ESERCIZI IN PIÙ

I NUMERI IMMAGINARI

L'insieme dei numeri reali è stato introdotto come ampliamento dell'insieme dei numeri razionali, per poter eseguire l'estrazione di radice, quale per esempio $\sqrt{2}$.
L'estrazione di radice però non è un'operazione interna all'insieme dei numeri reali. La scrittura $\sqrt{-4}$ non ha alcun significato nell'insieme dei numeri reali: non esiste alcun numero reale che, elevato al quadrato, dia -4.
Per poter dare un significato all'espressione $\sqrt{-4}$ occorre ampliare $\mathbb{R}$ introducendo un nuovo insieme numerico: l'insieme dei numeri immaginari.
Chiamiamo **unità immaginaria** i la radice quadrata di -1 e scriviamo: $i=\sqrt{-1}$. Il quadrato dell'unità immaginaria vale perciò -1, quindi $i^2=-1$.
Ogni radice quadrata di numeri reali negativi può essere considerata un multiplo di i; per esempio:

$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i.$$

I **numeri immaginari** sono il prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria:

$$a\cdot i=i\cdot a, \text{con } a\in\mathbb{R}.$$

In particolare $1\cdot i=i\cdot 1=i$ e $0\cdot i=i\cdot 0=0$, quindi anche 0 è un numero immaginario.
Nell'insieme $\mathbb{I}$ dei numeri immaginari possiamo definire le seguenti operazioni.

Addizione e sottrazione di due numeri immaginari:

$$ai+bi=(a+b)i;$$
$$ai-bi=(a-b)i.$$

ESEMPIO
$2i+3i=(2+3)i=5i;$
$7i-i=(6-1)i=5i.$

La somma o la differenza di due numeri immaginari è un numero immaginario. L'addizione e la sottrazione sono quindi due operazioni interne nell'insieme $\mathbb{I}$.
L'addizione gode delle proprietà commutativa, associativa, esistenza dell'elemento neutro (lo zero), esistenza dell'opposto.

Prodotto e quoziente fra un numero immaginario e un numero reale:

$$ai\cdot b=b\cdot ai=(ab)\cdot i;\ ai:b=(a:b)i(b\neq 0).$$

ESEMPIO
$3\cdot 6i=18i;$
$5i:2=(5:2)i=\dfrac{5}{2}i.$

Il prodotto o il quoziente di un numero immaginario per un numero reale è un numero immaginario.

Prodotto e quoziente di due numeri immaginari:

$$ai\cdot bi=a\cdot b\cdot i^2=a\cdot b(-1)=-ab;$$
$$ai:(bi)=a:b.$$

ESEMPIO
$2i\cdot(-7i)=14;$
$-6i:(2i)=-3.$

Il prodotto o il quoziente di due numeri immaginari è quindi un numero reale.
In particolare, il quadrato di un numero immaginario è sempre un numero reale negativo, per esempio:

$$(-5i)^2=(-5i)\cdot(-5i)=-25.$$

Potenza di un numero immaginario:

$$(ai)^n=a^n i^n.$$

Per il calcolo di i^n conviene tenere presente il modo in cui si susseguono i risultati delle potenze di i riportati nella tabella. Le potenze si ripetono nell'ordine: 1, i, -1, $-i$.
Le potenze con esponente pari valgono 1 oppure -1, quelle con esponente dispari i o $-i$. Una potenza di i con esponente n è uguale alla potenza che ha per base i e per esponente il resto della divisione fra n e 4.

ESEMPIO
$(7i)^2=49i^2=-49;$
$(2i)^7=2^7i^7=128i^3=-128i.$

LE POTENZE DI i

i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}	...
1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	...

I numeri immaginari

1 **ESERCIZIO GUIDA**

Scriviamo $\sqrt{-12}$ sotto forma di numero immaginario.

Ricordiamo che $i^2 = -1$. Possiamo utilizzare il procedimento del «portar fuori» nel caso di $\sqrt{-1}$:

$$\sqrt{-12} = \sqrt{(-1)12} = \sqrt{i^2 \cdot 2^2 \cdot 3} = 2i\sqrt{3}.$$

Oppure, tenendo presente che $i = \sqrt{-1}$, possiamo scrivere:

$$\sqrt{-12} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{12} = i \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2i\sqrt{3}.$$

Scrivi le seguenti radici sotto forma di numeri immaginari.

2 $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-25}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-100}$. $[2i; 5i; 3i; 10i]$

3 $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-5}$; $\sqrt{-8}$; $\sqrt{-27}$. $[\sqrt{3}i; \sqrt{5}i; 2\sqrt{2}i; 3\sqrt{3}i]$

4 $\frac{1}{6}\sqrt{-144}$; $\frac{3}{4}\sqrt{-\frac{16}{9}}$; $\frac{5}{3}\sqrt{-\frac{9}{125}}$. $\left[2i; i; \frac{\sqrt{5}}{5}i\right]$

5 $\sqrt{-\frac{9}{4}}$; $5\sqrt{-\frac{12}{25}}$; $\frac{7}{2}\sqrt{-\frac{16}{98}}$. $\left[\frac{3}{2}i; 2\sqrt{3}i; \sqrt{2}i\right]$

6 $\frac{4}{3}\sqrt{-\frac{81}{48}}$; $-\frac{2}{5}\sqrt{-\frac{50}{4}}$; $-\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{27}{25}}$. $\left[\sqrt{3}i; -\sqrt{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{5}i\right]$

7 $\sqrt{\frac{9}{25}-1}$; $\sqrt{1-\frac{81}{49}}$; $\sqrt{\frac{6}{25}-\frac{3}{5}}$. $\left[\frac{4}{5}i; \frac{4\sqrt{2}}{7}i; \frac{3}{5}i\right]$

8 $\sqrt{-x^2}$; $\sqrt{-9a^2}$; $\sqrt{-4a^2b^4}$. $[|x|i; 3|a|i; 2|a|b^2i]$

9 $\sqrt{-\frac{a^2}{b^2}}$; $\frac{b}{3a}\sqrt{-\frac{27a^2}{b^3}}$ $(a > 0, b > 0)$; $-5\sqrt{-\frac{x^5}{25}}$ $(x \geq 0)$. $\left[\left|\frac{a}{b}\right|i; \sqrt{\frac{3}{b}}i; -x^2\sqrt{x}i\right]$

10 $\sqrt{(3a-2b)(3a+2b)-(-3a)^2}$. $[2|b|i]$

Il calcolo con i numeri immaginari

11 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo le quattro operazioni fra i numeri immaginari $2i$ e $5i$.

Trattiamo i numeri immaginari come monomi nella lettera i; dobbiamo però ricordare che ***i* è un numero** e che $\boldsymbol{i^2 = -1}$:

$$2i + 5i = (2+5)i = 7i$$
$$2i - 5i = (2-5)i = -3i$$
$$2i \cdot 5i = 2 \cdot 5 \cdot i \cdot i = 10 \cdot (-1) = -10$$
$$2i : 5i = \frac{2\cancel{i}}{5\cancel{i}} = \frac{2}{5}.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

12 $i - 2i$; $\quad 4i + 2i$; $\quad 8i - 3i$.

13 $i + \frac{1}{2}i$; $\quad i - \frac{1}{2}i$; $\quad \frac{1}{3}i + \frac{1}{2}i$.

14 $i \cdot 9i$; $\quad i \cdot \left(-\frac{1}{2}i\right)$; $\quad \frac{3}{4}i \cdot \frac{2}{9}i$.

15 $3i : i$; $\quad 5i : 2i$; $\quad 4i : \left(-\frac{1}{2}i\right)$.

16 $\left[(2i - 3i) \cdot \frac{4}{3}i\right] : \frac{2}{3}$ $\quad [2]$

17 $\left(\frac{1}{3}i - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{1}{3}i + \frac{1}{2}i\right) : \frac{5}{4i \cdot 9i}$ $\quad [-1]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni, contenenti potenze di numeri immaginari.

18 i^4; $\quad i^5$; $\quad i^6$; $\quad i^7$.

19 $-i^8$; $\quad -i^{12}$; $\quad -i^{33}$; $\quad -i^{49}$.

20 $(\sqrt{2}i)^2$; $\quad (-3\sqrt{3}i)^3$; $\quad (-2\sqrt{5}i)^2$.

21 $-\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}i\right)^2$; $\quad -\left(-\frac{3}{5}\sqrt{5}i\right)^3$; $\quad \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^5$.

22 $i^5 + 2i^{17} - 3i^{25}$; $\quad 2i^{14} + 7i^{22} - 5i^{30}$.

23 $\dfrac{i^{31} - 5i^{39} + 4i^{47}}{2i^{21} + 3i^{41}}$ $\quad [0]$

24 $\dfrac{\frac{4}{5}i^{17} - \frac{1}{3}i^{29}}{\frac{1}{2}i^{36} + \frac{1}{5}i^{52}}$ $\quad \left[\frac{2}{3}i\right]$

25 $\dfrac{\frac{1}{2}i^{21} - \frac{1}{3}i^{41}}{\frac{3}{2}i^{31} - \frac{2}{3}i^{35}} \cdot (2i^{17} + 3i^5)$ $\quad [-i]$