ESERCIZI IN PIÙ
LA SIMILITUDINE

1 Considera un parallelogramma $ABCD$ e traccia le diagonali AC e BD che si intersecano in M. Traccia una parallela RS (con R e S appartenenti ai lati del parallelogramma) a una diagonale che interseca l'altra diagonale in Q.
Dimostra che $RQ \cong QS$.

2 Disegna un triangolo isoscele ABC e con centro nel punto medio O della base AB traccia la semicirconferenza tangente ai lati AC e CB. Traccia poi un'altra tangente a questa semicirconferenza che intersechi i lati AC e BC in D ed E.
Dimostra che i triangoli AOD, EOD, EOB sono simili e quindi che AO è medio proporzionale tra AD e BE.

3 Disegna un trapezio rettangolo $ABCD$ e sia O il punto medio del lato AD perpendicolare alle basi. Dimostra che se l'angolo $C\hat{O}B$ è retto:

a) i triangoli COD e AOB sono simili;

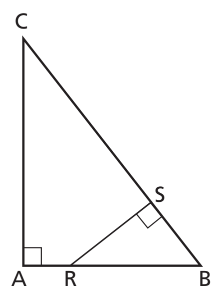
b) la circonferenza di raggio OA è tangente al lato BC.

4 Considera un quadrilatero inscritto in una semicirconferenza e traccia le sue diagonali. Individua le coppie di triangoli simili.

5 Dimostra che in un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza ognuno dei lati obliqui è medio proporzionale tra l'altezza e il diametro della circonferenza.

6 Dimostra che in un triangolo isoscele inscritto in una circonferenza la base è medio proporzionale tra il doppio dell'altezza e il doppio della differenza tra il diametro e l'altezza.

7 Dimostra che i triangoli della figura sono simili. Scrivi almeno due proporzioni che coinvolgano:
- i loro perimetri;
- i raggi delle circonferenze inscritte;
- le loro aree.



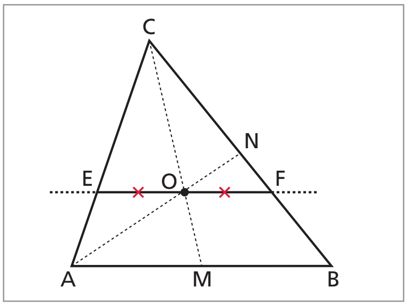
8 Disegna un trapezio di basi b e c. Traccia le diagonali e il segmento parallelo alle basi e passante per il punto di intersezione delle diagonali. Determina la misura di tale segmento.
$\left[\dfrac{2bc}{b+c}\right]$

9 Dimostra che se in un triangolo rettangolo un cateto è congruente alla proiezione dell'altro cateto sull'ipotenusa, allora il primo cateto è congruente alla sezione aurea dell'ipotenusa.

10 In un triangolo isoscele ABC di base BC, la bisettrice BD dell'angolo B determina un triangolo BDC simile ad ABC. Dimostra che AD è sezione aurea di AC.

11 **DIMOSTRAZIONE GUIDATA**

Dato il triangolo ABC, con il suo baricentro O, traccia per O una retta parallela alla base AB che interseca AC in E e BC nel punto F. Dimostra che O è il punto medio di EF e che EF è congruente ai due terzi di AB.



Ipotesi
1. $AM \cong \ldots\ldots$;
2. $BN \cong \ldots\ldots$;
3. O è il baricentro;
4. $AB \parallel \ldots\ldots$;
5. $O \in \ldots\ldots\ldots$.

Tesi
1. $EO \cong \ldots\ldots\ldots$;
2. $EF \cong \frac{2}{3} \ldots\ldots$.

Dimostrazione

- *Dimostra che i triangoli AMC ed EOC sono simili.*
  L'angolo $E\hat{C}O$ è in ....;
  $C\hat{E}O \cong C\hat{A}M$ perché .... di rette parallele. Quindi i due triangoli sono simili per il .... criterio di similitudine dei triangoli.
  Pertanto è soddisfatta la seguente proporzione:
  $AM : EO = CM : \ldots\ldots$.

- *Dimostra in modo analogo che i triangoli MBC e OFC sono simili.*
  L'angolo $F\hat{C}O$ è in ....;
  $C\hat{F}O \cong C\hat{B}M$ perché .... di rette parallele. Quindi i due triangoli sono simili per il .... criterio di similitudine dei triangoli.
  Pertanto è soddisfatta la seguente proporzione:
  $MB : OF = CM : \ldots\ldots$

- *Dimostra la tesi 1.*
  Confrontando le due proporzioni, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza vale
  $AM : EO = MB : \ldots;$
  tenendo presente l'ipotesi 1, poiché $AM \cong MB$, *allora* anche $EO \cong \ldots$.

- *Dimostra la tesi 2.*
  Per la proprietà del baricentro $CO \cong 2 \ldots\ldots\ldots$;
  perciò $CM \cong CO + \ldots\ldots \cong 3 \ldots\ldots$, da cui si ricava che $\frac{CO}{CM} \cong \frac{2 \cdot \ldots\ldots}{3 \cdot \ldots\ldots} \cong \frac{\ldots}{\ldots}$.
  I triangoli EFC e ABC sono simili e il rapporto di similitudine è ....
  Pertanto $\frac{EF}{AB} \cong \frac{\ldots}{\ldots}$, cioè $EF \cong \ldots\ldots AB$.

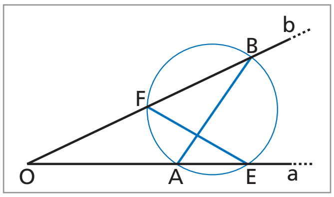
12 Disegna il trapezio $ABCD$ e sia AB la base maggiore. Prolunga i lati non paralleli AD e BC, rispettivamente dalla parte di D e di C, e indica con P il loro punto di intersezione. Dimostra che le distanze di P dalle basi sono proporzionali alle basi stesse.

13 Disegna due triangoli ABC e $A'B'C'$ aventi le altezze AH e $A'H'$ congruenti. Conduci due rette parallele alle basi BC e $B'C'$ e da queste equidistanti. La prima parallela incontra i lati AB e AC, rispettivamente nei punti P e Q, e la seconda incontra i lati $A'B'$ e $A'C'$, rispettivamente in P' e Q'.
Dimostra che $PQ : P'Q' = BC : B'C'$.

14 **ESERCIZIO GUIDA**

È dato un angolo acuto $a\hat{O}b$. Sulla semiretta Oa fissa un punto A e su Ob un punto B, poi congiungi A con B. Traccia una circonferenza di diametro AB, che interseca il lato Oa dell'angolo nel punto E e il lato Ob in F. Dimostra che vale la proporzione:

$$AB : EF = OA : OF.$$



Ipotesi 1. AB è un diametro;
2. OE è secante;
3. OB è secante.

Tesi $AB : EF = OA : OF$.

Dimostrazione

Per le ipotesi 2 e 3 possiamo applicare il teorema delle secanti e scrivere la proporzione:

$$OE : OB = OF : OA,$$

oppure, invertendo:

$$OB : OE = OA : OF.$$

I triangoli OAB e OEF hanno:

- due lati ordinatamente in proporzione;
- l'angolo compreso $\hat{O}$ in comune.

Quindi sono simili per il secondo criterio di similitudine dei triangoli.

Pertanto vale la proporzione $AB : EF = OA : OF$.

15 Traccia due circonferenze che si intersecano nei punti A e B. Da un punto P della retta AB esterno alle circonferenze traccia due rette, una che incontri la prima circonferenza nei punti C e D, l'altra che incontri la seconda nei punti E e F. Dimostra che il rettangolo avente come lati i segmenti PC e PD è equivalente al rettangolo avente come lati i segmenti PE e PF.

16 Nel triangolo ABC traccia le altezze AD e BE. Sia F l'intersezione delle rette AD e BE. Dimostra che il rettangolo con i lati congruenti ai segmenti AD e AF è equivalente al rettangolo con i lati congruenti ai segmenti AC e AE.

17 Disegna due triangoli rettangoli ABC e ABD con i vertici C e D da parti opposte ripetto all'ipotenusa comune AB. Prolunga i lati AC e DB fino a incontrarsi nel punto E. Dimostra che $EA : ED = EB : EC$.

18 Considera due circonferenze che si intersecano nei punti A e B e un punto E sulla retta AB, esterno al segmento AB. Dal punto E traccia le tangenti alle due circonferenze. Dimostra che i segmenti di tangenza sono congruenti.

19 Disegna una circonferenza e a essa circoscrivi un triangolo ABC. Indica con D e con E i punti di contatto di AB e AC con la circonferenza. Unisci B con E e indica con F l'altro punto d'incontro di BE con la circonferenza. Dimostra che i triangoli BDE e DFB sono simili.

20 Nel triangolo ABC indica con L, M, N i punti medi dei lati. Dimostra che ABC e LMN sono simili.

21 Dimostra che in due triangoli simili due lati omologhi stanno fra loro come i raggi delle circonferenze inscritte e come i raggi di quelle circoscritte.

22 Disegna un parallelogramma $ABCD$ e la sua diagonale AC. Per un punto P di AC traccia le parallele ai lati e dimostra che, fra i quattro parallelogrammi ottenuti, quelli che hanno per diagonale i segmenti AP e PC sono simili.

23 Da ciascun vertice del rettangolo $ABCD$ conduci la perpendicolare alla diagonale non passante per esso e chiama A', B', C' e D' i piedi di tali perpendicolari. Dimostra che il quadrilatero $A'B'C'D'$ è un rettangolo simile al rettangolo $ABCD$. (Suggerimento. Dimostra che i lati di $A'B'C'D'$ sono paralleli ai lati di $ABCD$.)

24 Dimostra che, se due quadrilateri hanno tre angoli congruenti e due lati consecutivi in proporzione, allora sono simili.

25 In una circonferenza sono date due corde MN e $M'N'$ che si intersecano in un punto P tale che $PM : PN = PM' : PN'$. Dimostra che le due corde sono congruenti.