METTITI ALLA PROVA

1 Dimostra che $a = h^2 - k^2$, $b = 2hk$ e $c = h^2 + k^2$ costituiscono una terna pitagorica $\forall\, h,\ k \in \mathbb{R}$ con $k^2 < h^2$. Determina poi la terna pitagorica corrispondente ai valori di h e k, soluzioni dell'equazione $3x^2 + 4x + 1 = 0$.
(Suggerimento. Ricorda che a, b e c formano una terna pitagorica se vale l'uguaglianza $a^2 + b^2 = c^2$.)

$\left[\frac{8}{9}, \frac{2}{3}; \frac{10}{9}\right]$

2 Piegando un foglio di carta rettangolare, è possibile dividerlo in due parti rettangolari uguali fra loro e simili al foglio originario? Calcola, se è possibile, il rapporto fra i lati del foglio di carta.

[detti x e l i lati, $\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}$]

3 TEST Siano a, b, c numeri non nulli e si consideri l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Si dica se la somma dei reciproci delle radici di tale equazione è uguale a:

A $\frac{b}{c}$.
B $-\frac{b}{c}$.
C $\frac{2a}{b}$.
D $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
E $\frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

(*Olimpiadi della matematica*, *Gara Senior,* 1990)

4 Determina per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ le soluzioni dell'equazione $x^2 = 2ax + \sqrt{2}x - 2a\sqrt{2}$ rappresentano i lati di un rettangolo, poi calcola area e perimetro di tale rettangolo. Per quale valore di a il rettangolo diventa un quadrato? (Suggerimento. Utilizza la formula relativa a somma e prodotto delle radici.)

$\left[a > 0;\ 2p = 2(2a + \sqrt{2});\ A = 2a\sqrt{2};\ a = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

5 Nell'equazione $2x^2 - 7x + 3 = 0$, senza calcolare le soluzioni, trova:

a) $(x_2 - x_1)^2 - 3x_1 x_2$;

b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.

[a) $\frac{7}{4}$; b) $\frac{37}{6}$]

6 Senza risolvere l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, scrivi l'equazione di secondo grado che ha per radici:

a) gli opposti dei valori delle radici dell'equazione data;
b) i reciproci dei valori delle radici dell'equazione data;
c) le radici dell'equazione data moltiplicate per un numero k;
d) le radici dell'equazione data aumentate di k.

[a) $ax^2 - bx + c = 0$; b) $cx^2 + bx + a = 0$; c) $ax^2 + kbx + k^2c = 0$; d) $ax^2 + (b - 2ak)\,x + c - kb + ak^2 = 0$]

7 TEST Quale dei seguenti numeri non può essere scritto nella forma $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ con a e b interi positivi?

A $\frac{25}{12}$.
B $\frac{10}{3}$.
C $\frac{7}{3}$.
D $\frac{17}{4}$.
E $\frac{29}{10}$.

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede,* 1999)

8 TEST Quale numero diverso da 0 è tale che la sua decima parte eguagli dieci volte il quadrato del numero stesso?

A $\frac{1}{100}$ B $\frac{1}{10}$ C $\frac{1}{2}$ D 1 E 10

(*Olimpiadi della matematica*, *Giochi di Archimede,* 1999)

9 Verifica che esiste un rettangolo R che si ottiene come somma di un quadrato Q e di un altro rettangolo R' simile a R. Calcola inoltre il rapporto, detto *rapporto aureo*, tra i due lati di R.

[detti x e l i suoi lati, $\frac{x}{l} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$]

10 Esistono basi in cui l'espressione $15 \cdot 15 = 321$ risulta corretta?

(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior,* 2004)

[sì, la base 6]

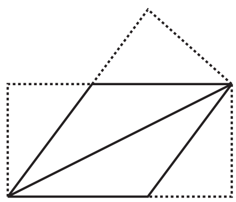
11 **TEST** Data l'equazione $yx^2 + x - y = 0$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

A Esiste un valore di x che è soluzione dell'equazione per ogni valore di y.
B Per ogni valore di y vi è almeno un valore di x che risolve l'equazione.
C Per ogni valore di y esistono due valori distinti di x che risolvono l'equazione.
D Per ogni valore di x esiste un valore di y che risolve l'equazione.
E Esiste un valore di y che è soluzione dell'equazione per ogni valore di x.

(*Olimpiadi della matematica, Gara Provinciale*, 1995)

12 **TEST** Un foglio di carta rettangolare di misura 6 cm $\times$ 12 cm è piegato lungo la sua diagonale. Le due parti non sovrapposte vengono tagliate via e poi si riapre il foglio ottenendo così un rombo. Qual è la lunghezza del lato del rombo?

A $3{,}5\sqrt{5}$ cm
B 7,35 cm
C 7,5 cm
D 7,85 cm
E 8,1 cm



(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior*, 2003)

13 **TEST** Quante sono le coppie $(x; y)$ di numeri reali che soddisfano l'equazione

$$(x + y)^2 = (x + 3)(y - 3)?$$

(Suggerimento. Poni $X = x + 3$ e $Y = y - 3$ e sostituisci.)

A 0
B 1
C 2
D 3
E Infinite.

(*Gara Kangourou di matematica, Categoria Junior*, 2003)