette soluzioni reali. $[k < 1 \vee k > 6]$

11 Trova per quali valori di k l'equazione in x

$$(6k-1)x - 3kx^2 - 3k + 2 = 0$$

non ammette soluzioni reali. $\left[k < -\frac{1}{12}\right]$

12 Determina per quali valori di k l'equazione in x

$$(k+1)x^2 - 2(k+2)x + 4(k+1) = 0$$

ha soluzioni la cui somma sia maggiore di -2. $[-1 < k \leq 0]$

13 Stabilisci per quali valori di k l'equazione, in x, $x^2 - 4(k+3)x + 6(k^2 - 5k + 6) = 0$ ammette soluzioni di segno opposto. (Suggerimento. Se le soluzioni sono opposte, il loro prodotto è negativo…) $[2 < k < 3]$

14 Determina per quali valori di k l'equazione, in x, $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ ammette radici reali e negative. (Suggerimento. Se le radici sono negative, il prodotto è positivo e la somma è negativa.) $[1 \leq k < 2]$

15 Determina il valore di k per cui l'equazione, in x, $(k-3)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$ ha:

a) soluzioni reali distinte;

b) soluzioni opposte.

$\left[\text{a) } k > \frac{3}{4} \wedge k \neq 3; \text{ b) } \nexists\ k \text{ accettabile}\right]$

16 Data l'equazione in x

$$(k+2)x^2 - 2(k+1)x - (1-k) = 0,$$

stabilisci per quali valori del parametro k essa ha:

a) radici reali distinte;

b) radici reali e positive;

c) radici reali e negative;

d) radici reali e discordi;

e) radici opposte.

$[\text{a) } k > -3 \wedge k \neq -2; \text{ b) } -3 < k < -2 \vee k > 1; \text{ c) } \nexists\ k \in \mathbb{R}; \text{ d) } -2 < k < 1; \text{ e) } k = -1]$

17 Data l'equazione

$$x^2 - 2(a-3)x + a^2 + 2a = 0,$$

stabilisci per quale valore del parametro a:

a) le soluzioni x_1 e x_2 sono reali;

b) il prodotto delle soluzioni è maggiore di 3.

$\left[\text{a) } a \leq \frac{9}{8}; \text{ b) } a < -3 \vee 1 < a \leq \frac{9}{8}\right]$

18 Nell'equazione $(k-2)x^2 - 2(k+3)x + k = 0$ determina per quale valore del parametro k:

a) le soluzioni x_1 e x_2 sono reali;

b) la somma delle soluzioni è maggiore o uguale a 6;

c) il prodotto delle soluzioni è minore di 1.

$\left[\text{a) } k \geq -\frac{9}{8}; \text{ b) } -2 < k \leq \frac{9}{2}; \text{ c) } -\frac{9}{8} \leq k < 2\right]$

Le disequazioni parametriche

19 **ESERCIZIO GUIDA**

Determiniamo per quali valori di k la disequazione parametrica in x

$$(k+2)x^2 - 2(k+1)x + k - 1 > 0$$

ammette come soluzioni i valori di x esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata.

Dobbiamo porre due condizioni:

1. il discriminante dell'equazione associata deve essere maggiore o uguale a zero, affinché le radici siano reali;
2. il coefficiente a di x^2 deve essere positivo, in modo che le soluzioni della disequazione data siano esterne all'intervallo delle radici.

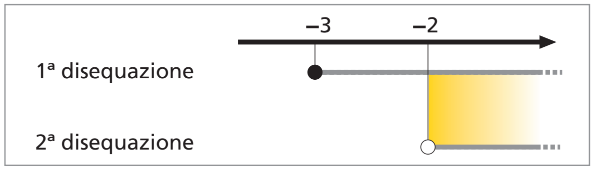
Calcoliamo i valori di k che soddisfano le due condizioni:

1. $\dfrac{\Delta}{4} = (k+1)^2 - (k+2)(k-1) = \cancel{k^2} + \cancel{2k} + 1 - \cancel{k^2} - \cancel{2k} + k + 2 = k + 3 \geq 0$;

2. $k + 2 > 0$.

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} k + 3 \geq 0 \\ k + 2 > 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k \geq -3 \\ k > -2 \end{cases}$$



Per $k > -2$ la disequazione ammette come soluzioni i valori di x esterni all'intervallo delle radici.

Per ogni disequazione parametrica nell'incognita x, determina i valori del parametro affinché sia soddisfatta la condizione scritta a fianco.

20 $x^2 - kx \geq 0$; verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\forall\, k \in \mathbb{R} - \{0\}]$

21 $x^2 + m \geq 0$; verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $[m \geq 0]$

22 $kx^2 + 1 < 0$; verificata per nessun x reale. $[k \geq 0]$

23 $(k^2 - 1)x^2 - 1 > 0$; verificata per nessun valore reale di x. $[-1 \leq k \leq 1]$

24 $2x^2 - 6x + k > 0$; verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $\left[k < \dfrac{9}{2}\right]$

25 $x^2 - 4kx + 5 < 0$; verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\nexists\, k \in \mathbb{R}]$

26 $kx^2 - 2x + 1 \geq 0$; verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $[k \geq 1]$

27 $x^2 + 2(1 - k)x - 4k > 0$; verificata per valori esterni all'intervallo delle radici. $[\forall\, k \in \mathbb{R} - \{-1\}]$

28 $9mx^2 - 4x + m < 0$; verificata $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\left[m < -\dfrac{2}{3}\right]$