

METTITI ALLA PROVA

1 Dimostra che per ogni numero naturale n , il numero $n^3 - n$ è divisibile per 6.
(Suggerimento. Osserva che nella successione dei naturali, ogni tre numeri consecutivi uno è sempre multiplo di 3; poi scomponi in fattori...)

2 Considera i due trinomi $x^2 + kx + 12$ e $x^2 + hx + 15$, con $h, k \in \mathbb{Z}$. Indica con A l'insieme dei valori di k che rendono scomponibile il primo trinomio e con B l'insieme dei valori di h che rendono scomponibile il secondo trinomio, poi determina $A \cup B$ e $A \cap B$.
[$A \cup B = \{\pm 7, \pm 8, \pm 13, \pm 16\}$; $A \cap B = \{\pm 8\}$]

3 Verifica le seguenti uguaglianze numeriche:

$$3 = \frac{2^2 + 2}{2}; \quad 4 = \frac{3^2 + 3}{3}; \quad 5 = \frac{4^2 + 4}{4},$$

poi scrivi la frazione algebrica corrispondente al numero naturale $n + 1$ e dimostra che l'uguaglianza ottenuta è vera per qualunque n naturale maggiore di 0.

$$\left[n + 1 = \frac{n^2 + n}{n} \right]$$

4 Data la frazione algebrica $\frac{3x + 1}{x + 7}$, determina il minimo $x \in \mathbb{N}$ per il quale la frazione diventa impropria.

Esistono valori di $x \in \mathbb{N}$ per i quali la frazione data è uguale a un numero intero?

$$[x = 4; x = 3 \text{ oppure } x = 13]$$

5 È data la frazione algebrica $\frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$.

- I polinomi al numeratore e al denominatore sono completi?
- Il polinomio al numeratore è divisibile per $x + 1$? E per $x - 1$?
- Quali sono le condizioni di esistenza della frazione algebrica?
- È una frazione già ridotta? In caso contrario, esegui la riduzione.
- Qual è il grado del quoziente se si esegue la divisione fra numeratore e denominatore? Qual è il resto della divisione?

$$\left[\text{a) sì al num.; no al den.; b) no; sì; c) } x \neq \pm 1; \text{ d) no; } \frac{2x + 3}{x + 1}; \text{ e) } 0; x - 1 \right]$$

6 Considera il polinomio

$$3x^3 - 2x^2y + 6x^2 - xy^2 - 4xy - 2y^2.$$

- Scomponilo in fattori.
- Per quale valore di $x \in \mathbb{N}$ il polinomio può essere scritto nella forma $4(2 - y)(y + 6)$?
- Per quale valore di $y \in \mathbb{N}$ il polinomio può essere scritto nella forma $(x^2 - 4)(y + 3x)$?

$$[\text{a) } (x - y)(x + 2)(y + 3x); \text{ b) } x = 2; \text{ c) } y = 2]$$

7  **TEST** Per quanti valori di a il polinomio $(x - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$ è divisibile per $x^2 + x - 2$?

- 1
- 2
- 3
- 5
- Nessuno.

(Olimpiadi della matematica, Gara Senior, 1990)

8 Se x e y sono due numeri interi strettamente positivi tali che si abbia $x + y + xy = 90$, quanti sono i possibili valori della somma $x + y$?

(Suggerimento. Somma 1 a entrambi i membri dell'uguaglianza e raccogli.)

(Gara Kangourou di matematica, Categoria Cadet, 2005)

[solo un valore, $x + y = 18$]

9 TEST Quante sono le coppie di numeri interi positivi m, n (con $m > n$) tali che $m^2 = n^2 + 17$?

A Nessuna.

B Una.

C Due.

D Quattro.

E Infinite.

(Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior, 2005)