

METTITI ALLA PROVA

1 Quali sono i valori di $k \in \mathbb{Z}$ che rendono scomponibile il trinomio $x^2 - kx - 7$ in fattori di primo grado? [$k = \pm 6$]

2 Considera il quadrinomio $x^2a^2 - x^2 - 4a^2 + 4$.

- Scomponilo in fattori.
- Per quale valore di $a \in \mathbb{R}$ il polinomio può essere scritto nella forma $(2 - x)(2 + x)$?
- Per quale valore di $x \in \mathbb{R}^+$ il polinomio può essere scritto nella forma $21(a - 1)(a + 1)$?

[a] $(x - 2)(x + 2)(a - 1)(a + 1)$; b) $a = 0$; c) $x = 5$

3 Trova il più piccolo valore $m \in \mathbb{Q}$, per cui $x^{2m+1} - 9$ è scomponibile nella differenza di quadrati. Dimostra che per tale valore il binomio dato può essere scritto nella forma $(-x - 3)(3 - x)$. Esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale che il binomio dato sia la differenza di quadrati? Motiva la risposta.

$$\left[m = \frac{1}{2}; \text{non esiste} \right]$$

4 Determina le costanti A e B per le quali la frazione algebrica $\frac{x+7}{(x-1)(x+3)}$ è uguale alla seguente somma: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$. [$A = 2; B = -1$]

5 È data la frazione algebrica $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$.

- I polinomi al numeratore e al denominatore sono completi?
- Il polinomio al numeratore è divisibile per $x + 1$? E per $x - 1$?
- Quali sono le condizioni di esistenza della frazione algebrica?
- È una frazione già ridotta? In caso contrario, esegui la riduzione.
- Qual è il grado del quoziente se si esegue la divisione fra numeratore e denominatore? Qual è il resto della divisione?

[a] sì al num.; no al den.; b) no; sì; c) $x \neq \pm 1$;
d) no; $\frac{2x+3}{x+1}$; e) 0; $x - 1$

6 Per quale valore di k è possibile ridurre la frazione algebrica $\frac{2a^2 + 2ka - a - k}{a^2 + a - 2}$, in modo da ottenere $\frac{2a - 1}{a - 1}$? [2]

7 Data la frazione algebrica $\frac{3x + 1}{x + 7}$, determina il minimo $x \in \mathbb{N}$ per il quale la frazione diventa impropria.

Esistono valori di $x \in \mathbb{N}$ per i quali la frazione data è uguale a un numero intero?

[$x = 4; x = 3$ oppure $x = 13$]

8 Considera il polinomio

$$3x^3 - 2x^2y + 6x^2 - xy^2 - 4xy - 2y^2.$$

- Scomponilo in fattori.
- Per quale valore di $x \in \mathbb{N}$ il polinomio può essere scritto nella forma $4(2 - y)(y + 6)$?
- Per quale valore di $y \in \mathbb{N}$ il polinomio può essere scritto nella forma $(x^2 - 4)(y + 3x)$?

[a] $(x - y)(x + 2)(y + 3x)$; b) $x = 2$; c) $y = 2$

9  **TEST** Per quanti valori di a il polinomio $(x - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$ è divisibile per $x^2 + x - 2$?

[A] 1 [B] 2 [C] 3 [D] 5 [E] Nessuno.

(Olimpiadi della matematica, Gara Senior, 1990).

10 Se x e y sono due numeri interi strettamente positivi tali che si abbia $x + y + xy = 90$, quanti sono i possibili valori della somma $x + y$? (Suggerimento. Somma 1 a entrambi i membri dell'uguaglianza e raccogli.)

(Gara Kangourou di matematica, Categoria Cadet, 2005)

[Solo un valore, $x + y = 18$]

11 **TEST** Quante sono le coppie di numeri interi positivi m, n (con $m > n$) tali che $m^2 = n^2 + 17$?

[A] Nessuna. [D] Quattro.
[B] Una. [E] Infinite.
[C] Due.

(Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior, 2005)