ESERCIZI IN PIÙ
LE ISOMETRIE E LE DIMOSTRAZIONI

La traslazione e la congruenza

1 Dimostra che in una traslazione segmenti corrispondenti sono congruenti e paralleli.

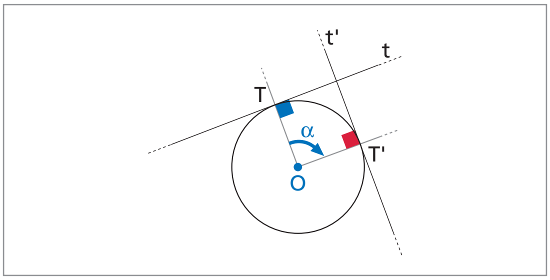
2 Disegna una retta r e un segmento AB fuori di essa. Scegliendo un punto D su r, è possibile individuare un quarto punto C del piano tale che $ABCD$ sia un parallelogramma. Caratterizza, mediante un'opportuna traslazione, il luogo geometrico descritto dal punto C al variare di D sulla retta r.

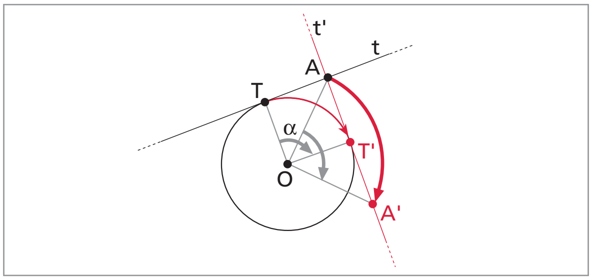
3 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Traccia per A la parallela a BD e per D la parallela ad AC. Le due parallele si intersecano nel punto E. Determina le immagini dei punti A e D nella traslazione di vettore $\overrightarrow{EO}$.

4 Disegna il triangolo isoscele ACD sulla base AC e il punto medio M di AC. Determina l'immagine B del punto C nella traslazione di vettore $\overrightarrow{DA}$ e l'immagine N del punto B nella traslazione di vettore $\overrightarrow{CM}$. Studia la natura dei quadrilateri $ABCD$ e $BMAN$.

5 **ESERCIZIO GUIDA**

Una retta t tangente a una circonferenza di centro O ruota intorno a O di un angolo α, determinando un'altra retta t'. Dimostra che anche t' è tangente alla circonferenza.





Ipotesi 1. t retta tangente in T alla circonferenza;
2. t' è corrispondente di t nella rotazione $r_{(O;\alpha)}$.

Tesi t' è tangente alla circonferenza in T'.

Dimostrazione

- Nella rotazione di centro O e angolo orientato α, al punto T della circonferenza corrisponde il punto T' della circonferenza. A un punto qualunque A della retta tangente corrisponde un punto A'.
- Poiché in una rotazione a una retta corrisponde una retta, alla retta t individuata dai punti T e A corrisponde la retta t' individuata dai punti corrispondenti T' e A'.
  La retta t' ha in comune con la circonferenza solo il punto T'. Infatti, se avesse con essa un altro punto di intersezione distinto da T', questo dovrebbe essere il corrispondente di un punto di intersezione della circonferenza con la retta t, diverso da T. Ma ciò sarebbe contro l'ipotesi 1.

Pertanto, la retta t' è tangente alla circonferenza nel punto T'.

6 Dati due punti A e B nel piano, individua un punto O tale che la rotazione di 90° e centro O porti il punto A su B.

7 Disegna un triangolo ABC e costruisci esternamente i due triangoli equilateri BCE e ACF. Confronta i due segmenti BF e AE.

▶ *Caso particolare*: se ABC è equilatero, come sono i punti E, C e F?

8 Dimostra che, in una rotazione di 90° e centro O arbitrario, una retta e la sua corrispondente sono sempre perpendicolari.

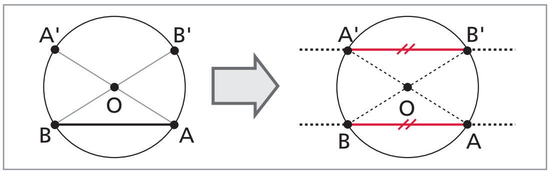
9 Disegna due triangoli isosceli non congruenti, OAB e OCD, rettangoli in O, unico vertice in comune. Nomina i vertici in senso antiorario e dimostra che:

a) AC è congruente a BD;

b) AC è perpendicolare a BD.

10 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostra che, in una circonferenza, i punti diametralmente opposti agli estremi di una corda AB sono gli estremi di una corda $A'B'$ parallela e congruente ad AB.



Ipotesi 1. AB corda;
2. AA' diametro;
3. BB' diametro.

Tesi 1. $AB \cong A'B'$;
2. $AB \parallel A'B'$.

Dimostrazione

- Il punto A' è simmetrico di A rispetto al centro O della circonferenza (ipotesi 2) e così pure B' è simmetrico di B rispetto a O (ipotesi 3).
- Poiché la simmetria centrale è un'isometria, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso congruente, cioè:
  $AB \cong A'B'$.
- Inoltre, poiché in una simmetria centrale a una retta corrisponde una retta parallela, al segmento AB corrisponde il segmento $A'B'$ a esso parallelo, cioè:
  $AB \parallel A'B'$.

11 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Indica le immagini dei punti A, B, C e D nella simmetria di centro O e dimostra che esse formano un parallelogramma.

12 Disegna un parallelogramma $ABCD$ di centro O. Dimostra le proprietà del parallelogramma mediante la simmetria di centro O.

13 Dimostra che due angoli con i lati paralleli discordi sono congruenti.

14 Disegna due parallelogrammi $ABCD$ e $EBFD$ in modo che abbiano la diagonale BD in comune.

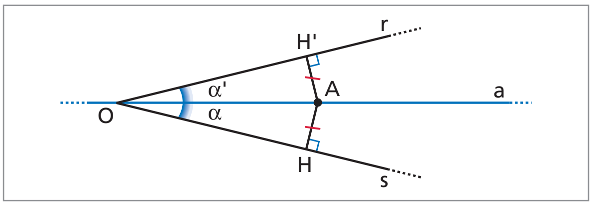
a) Confronta gli angoli $E\hat{A}D$ e $B\hat{C}F$.

b) Confronta i triangoli DEC e ABF.

La simmetria assiale e la congruenza

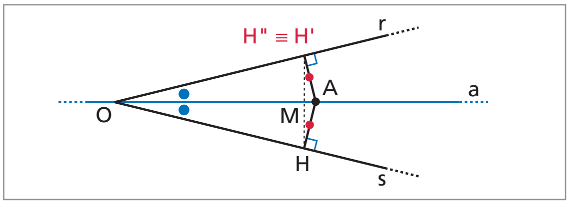
15 **ESERCIZIO GUIDA**

Dimostra, mediante una simmetria assiale, che i punti della bisettrice di un angolo sono equidistanti dai lati dell'angolo.



Ipotesi 1. $\alpha \cong \alpha'$;
2. A è un punto della bisettrice;
3. $AH \perp Os$;
4. $AH' \perp Or$.

Tesi $AH \cong AH'$.



Dimostrazione

- Nella simmetria di asse a, al punto A corrisponde se stesso, perché tutti i punti dell'asse sono uniti.
- Disegniamo il corrispondente del punto H nella stessa simmetria e lo indichiamo con H''. Dimostriamo che H'' coincide con H'.
  Nella simmetria di asse a, al segmento AH corrisponde il segmento AH'', alla semiretta Os corrisponde la semiretta Or.
- Per l'ipotesi 3, il segmento AH è perpendicolare a Os, quindi risulta anche $AH'' \perp Or$.
- Per l'ipotesi 4, $AH' \perp Or$; poiché è unica la perpendicolare a Or passante per A, il punto H'' deve coincidere col punto H'.
- Inoltre, poiché la simmetria assiale è un'isometria, i segmenti corrispondenti sono congruenti, quindi:

  $AH \cong AH'$.

16 Dato un asse di simmetria, scegli due punti A e B, esterni all'asse, in modo che con i corrispondenti punti A' e B' si formi il rettangolo $AA'B'B$.

17 Data una retta r, scegli due punti C e D, esterni a essa, in modo che, detti C' e D' i loro corrispondenti nella simmetria assiale di asse r, i due segmenti CD e $C'D'$ siano fra loro perpendicolari.

18 Dato il quadrato $ABCD$, determina gli assi rispetto ai quali risultano simmetrici:
a) AC e BD;
b) AB e AD.

19 Disegna un rombo $ABCD$ e un punto P sulla diagonale AC. Confronta la distanza di P da AB con la distanza di P da AD.

20 Dimostra che un triangolo isoscele e il suo simmetrico rispetto alla base formano un rombo.