ESERCIZI IN PIÙ
ESERCIZI DI FINE CAPITOLO

Le trasformazioni geometriche

1 Determina le parabole simmetriche rispetto all'asse x e all'asse y della parabola di equazione $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x$.
Traccia i grafici delle tre parabole.
$\left[y = \frac{1}{2}x^2 + 2x; y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]$

2 Trova l'equazione della parabola p passante per i punti $A(1; 0)$, $B(2; -1)$ e $C(0; 3)$.
Scrivi l'equazione della parabola simmetrica della parabola p rispetto all'origine.
Determina i punti simmetrici di quelli precedenti.
$[y = x^2 - 4x + 3; y = -x^2 - 4x - 3; A'(-1; 0), B'(-2; 1), C'(0; -3)]$

3 Applica la traslazione secondo un vettore parallelo all'asse x e lungo 4 alla parabola di equazione

$$y = -x^2 - 2x + 8.$$

Trova le intersezioni della retta $y = x + 4$ con le due parabole. $[y = -x^2 + 6x; (-4; 0), (1; 5), (4; 8)]$

4 Scrivi l'equazione della parabola p con l'asse coincidente con l'asse x, avente il vertice nell'origine e passante per il punto $P(4; 2)$.
Ricava l'equazione della parabola che si ottiene traslando quella precedente secondo il vettore $\vec{v}(3; 2)$. Trova l'intersezione fra le due parabole.
$\left[x = y^2; x = y^2 - 4y + 7; \left(\frac{49}{16}; \frac{7}{4}\right)\right]$

5 Sono dati il triangolo di vertici $A(-3; 2)$, $B(6; 0)$ e $C(0; 5)$ e il vettore $\vec{v}(4; 3)$. Traslando ABC del vettore $\vec{v}$ ottieni il triangolo $A'B'C'$. Qual è la trasformazione inversa, ossia quella che fa corrispondere ad $A'B'C'$ il triangolo ABC? Scrivine le equazioni.

6 Trova la corrispondente r' della retta r di equazione $2x - 3y + 7 = 0$ nella simmetria di asse $y = +\frac{1}{2}$.
Determina poi la retta r'' corrispondente di r' nella simmetria di asse $y = -2$. In quale trasformazione si corrispondono le rette r e r'? Scrivine le equazioni e commenta il risultato.

7 Nella simmetria di asse $x = 0$, al parallelogramma di vertici $A(-5; 2)$, $B(0; 2)$, $C(3; 5)$ e $D(-2; 5)$ corrisponde il parallelogramma $A'B'C'D'$. Indica con $A''B''C''D''$ il corrispondente di $A'B'C'D'$ nella simmetria di asse $y = 0$. Scrivi le equazioni della isometria che associa ad $ABCD$ direttamente $A''B''C''D''$. Se esegui le due simmetrie assiali in ordine inverso, ottieni lo stesso risultato? Verifica la tua risposta.

8 Determina le equazioni della trasformazione ottenuta componendo la traslazione di vettore $\vec{v}\left(1; -\frac{1}{2}\right)$ con la simmetria di asse $y = 2$. Applica tale trasformazione al triangolo di vertici $A(-5; 2)$, $B(0; 2)$ e $C(-2; 4)$ e verifica che non si mantiene il verso di percorrenza dei vertici.

Le coniche e le trasformazioni geometriche

9 Data la parabola p, con asse parallelo all'asse y, passante per i punti $P(1; -2)$, $Q(-1; 0)$ e $R\left(0; -\frac{5}{4}\right)$, determina l'equazione di p e della sua simmetrica rispetto all'asse x.
Traccia i grafici delle due parabole ed evidenzia i tre punti P, Q, R e i loro simmetrici P', Q', R'.

$\left[y = \frac{1}{4}x^2 - x - \frac{5}{4}; y = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{5}{4}\right]$

10 Determina l'equazione della simmetrica, rispetto all'asse y, della circonferenza di centro $C(4; 5)$ e raggio di misura 5. Disegna entrambe le circonferenze ed evidenzia le rispettive intersezioni con l'asse y.

$[x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0; x^2 + y^2 + 8x - 10y + 16 = 0; (0; 2); (0; 8)]$

11 Determina l'equazione della parabola p, con asse parallelo all'asse y, sapendo che ha il vertice sull'asse y e passa per i punti $M(1; -2)$ e $N(2; 4)$.
Applica a p la traslazione secondo un vettore parallelo all'asse x e lungo 2, poi trova le coordinate degli eventuali punti di intersezione fra le due parabole.

$[y = 2x^2 - 4; y = 2x^2 - 8x + 4; (1; -2)]$

12 Disegna nel piano cartesiano la retta r di equazione $y = x + 1$ e la parabola p di equazione $y = x^2 + x$. Trasla la parabola p di un vettore $\vec{v}(3; 1)$, ottenendo la parabola p'. Determina le coordinate dei punti di intersezione della retta r rispettivamente con la parabola p e con la parabola p', evidenziando nel grafico i punti trovati.

$[(-1; 0); (1; 2); (3 - \sqrt{3}; 4 - \sqrt{3}); (3 + \sqrt{3}; 4 + \sqrt{3})]$

13 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, con il vertice nell'origine degli assi e passante per il punto $P(2; 4)$. Applica alla parabola la traslazione secondo il vettore $\vec{v}(2; -1)$. Calcola le coordinate dei punti di intersezione fra le due parabole.

$\left[y = x^2; y = x^2 - 4x + 3; \left(\frac{3}{4}; \frac{9}{16}\right)\right]$

14 Scrivi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, avente il vertice nel punto $V(-1; 2)$ e passante per $C\left(0; \frac{5}{2}\right)$.
Determina il vettore $\vec{v}$ di una traslazione, tale che, applicata alla parabola, porti il vertice V a coincidere con l'origine degli assi cartesiani.
Traccia infine il grafico delle due parabole.

$\left[y = \frac{x^2}{2} + x + \frac{5}{2}; \vec{v}(1; -2); y = \frac{x^2}{2}\right]$

15 Dopo aver scritto l'equazione della circonferenza, avente un diametro di estremi $O(0; 0)$ e $A(4; 2)$, determina il vettore $\vec{v}$ di una traslazione, che applicata alla circonferenza, ne trasli il centro nell'origine degli assi cartesiani.
Traccia il grafico delle due circonferenze, evidenziando gli estremi O e A del diametro e i loro corrispondenti nella traslazione.

$[x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0; \vec{v}(-2; -1); x^2 + y^2 - 5 = 0]$

16 Determina le figure omotetiche di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = \frac{1}{2}$ dell'ellisse e della retta che passano per i punti $H(1; 4)$ e $K(2; 2)$.
Trova, poi, le intersezioni fra la retta e l'ellisse trasformate.

$\left[\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}y^2 = 1; y = -2x + 3; \left(\frac{1}{2}; 2\right); (1; 1)\right]$

17 Alla parabola di equazione $y = \frac{1}{4}x^2 + x$ applica, nell'ordine, le due trasformazioni indicate con a) e b), ottenendo la figura $\mathcal{F}$. Inverti, poi, l'ordine delle due trasformazioni, ottenendo la figura $\mathcal{F}'$. Indica se $\mathcal{F}$ coincide con $\mathcal{F}'$.

a) Traslazione secondo il vettore $\vec{v}(2; -1)$.
b) Simmetria rispetto all'asse x.

$$\left[y = -\frac{1}{4}x^2 + 2; y = -\frac{1}{4}x^2\right]$$

18 Ripeti l'esercizio precedente con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

a) Simmetria rispetto all'asse y.
b) Simmetria rispetto all'asse x.

$[x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0; x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0]$

19 Determina la figura omotetica di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 2$ dell'ellisse di equazione $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$.

$$\left[\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1\right]$$

20 Data l'ellisse $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, scrivi l'equazione della sua simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani. Traccia il grafico dell'ellisse e su di esso evidenzia i punti di ascissa 1 e 2 e i loro simmetrici rispetto all'origine.

$$\left[\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1\right]$$

21 Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita agli assi, passante per il punto $P(2; 1)$. Applica a essa l'omotetia di centro $O(0; 0)$ e rapporto $k = 2$. Trova le intersezioni della retta $y = \frac{x}{2}$ con le due iperboli prese in esame.

$$\left[\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} = 1; \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1; (2; 1); (-2; -1); (4; 2); (-4; -2)\right]$$