Scheda di lavoro

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Ma quanti sono i numeri primi?

Man mano che si procede nella successione dei numeri naturali, è sempre più raro incontrare numeri primi. Chi garantisce che, prima o poi, non troveremo il più grande numero primo? I Greci hanno risolto questo problema:

«Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si vogliano proporre». (Euclide, *Elementi*, Libro IX, Proposizione 20, III secolo a.C.)

ANDREA: «È ovvio che i numeri primi sono infiniti: fanno parte dei numeri naturali, che, come si sa, sono infiniti».

LUISA: «Non mi sembra che basti quello che dici! Facciamo così: se consideriamo i numeri primi 2 e 3, troviamo un nuovo numero primo calcolando: $2 \cdot 3 + 1 = 7$ …».

▶ Quella di Andrea è una buona giustificazione?
A che cosa porta l'osservazione di Luisa?

1. La giustificazione di Andrea

Considera i divisori di 12. Quanti sono? …… .
I divisori di 12 fanno parte dei numeri naturali? …… .
Questo esempio è sufficiente per far capire che quella di Andrea non può essere accettata come giustificazione del fatto che i numeri primi sono infiniti. Spiega perché.
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

2. L'idea di Euclide

Euclide ha dimostrato l'infinità dei numeri primi sfruttando questa idea: costruire, a partire da un numero finito di numeri primi, un numero primo diverso da quelli di partenza.
Considera i primi quattro numeri primi: ……, ……, ……, …… .
Calcola il prodotto dei quattro numeri primi e aggiungi 1. Che cosa ottieni? …… .
È un numero primo diverso dai quattro presi in considerazione? …… .
Ripeti il procedimento considerando i primi cinque numeri primi. Che cosa ottieni? …… .
Puoi trarre una conclusione dagli esempi precedenti?
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Considera ora i primi sei numeri primi: ……, ……, ……, ……, ……, …… .
Calcola il prodotto dei sei numeri primi e aggiungi 1. Dovresti ottenere 30 031, che non è un numero primo. Infatti, se lo dividi per 509, ottieni …… .
La scomposizione in fattori primi di 30 031 è ……………………………… .
Confronta i fattori primi in cui è scomposto 30 031 con i sei numeri primi da cui sei partito. Che cosa noti?
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3. La dimostrazione

Seguiamo il pensiero di Euclide:

- consideriamo i primi n numeri primi e chiamiamoli $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$;
- calcoliamo $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_n + 1$;
- osserviamo che N è un nuovo numero primo diverso da ciascuno dei numeri $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, oppure che nella scomposizione in fattori di N si ottiene un nuovo numero primo diverso da $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$.

Dimostriamo quanto abbiamo osservato:

N non è divisibile per alcuno dei numeri primi $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ considerati. Infatti, dividendo N per p_1 otteniamo come resto ……; dividendolo per p_2 otteniamo come resto …… e così via. Dividendo N per uno qualunque dei numeri primi considerati il resto è sempre …… .

Se N non è divisibile per $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, allora:

- o è un numero primo,
- o non è un numero primo e scomponendolo in fattori primi otteniamo ……………………………………… .

In entrambi i casi abbiamo ottenuto un ………… diverso da …… . Se, a partire da un qualunque numero di numeri primi, ne possiamo sempre costruire uno diverso, allora i numeri primi ………………………………… .
La dimostrazione è terminata.