ESERCIZI IN PIÙ

I NUMERI COMPLESSI

L'equazione $x^2 - 6x + 25 = 0$ non ha soluzioni nell'insieme dei numeri reali; infatti, applicando la formula ridotta, si ottiene $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-16}$.

Interpretando $\sqrt{-16}$ come numero immaginario, cioè $\sqrt{-16} = \sqrt{16}\,\sqrt{-1} = 4i$, le soluzioni precedenti possono essere riscritte come somma o differenza di un numero reale e di un numero immaginario, ossia $x_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Si chiama **numero complesso** la somma di un numero reale e di un numero immaginario: $a + bi$, con a, $b \in \mathbb{R}$. Il numero a si dice **parte reale** del numero complesso, mentre bi si dice **parte immaginaria**. L'insieme dei numeri complessi è indicato con $\mathbb{C}$.

Se $a = 0$, il numero complesso coincide con il numero immaginario bi; viceversa, se la parte immaginaria è nulla, il numero complesso coincide con il numero reale a. Perciò l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e l'insieme dei numeri immaginari $\mathbb{I}$ possono essere considerati dei sottoinsiemi dell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$.

Due numeri complessi si dicono **coniugati** se hanno la stessa parte reale e la parte immaginaria opposta. Per esempio, $3 + 2i$ e $3 - 2i$ sono coniugati.

Nell'insieme $\mathbb{C}$ le equazioni di secondo grado **ammettono sempre due soluzioni** distinte oppure coincidenti. Data l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, si possono verificare i seguenti casi:

- $\Delta > 0$: due soluzioni reali distinte;
- $\Delta = 0$: due soluzioni reali coincidenti;
- $\Delta < 0$ e $b = 0$: due soluzioni immaginarie opposte, cioè del tipo $\pm ki$;
- $\Delta < 0$ e $b \neq 0$: due soluzioni complesse coniugate, cioè del tipo $h \pm ki$, con la stessa parte reale h e parte immaginaria opposta, $+ki$ e $-ki$.

Nell'insieme $\mathbb{C}$ le operazioni di addizione e di moltiplicazione sono definite utilizzando regole analoghe a quelle dell'addizione e moltiplicazione di binomi.

Addizione e sottrazione

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

ESEMPIO

$(2 + 3i) + (-3 + 4i) = -1 + 7i.$

L'addizione gode delle proprietà commutativa e associativa. Esiste l'elemento neutro, lo zero, e per ogni elemento esiste l'elemento opposto.

La somma di due numeri complessi coniugati è un numero reale doppio della parte reale degli addendi.

ESEMPIO

$(4 + 3i) + (4 - 3i) = 8.$

L'operazione di **sottrazione** è definita in modo analogo all'addizione:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Moltiplicazione e divisione

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

ESEMPIO

$$(2 + 3i) \cdot (-3 + 4i) = -6 + 8i - 9i + 12i^2 =$$
$$= -6 - i + 12 \cdot (-1) = -18 - i.$$

Anche la moltiplicazione gode delle proprietà commutativa e associativa, ed esiste l'elemento neutro, 1. Vale inoltre la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Il prodotto di due numeri complessi coniugati è un numero reale dato dalla somma del quadrato della parte reale e del quadrato del coefficiente della parte immaginaria.

ESEMPIO

$(2 - 5i) \cdot (2 + 5i) = 4 + 25 = 29.$

Per definire la **divisione**, il quoziente di due numeri complessi può essere pensato come una frazione algebrica avente per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore:

$$(a + bi) : (c + di) = \frac{a + bi}{c + di}.$$

Eseguiamo la divisione moltiplicando numeratore e denominatore per $c - di$ (il coniugato del denominatore):

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di)(c - di)} =$$
$$= \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

ESEMPIO

$$(3 - 2i) : (4 + i) = \frac{3 - 2i}{4 + i} =$$
$$= \frac{(3 - 2i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17}i.$$

I numeri complessi e le equazioni di secondo grado

Calcola il valore dei seguenti radicali nell'insieme dei numeri immaginari.

1 $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-b^2}$; $\sqrt{-b^2-1}$. $[\pm 3i; \pm\sqrt{3}\,i; \pm ib; \pm i\sqrt{b^2+1}]$

2 $\sqrt{-48}$; $\sqrt{-2}$; $-\frac{1}{2}\sqrt{-2}$; $\frac{1}{3}\sqrt{-9}$. $\left[\pm 4i\sqrt{3}; \pm i\sqrt{2}; \mp i\frac{\sqrt{2}}{2}; \pm i\right]$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado in $\mathbb{C}$.

3 $x^2-2x+2=0$ $[1\pm i]$

4 $x^2+4=0$ $[\pm 2i]$

5 $x^2+7=0$ $[\pm\sqrt{7}i]$

6 $x^2+4x+20=0$ $[-2\pm 4i]$

7 $5x^2-8x+5=0$ $\left[\frac{4}{5}\pm\frac{3}{5}i\right]$

8 $x^2-4x+7=0$ $[2\pm\sqrt{3}i]$

9 $x^2-4x+15=0$ $[2\pm\sqrt{11}i]$

10 $x^2+10ax+29a^2=0$ $[-5a\pm 2ai]$

L'addizione e la sottrazione di numeri complessi

11 **ESERCIZIO GUIDA**

Eseguiamo l'addizione e la sottrazione fra i numeri complessi $4+3i$ e $-5+2i$.

Addizione

Scriviamo l'addizione, mettendo i due numeri tra parentesi:

$(4+3i)+(-5+2i)=$

Sommiamo tra loro le parti reali e le parti immaginarie:

$=(4-5)+(3i+2i)=-1+5i.$

Più rapidamente:

$(4+3i)+(-5+2i)=$
$=4+3i-5+2i=-1+5i.$

Sottrazione

Scriviamo la sottrazione, mettendo i due numeri tra parentesi:

$(4+3i)-(-5+2i)=$

Trasformiamo la sottrazione in un'addizione, cambiando il segno del sottraendo:

$=(4+3i)+(5-2i)=$

Procediamo come nel caso dell'addizione:

$=(4+5)+(3i-2i)=9+i.$

Più rapidamente:

$(4+3i)-(-5+2i)=4+3i+5-2i=9+i.$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni fra numeri complessi.

12 $(4+2i)+(4-2i)$; $(6-3i)+(-6+3i)$.

13 $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)$.

14 $(2-3i)-\left(\frac{1}{7}i\right)$; $\frac{3}{4}i+\left(2-\frac{1}{3}i\right)$.

15 $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$; $\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}i\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{3}i\right)$.

La moltiplicazione di numeri complessi

16 ESERCIZIO GUIDA

Moltiplichiamo i seguenti numeri complessi:

a) $2 - 3i$ e $-6 + i$; b) $3 - 2i$ e $3 + 2i$.

a) Scriviamo la moltiplicazione, mettendo i fattori tra parentesi:

$$(2 - 3i)(-6 + i) =$$

Utilizziamo la regola di moltiplicazione di due binomi (senza dimenticare che i è un numero e $i^2 = -1$):

$$= -12 + 2i + 18i - 3i^2 =$$
$$= -12 + 20i + 3 =$$
$$= -9 + 20i.$$

b) I numeri dati sono complessi coniugati. Il loro prodotto è un numero complesso reale:

$$(3 - 2i)(3 + 2i) =$$

Poiché $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$:

$$= 9 - 4i^2 =$$
$$= 9 + 4 = 13.$$

Esegui le seguenti moltiplicazioni fra numeri complessi.

17 $(1 - i)(1 + i)$; $(2 - 3i)(2 + 3i)$.

18 $(2 - 5i)(1 + i)$; $(8 + 2i)(-4 - 2i)$.

19 $(6 + 3i)(6 + 2i)$; $(-7 + 2i)(7 + 2i)$.

20 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right)(2 + 3i)$; $\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3}i\right)\left(-\frac{5}{4} - \frac{3}{2}i\right)$.

La divisione di numeri complessi

21 ESERCIZIO GUIDA

Eseguiamo la divisione fra i numeri complessi $2 + i$ e $1 - i$.

Scriviamo il quoziente sotto forma di frazione:

$$\frac{2 + i}{1 - i} =$$

Moltiplichiamo numeratore e denominatore per il complesso coniugato del denominatore, ossia $1 + i$:

$$= \frac{2 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} =$$

Moltiplichiamo i due numeratori e, al denominatore, applichiamo il prodotto notevole $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$:

$$= \frac{2 + 2i + i + i^2}{1 - i^2} =$$

Sommiamo i termini simili e sostituiamo a i^2 il valore -1 (al denominatore otteniamo $1 - i^2 = 1 - (-1) = 1 + 1$):

$$= \frac{2 + 3i - 1}{1 + 1} = \frac{1 + 3i}{2} =$$

Separiamo la parte reale dalla parte immaginaria. Il quoziente cercato è:

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Calcola i seguenti quozienti fra numeri complessi.

22 $(1+i):i$; $\quad 2:i$; $\quad 1:(3-2i)$.

23 $\dfrac{3+4i}{2i}$; $\quad \dfrac{-6-2i}{5i}$; $\quad \dfrac{8-3i}{2i}$.

24 $\dfrac{73}{8-3i}$; $\quad \dfrac{40}{4+2i}$; $\quad \dfrac{22i}{3-i}$.

25 $\dfrac{1-i}{2+i}$; $\quad \dfrac{2-i}{2+3i}$; $\quad \dfrac{3-i}{3+2i}$.

La potenza di numeri complessi

Quadrato

26 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il quadrato di $-2-i$.

$(-2-i)^2 =$

Applichiamo la regola del quadrato del binomio $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$:

$= 4 + i^2 + 4i =$

Sostituiamo -1 a i^2:

$= 4 - 1 + 4i =$

Eseguiamo la somma nella parte reale; il risultato è:

$= 3 + 4i$.

Osservazione. Si ottiene lo stesso risultato se invece di calcolare $(-2-i)^2$ si calcola $(2+i)^2$. Formalmente possiamo pensare ai seguenti passaggi algebrici:

$(-2-i)^2 = [-1(2+i)]^2 = (2+i)^2$.

Calcola il quadrato dei seguenti numeri complessi.

27 $1+i$; $\quad 1-i$; $\quad -1+i$.

28 $1+2i$; $\quad 1-2i$; $\quad -1+2i$.

29 $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$; $\quad \dfrac{1}{4}-i$; $\quad -5-\dfrac{1}{5}i$.

30 $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}i$; $\quad -2+\dfrac{4}{5}i$; $\quad \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}i$.

Cubo

31 **ESERCIZIO GUIDA**

Calcoliamo il cubo di $5-2i$.

$(5-2i)^3 =$

Sviluppiamo il cubo del binomio, applicando la regola $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$:

$= 5^3 + 3\cdot(5^2)(-2i) + 3\cdot(5)\cdot(-2i)^2 + (-2i)^3 =$

$= 125 - 150i + 15\cdot 4i^2 - 8i^3 =$

Teniamo presente che $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$:

$= 125 - 150i - 60 + 8i =$

Sommiamo i termini reali e i termini immaginari, ottenendo il risultato:

$= 65 - 142i$.

Calcola il cubo dei seguenti numeri complessi.

32 $1+i$; $\quad 1-i$; $\quad 2+i$.

32 $2+3i$; $\quad 3-2i$; $\quad 1-5i$.

34 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}i$; $\quad 2+\dfrac{1}{4}i$; $\quad 1+\dfrac{2}{3}i$.

35 $-\dfrac{1}{2}-2i$; $\quad \dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{2}i$; $\quad \dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}i$.

Espressioni con i numeri complessi

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

36 $i\sqrt{2}+2i\sqrt{2}$; $\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\left(\dfrac{2}{3}i-\dfrac{1}{9}i\right)$. $\quad \left[3\sqrt{2}\,i; -\dfrac{5\sqrt{3}}{18}\right]$

37 $\left(\dfrac{5i}{\sqrt{5}}-\dfrac{40i}{\sqrt{5}}\right)\cdot\dfrac{i\sqrt{5}}{7}$ $\quad [5]$

38 $(\sqrt{3}-i\sqrt{2})\cdot(2\sqrt{3}-i\sqrt{2})$; $\quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2i\right)+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2i\right)$. $\quad [4-3\sqrt{6}\,i; \sqrt{2}-4i]$

39 $\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$; $\quad \left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}-2i\right)+\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}+2i\right)$. $\quad \left[-\dfrac{17}{50}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i; \sqrt{5}\right]$

40 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)+\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{6i}{\sqrt{2}}\right)$; $\quad \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}i\right)-\left(-\dfrac{6}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3}i\right)$. $\quad \left[\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{7i\sqrt{2}}{2}; \dfrac{4}{3}\sqrt{3}+\dfrac{5}{6}i\right]$

41 $\left(\dfrac{6}{5}-\sqrt{3}\,i\right)\left(\dfrac{6}{5}+\sqrt{3}\,i\right)$; $\quad (\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)(2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\,i)$. $\quad \left[\dfrac{111}{25}; 10\right]$

42 $\dfrac{2\sqrt{2}-i}{\sqrt{2}+4i}$; $\quad \dfrac{3+3i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; $\quad \dfrac{2\sqrt{2}-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{3}}$. $\quad \left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i; \dfrac{3}{2}(\sqrt{3}\,i-1); \dfrac{1-3\sqrt{6}\,i}{5}\right]$

43 $(\sqrt{2}+3i)^2$; $\quad (\sqrt{3}-4i)^2$; $\quad (5+\sqrt{2}\,i)^2$. $\quad [-7+6\sqrt{2}\,i; -13-8\sqrt{3}\,i; 23+10\sqrt{2}\,i]$

44 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-i\right)^2$; $\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{3}{4}i\right)^2$; $\quad \left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2$. $\quad \left[-\dfrac{1+2\sqrt{2}\,i}{2}; -\dfrac{1}{16}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\,i; \dfrac{7}{4}-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\,i\right]$

45 $(\sqrt{2}+i)^3$; $\quad (3-\sqrt{3}\,i)^3$; $\quad (\sqrt{3}+i\sqrt{2})^3$. $\quad [-\sqrt{2}+5\,i; -24\sqrt{3}\,i; 7i\sqrt{2}-3\sqrt{3}]$

46 $3+2i-\dfrac{5}{4}-\left(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{3}\right)i-\left(2-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{16}{15}i$ $\quad \left[\dfrac{1}{4}+3i\right]$

47 $(3+2i)(3-2i)+(2-4i)3i-(6+2i)^2$ $\quad [-(7+18i)]$

48 $\left[(2-3i):\dfrac{13}{2+3i}-(4+3i)\left(\dfrac{4}{25}-\dfrac{3}{25}i\right)\right]:12$ $\quad [0]$

49 $\left(\dfrac{1+2i}{i-1}+\dfrac{39i}{2+3i}-\dfrac{19}{2}\right)\cdot 2i+6i$ $\quad [-9+6i]$

50 $\dfrac{(2i^{28}-i^{45})^2}{2i^{41}}$ $\quad \left[-2-\dfrac{3}{2}i\right]$

51 $\dfrac{18i^{18}+7i^{6}}{(2i^{52}+i^{53})^2}:\dfrac{4i^{36}-2i^{20}}{(2i^{8}+i^{7}-i^{20})^2}$ $\quad [4+3i]$

52 $\dfrac{-2i^{11}\sqrt{6}}{i^{8}\sqrt{3}+i^{5}-i^{17}}+\dfrac{3-i^{19}\sqrt{2}}{i^{5}\sqrt{2}}+\dfrac{3(1+i^{9}\sqrt{2})}{1+i^{23}\sqrt{2}}$ $\quad \left[\dfrac{5}{2}i\sqrt{2}\right]$

53 $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{1-i\sqrt{3}}+\dfrac{(\sqrt{3}-i)^3}{5i}+\left[\dfrac{7(2+i\sqrt{3})}{1+4i\sqrt{3}}+i\sqrt{3}\right]:\dfrac{1}{2}$ $\quad \left[\dfrac{2}{5}\right]$