METTITI ALLA PROVA

1 **TEST** Sul tavolo c'è un foglio di carta quadrettata trasparente. Su di esso è tracciata la lettera y. Ruotiamo il foglio di 90° in verso orario, poi lo ribaltiamo lungo il lato sinistro del foglio, infine lo ruotiamo in verso antiorario di 180°. Che figura vediamo?

A  B  C  D  E 

(*Gara Kongourou di matematica, Categoria Cadet*, 2003)

2 Trova per quali valori di h e k il grafico della funzione

$$y = \frac{3hx + 2}{6x + k - 3}$$

ha come centro di simmetria il punto $C(2; -1)$ e rappresenta graficamente la funzione ottenuta.

$[h = -2; k = -9]$

3 Trova il centro di simmetria della curva di equazione $x^2 - 16y^2 - 6x + 32y - 23 = 0$. $[(3; 1)]$

4 Dimostra che in ogni parabola di equazione $y = -x^2 + bx + c$, c è l'ordinata del punto di intersezione con l'asse y ed è anche l'opposto del prodotto delle ascisse dei punti di intersezione con l'asse x, mentre b è la somma delle ascisse dei punti di intersezione con l'asse x. Cosa si potrebbe dire, analogamente, per una parabola di equazione $y = x^2 + bx + c$? Verifica la proprietà nella parabola di equazione $y = -x^2 + 4x + 5$.

5 Data la parabola di equazione $y = x^2 + bx + 4$, trova b in modo che:

a) abbia il vertice sull'asse x;

b) sia tangente alla retta di equazione $y = -2x + 1$;

c) stacchi sulla retta $y = -6$ una corda lunga $\frac{3}{2}$.

$\left[\text{a) } b = \pm 4; \text{ b) } b = -2 \pm 2\sqrt{3}; \text{ c) } b = \pm \frac{13}{2}\right]$

6 Rappresenta il grafico della funzione di equazione $y = x^2 + |2x - 3| - 6$.

7 Determina l'equazione della parabola di vertce $V\left(-\frac{3}{4}; -\frac{25}{8}\right)$, passante per il punto $A(-1; -3)$. Indicate con B e C le intersezioni della parabola con l'asse x, trova un punto P della parabola con ordinata negativa tale che l'area del triangolo BCP valga $\frac{15}{4}$.

$\left[y = 2x^2 + 3x - 2; P_1(-1; -3); P_2\left(-\frac{1}{2}; -3\right)\right]$

8 Determina per quali valori di k l'equazione

$$(2 - k)x^2 + (3k + 8)y^2 = 1$$

rappresenta:

a) una circonferenza;

b) un'ellisse;

c) un'iperbole.

Successivamente stabilisci, per l'ellisse e per l'iperbole, per quali valori di k i fuochi appartengono all'asse x e per quali valori all'asse y.

Determina i valori di k per i quali l'equazione data non rappresenta alcuna delle curve sopra menzionate e stabilisci che cosa rappresentano le corrispondenti equazioni.

$\Big[$a) $k = -\frac{3}{2}$; b) ellisse con i fuochi sull'asse x: $-\frac{3}{2} < k < 2$; ellisse con i fuochi sull'asse y: $-\frac{8}{3} < k < -\frac{3}{2}$;

c) iperbole con i fuochi sull'asse x: $k < -\frac{8}{3}$; iperbole con i fuochi sull'asse y: $k > 2$;

per $k = 2 \lor k = -\frac{8}{3}$ l'equazione rappresenta una coppia di rette$\Big]$

TEST

9 Al variare del parametro reale a, si dica quante sono le tangenti comuni alle due circonferenze aventi equazioni:

$$x^2 + y^2 = 4, \quad (x - a)^2 + y^2 = 1.$$

A 0, 1, 2, 3 oppure 4.

B 0, 2 oppure 4.

C 2.

D 2 oppure 4

E 0, 1 oppure 2.

(*Olimpiadi della matematica, Gara Senior,* 1993)

10 Per quanti valori del parametro c la parabola di equazione $y = x^2 - 8xc + c^4$ ha il vertice che giace su uno (almeno) degli assi cartesiani?

A Nessuno.

B Uno.

C Due.

D Tre.

E Infiniti.

(*Olimpiadi della matematica, Giochi di Archimede,* 1995)

11 Data la curva di equazione

$$(k - 3)x^2 + (2k - 8)y^2 = 1,$$

determina per quali valori di k, l'equazione data rappresenta:

a) una circonferenza;
b) un'ellisse con i fuochi sull'asse x;
c) un'iperbole con i fuochi sull'asse x;
d) un'iperbole equilatera con i fuochi sull'asse x.

$$\left[\text{a) } k = 5; \text{ b) } k > 4; \text{ c) } 3 < k < 4; \text{ d) } k = \frac{11}{3}\right]$$

12 Scrivi l'equazione dell'ellisse passante per i punti $A\left(2; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $B(-\sqrt{5}; 0)$. Determina l'equazione della circonferenza che ha diametro AB. Rappresenta in un sistema cartesiano le due coniche.

$$\left[\frac{x^2}{5} + y^2 = 1; x^2 + y^2 + (\sqrt{5} - 2)x + \frac{\sqrt{5}}{5}y - 2\sqrt{5} = 0\right]$$