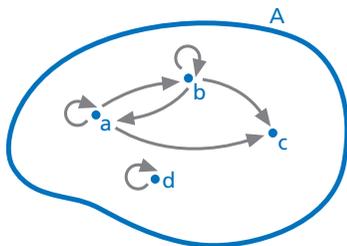


ESERCIZI IN PIÙ

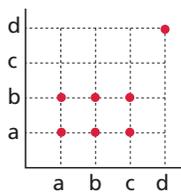
ESERCIZI DI FINE CAPITOLO

1 TEST Nell'insieme A della figura, la relazione rappresentata gode della o delle proprietà:

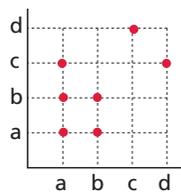


- A solo riflessiva.
- B solo transitiva.
- C transitiva e antisimmetrica.
- D transitiva e simmetrica.
- E simmetrica e riflessiva.

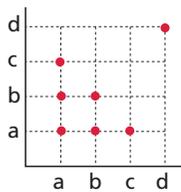
2 TEST Indica quale dei seguenti grafici cartesiani rappresenta la relazione definita nell'esercizio 1.



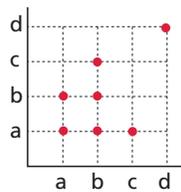
A



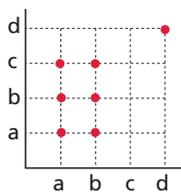
D



B



E



C

3 TEST La relazione «essere discendente di», definita nell'insieme degli abitanti di Roma, è:

- A d'ordine stretto parziale.
- B d'ordine stretto totale.
- C d'equivalenza.
- D d'ordine largo parziale.
- E d'ordine largo totale.

4 TEST L'insieme quoziente di un insieme A è determinato da una relazione:

- A biunivoca.
- B d'equivalenza.
- C d'ordine stretto.
- D d'ordine parziale.
- E d'ordine totale.

5 TEST Tra i seguenti sottoinsiemi di $A \times A$, essendo $A = \{2, 3, 4, 6\}$, indica quello che rappresenta la relazione « x divide y ».

- A $\{(2; 4), (2; 6), (3; 6)\}$.
- B $\{(2; 2), (2; 4), (2; 6), (4; 2), (6; 2), (3; 3), (3; 6), (6; 3), (6; 6)\}$.
- C $\{(2; 2), (2; 4), (2; 6), (3; 3), (3; 6), (4; 4), (6; 6)\}$.
- D Insieme vuoto.
- E $\{(2; 4), (4; 2), (2; 6), (6; 2), (3; 6), (6; 3)\}$.

6 Verifica che la relazione \mathcal{R} da \mathbb{Z} a \mathbb{Z}

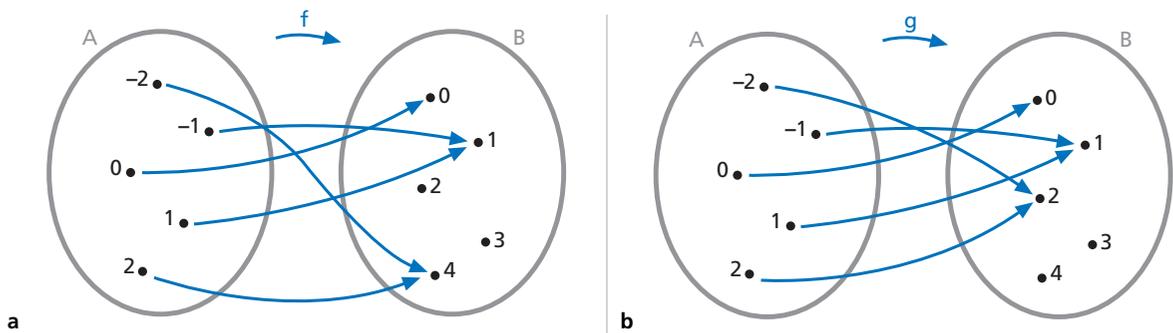
$$x \mathcal{R} y \text{ se e solo se } x + y \text{ è pari}$$

è una relazione di equivalenza. Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente da essa individuato?

7 Considera i numeri naturali minori di 100 e la relazione « $x \mathcal{R} y$ se e solo se x e y danno lo stesso resto se sono divisi per 4». Verifica che è una relazione di equivalenza e rappresenta le sue classi di equivalenza.

A quali classi appartengono i numeri 8, 38, 59, 73?

8 Sono date le funzioni f e g rappresentate in figura.



Con quali espressioni analitiche puoi scrivere le due funzioni? Sono iniettive, suriettive o né iniettive né suriettive? Sostituendo A con \mathbb{Z} e B con \mathbb{N} , sono possibili le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$? Sono uguali? Perché?

$$[f(x) = x^2; g(x) = |x|]$$

9 Considera la funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita dalla legge $y = 2x + 5$. Indica se f è iniettiva o suriettiva. Qual è il suo codominio C ?

Considera ora la funzione $g: C \rightarrow \mathbb{N}$ definita dalla legge $z = 2y - 4$. Determina il suo codominio D , la funzione composta $g \circ f$ e le sue immagini dei numeri 3, 7, 12.

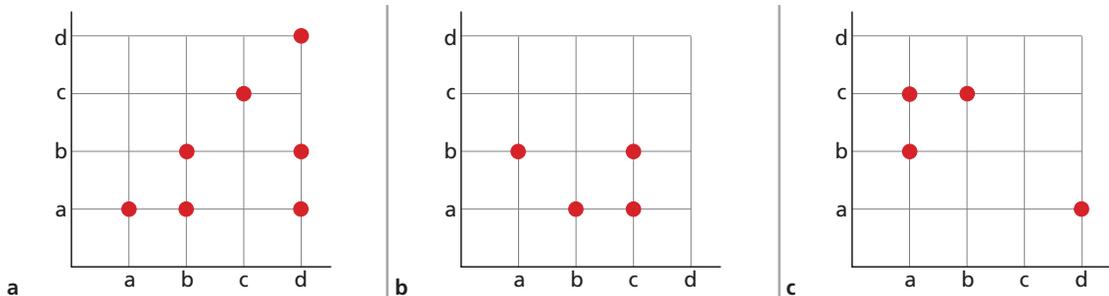
10 Data la funzione $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ definita dalla legge $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$, determina:

a) l'immagine e la controimmagine di -1 , cioè $f(-1)$ e $f^{-1}(-1)$;

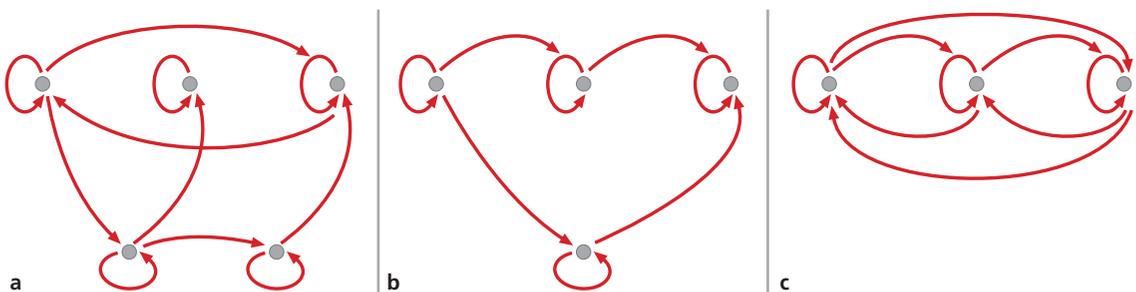
b) per quale valore di x risulta $f(x) = f^{-1}(x)$.

$$[a) -\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}; b) 1]$$

11 Fra i diagrammi illustrati in figura individua quelli che rappresentano una relazione d'ordine. In tal caso metti in ordine gli elementi seguendo lo schema dell'esercizio guida che trovi nel libro al paragrafo 4.

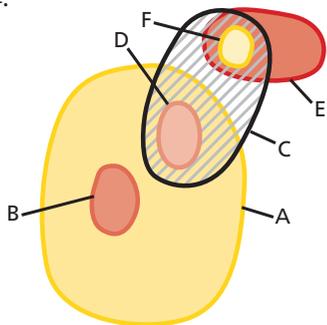


12 Stabilisci quale fra i seguenti grafi rappresenta una relazione di equivalenza.

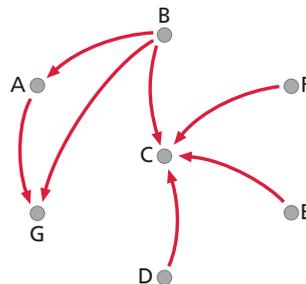


13 I segni delle carte da poker (cuori, picche, fiori, quadri) sono ordinati mediante la relazione « x vince y » con la frase: «Come quando fuori piove». Disegna il grafo relativo.

14 Ripeti l'esercizio precedente, con gli insiemi A, B, C, D, E, F illustrati in figura, considerando la relazione \subset .



15 Nel seguente grafo è descritta la relazione \subseteq fra alcuni insiemi.



Disegna un diagramma di Eulero-Venn con insiemi tali da soddisfare la relazione.

Problemi

16 Considera la tabella a doppia entrata posta a lato.

- a) Individua le coppie in relazione fra loro e scrivi di quale relazione si tratta.
- b) Rappresenta il prodotto cartesiano $A \times B$ e in esso evidenzia gli elementi della relazione.
- c) Definisci la relazione inversa. Le due relazioni sono entrambe funzioni? Perché?
- d) In base a quali caratteristiche è riconoscibile una funzione in un diagramma cartesiano?

	B	1	2	3	4
A					
4		x			
8			x		
10					
12				x	
16					x

[a] a è quadruplo di b

17 I due insiemi $F = \{(1; 2), (2; 3), (3; 4), (4; 5), (5; 6)\}$ e $G = \{(2; 4), (3; 9), (4; 16), (5; 25), (6; 36)\}$, entrambi sottoinsiemi di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, sono formati da coppie ordinate di elementi che si corrispondono nelle funzioni numeriche f e g .

- a) Determina l'insieme delle coppie ordinate che si corrispondono nella funzione composta $g \circ f$.
- b) Scrivi le leggi matematiche che descrivono f, g e $g \circ f$. Esprimi le tre funzioni a parole.

[a] $\{(1; 4), (2; 9), (3; 16), (4; 25), (5; 36)\}$; b) $f(x) = x + 1$, successivo di un numero, $g(x) = x^2$, quadrato di un numero, $g(f(x)) = (x + 1)^2$, quadrato del successivo]

18 Individua l'espressione matematica della funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa a ogni numero reale il quadrato della somma tra 1 e il numero stesso.

- a) Rappresenta tale funzione in un diagramma cartesiano.
- b) Stabilisci se si tratta di una funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva.
- c) Indica possibili sottoinsiemi di partenza e di arrivo, affinché la funzione risulti invertibile.
- d) Rappresenta nello stesso diagramma il grafico della funzione inversa.

19 Sono date le funzioni $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = 2(5 - x) - 1$, che hanno come dominio rispettivamente gli insiemi $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x < 7\}$ e $B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ divisore di } 12\}$ e come insieme di arrivo \mathbb{Z} . Detti C e D rispettivamente il codominio di f e quello di g , determina gli insiemi $C \cup D, C \cap D$.

$\{-15, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}; \{1, 3, 5, 7\}$

20 Considera la funzione di \mathbb{Z} in \mathbb{Z} così definita: $x \mapsto 2ax + 3b$, dove a e b appartengono all'insieme \mathbb{Z} . Come devono essere a e b affinché questa funzione sia iniettiva? [$a \neq 0, \forall b$]

21 Considera le due funzioni seguenti: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \mapsto 2x + 3$; $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \mapsto 2x^2 + 1$.
Determina le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$ e studiane le relative proprietà.

$$[g(f(x)) = 8x^2 + 24x + 19; f(g(x)) = 4x^2 + 5]$$

22 Sono dati l'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$ e la funzione f di proporzionalità diretta da A a B tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 3, f(2) = 6$.

- Di quale funzione si tratta? Quali sono gli elementi di B ?
- Definisci la relazione inversa g e stabilisci se anche g è una funzione.
- Esegui $f \circ g$ e $g \circ f$. Che cosa ottieni?
- La composizione di funzioni è sempre commutativa? Spiega la tua risposta.

[a) $y = 3x, B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$; b) y è un terzo di x , sì; c) relazione identica; d) no]

23 Sia A l'insieme delle parti di $V = \{a, e, i, o, u\}$. Considera la seguente relazione \mathcal{R} definita in $A \times A$:

$$x \mathcal{R} y \leftrightarrow x \subseteq y.$$

Di quale proprietà gode tale relazione? È di ordine largo o stretto?

[riflessiva, antisimmetrica e transitiva; ordine largo]

24 Nell'insieme degli esseri umani, considera la seguente relazione:

$$x \mathcal{R} y \leftrightarrow x \text{ ha la stessa mamma di } y.$$

- Verifica che si tratta di una relazione di equivalenza.
- Da che cosa è costituito l'insieme quoziente?

Nello stesso insieme considera la relazione che associa a ogni essere umano la propria mamma.

- Verifica che essa è una funzione.
- Qual è il suo codominio?
- È possibile determinare la funzione inversa?

25 La velocità v di un oggetto che percorre una distanza s e il tempo t impiegato a percorrerlo sono grandezze inversamente proporzionali. Un oggetto A deve percorrere una distanza assegnata pari a 6 m e un oggetto B una distanza di 20 m. Scrivi le leggi che esprimono il variare della velocità di A e B in funzione del tempo. Sapendo che A impiega 1,99 secondi per percorrere la distanza assegnata e che B ha una velocità di 3,1 metri al secondo, determina quale dei due oggetti è più veloce e quale impiega meno tempo. [$B; A$]

26 Dato l'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} considera la relazione:

$$x \mathcal{R} y \leftrightarrow |x| \leq |y|.$$

Si tratta di una relazione d'ordine?

Motiva la risposta.

27 Considera l'insieme $R = \{\text{rettangoli del piano}\}$ e i seguenti quattro insiemi riferiti a R :

$B = \{\text{misure delle basi}\}$, $H = \{\text{misure delle altezze}\}$, $P = \{\text{misure dei perimetri}\}$ e $A = \{\text{misure delle aree}\}$.

- a) La funzione $f: R \rightarrow B$, tale che a ogni rettangolo $r \in R$ associa la misura della sua base $b \in B$, è una funzione biunivoca?
- b) La relazione inversa f^{-1} è una funzione?
- c) La funzione $g: B \times H \rightarrow A$, tale che a ogni $(b; h) \in B \times H$ associa l'area $a \in A$ del rettangolo di base b e altezza h , è una biiezione?
- d) La corrispondenza $h: P \rightarrow A$, tale che un elemento p di P e un elemento a di A sono in relazione se e solo se esiste almeno un rettangolo r di cui p è il perimetro e a è l'area, è una funzione?

[a) f è suriettiva ma non iniettiva; b) f^{-1} non è una funzione;
c) g è suriettiva ma non iniettiva; d) h non è una funzione]